

二维多项式本征应变边界积分 方程及其数值验证*

马 杭¹, 郭 钊², 秦庆华³

- (1. 上海大学 理学院 力学系, 上海 200444;
2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
3. 澳大利亚国立大学 工程学院, ACT 0200, 澳大利亚)

摘要: 针对弹性介质中的椭圆形异质体, 给出了低阶多项式分布的二维本征应变边界积分方程和相应的 Eshelby 张量的定义. 以边界元分域法为参照, 利用含有单个异质体的弹性介质对提出的计算模型和算法进行了数值验证. 结果表明该算法取得较大的改进, 其计算效率高于传统的边界元法, 计算精度则高于采用常数本征应变的计算模型.

关键词: 本征应变; Eshelby 张量; 边界积分方程; 多项式; 异质体

中图分类号: O241 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.05.002

引 言

嵌入异质体(含孔洞)弹性状态的研究对于一大类物理与工程问题具有重要的意义, 自从 Eshelby 的先驱性工作^[1-2]以来, 夹杂物和非均质问题成为固体力学的研究焦点之一. 利用 Eshelby 本征应变和等效夹杂物的概念, 在理论^[3-7]与数值方面^[8-16]完成了大量的研究工作. 本征应变与许多实际问题相对应, 如结构中的非均匀温度、相变、塑性应变以及残余应力问题中的固有应变^[17]等. 同样, 以本征应变的概念为基础, 通过等效夹杂物的替换^[18], 可以解决晶体中的置换与间隙原子、半导体材料中的量子点/线结构、结构材料中的孔洞、析出相、增强相的作用等问题.

理论分析的方法能够提供异质体内外应力应变分布的图像和进一步研究的基础, 通常适于无限大域中具有简单几何形状诸如椭球、圆柱和球体问题的求解, 因而有限元法^[10]、体积分法^[10-13]和边界元法^[19]等数值方法成为分析复杂几何形状和材料问题的工具. 由于基体和所有的异质体都必须离散, 通常有限元的求解规模很庞大, 因而体积分法和边界元法更适于异质体问题的求解. 边界元往往与体积分法结合, 由于界面未知量也需要通过离散来求得, 通常只适于求解少量异质体规则排列的小规模问题^[14-15]. 对于大规模问题^[16], 须引入快速多极展开^[20]的特殊技术, 增加了算法的复杂性.

* 收稿日期: 2011-01-04; 修订日期: 2011-03-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10972131)

作者简介: 马杭(1951—), 男, 山东青州人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. E-mail: hangma@staff.shu.edu.cn).

遵循 Eshelby 的思路,最近本文作者提出了本征应变边界积分方程^[21-22]的计算模型,假定异质体内的本征应变为常数,对二维粒子增强材料进行了模拟,极大地降低了问题的求解规模.但是常数本征应变的应用范围受到均匀应力场和简单几何形状(椭球体)的限制,采用多项式来描述本征应变的分布显然更切合实际^[23-24].然而对于多个异质体的问题以及有限域问题,即使域中只含有单个异质体,获得解析解也是困难的.本文针对有限弹性介质中的椭圆形异质体,给出了平面应变条件下低阶多项式分布的本征应变边界积分方程和相应的 Eshelby 张量的定义.并以边界元分域法为参照,利用含有单个异质体的弹性介质,对多项式本征应变边界积分方程的模型和算法的有效性进行了数值验证.

1 计算模型

1.1 本征应变边界积分方程

在本文中,异质体域是指材料与基体不同的局部区域,记作 Ω_l . 如果区域 Ω_l 的弹性常数与基体相同,则称其为子域,子域与异质体域在几何上是完全相同的. 设基体和异质体均为各向同性,二者在界面上理想结合,界面上位移连续、面力平衡. 基体 Ω 为有限域,其外边界为 Γ , 域 Ω_l 的边界即界面记为 Γ_l ($\Gamma_l = \Omega_l \cap \Omega$). 关于位移和应力的本征应变边界积分方程^[21-22] 分别为

$$Cu_i(p) + \int_{\Gamma} u_j(q) \tau_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} \tau_j(q) u_{ij}^*(p, q) d\Gamma(q) + \sum_{l=1}^{N_l} \int_{\Omega_l} \varepsilon_{jk}^0(q) \sigma_{ijk}^*(p, q) d\Omega(q), \quad (1)$$

$$C\sigma_{ij}^*(p) = \int_{\Gamma} \tau_k(q) u_{ijk}^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u_k(q) \tau_{ijk}^*(p, q) d\Gamma(q) + \sum_{l=1}^{N_l} \int_{\Omega_l - \Omega_e} \varepsilon_{kl}^0(q) \sigma_{ijkl}^*(p, q) d\Omega(q) + \varepsilon_{kl}^0(p) O_{ijkl}^*, \quad (2)$$

式中, p 和 q 分别为源点和场点, u_{ij}^* , τ_{ij}^* 和 σ_{ij}^* 分别为 Kelvin 位移、面力和应力基本解, u_{ijk}^* , τ_{ijk}^* 和 σ_{ijk}^* 分别为相应基本解的导出函数, C 为边界积分的自由项系数,当源点 p 位于光滑边界时, $C = 1/2$. Ω_e 为 $p \in \Omega_l$ 时的 ε 邻域, O_{ijkl}^* 为相应的区域积分自由项, N_l 为基体 Ω 中异质体的数量, ε_{ij}^0 为本征应变. 如果无限域中的单个子域 Ω_l 存在本征应变 ε_{ij}^0 , 利用式(2) 和本构关系, 子域上的拘束应变 ε_{ij}^C 可表达为

$$\varepsilon_{ij}^C = \varepsilon_{ij}^0 + C_{ijkl}^{-1} \left\{ \int_{\Omega_l - \Omega_e} \varepsilon_{mn}^0 \sigma_{klmn}^* d\Omega + O_{klmn}^* \varepsilon_{mn}^0 \right\}, \quad (3)$$

式中, C_{ijkl}^{-1} 为基体的弹性柔度张量. 利用积分类型的变换关系^[25] 并假定常数本征应变分布, 可将式(3) 改写成

$$\varepsilon_{ij}^C = \varepsilon_{ij}^0 + C_{ijkl}^{-1} \int_{\Gamma_l} \varepsilon_{mn}^0 x_n \tau_{klm}^* d\Gamma, \quad (4)$$

式中, x_k 为两点变量, 即 p 和 q 两点间距离的投影

$$x_k = x_k(q) - x_k(p). \quad (5)$$

通过将区域积分转换成边界积分, 不仅避免了内部胞元的剖分, 也不必推导区域积分的自由项, 从而简化了计算工作. 众所周知, 对于常应变的情形, 子域上的本征应变与拘束应变 ε_{ij}^C 通过 Eshelby 张量联系起来, 即

$$\varepsilon_{ij}^C = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0. \tag{6}$$

在平面应变的条件下, Eshelby 张量的边界积分表达式为

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{4\mu} \int_{\Gamma_i} x_l \{ \tau_{ijk}^* + \tau_{jik}^* - 2\nu\delta_{ij}\tau_{mnk}^* \} d\Gamma, \tag{7}$$

式中, μ, ν 分别为基体的剪切模量和 Poisson 比, δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 利用式(7)的边界积分, 通过数值方法来计算 S_{ijkl} 不仅方便, 而且容易达到机器的精度.

1.2 多项式本征应变与 Eshelby 张量

由于在实际问题中, 与基体 Ω 相比子域的尺度较小, 采用低阶多项式来描述 Ω_i 上的本征应变是合理的. 本文采用关于场点的二次多项式, 用局部坐标 ξ_1 和 ξ_2 来表达子域上的本征应变, 即

$$\varepsilon_{ij}^0 = \sum_{m=0, n=0}^{m+n=2} \varepsilon_{ij}^{(0)mn} \xi_1^m(q) \xi_2^n(q), \tag{8}$$

式中, $\varepsilon_{ij}^{(0)mn}$ 表示多项式的系数, m 和 n 均为整数. 在图 1 中, 域 Ω_i 映射为单位圆.

表 1 Eshelby 张量 S_{IJKL} 下标的定义

Table 1 Definition of subscripts in Eshelby tensor S_{IJKL}

subscripts	I, K			J, L					
numbering	1	2	3	1	2	3	4	5	6
definition	ε_{11}	ε_{12}	ε_{22}	1	ξ_1	ξ_2	ξ_1^2	$\xi_1\xi_2$	ξ_2^2

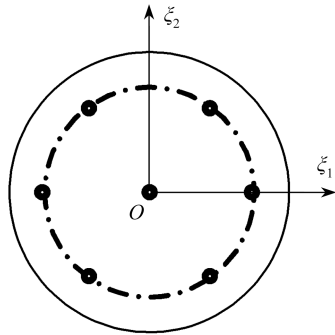


图 1 域 Ω_i 的局部坐标与拟合点

Fig. 1 Local coordinates and fitting points in Ω_i

根据多项式保守定理^[23-24], 在椭圆形子域中产生的拘束应变 ε_{ij}^C 同样以二次多项式的形式分布, 而且奇次项和偶次项各自相互对应. 这时 ε_{ij}^C 与 ε_{ij}^0 不能用通常意义下的 Eshelby 张量相联系. 为了表述方便, 本文采用以下记法:

$$\varepsilon_{IJ}^C = S_{IJKL} \varepsilon_{KL}^0, \tag{9}$$

式中, S_{IJKL} 仍可称为 Eshelby 张量, 其下标按表 1 定义. 例如, 设 $I = 1, K = 3, J = 4, L = 6$, 则式(9)成为

$$\xi_1^2(q) \varepsilon_{11}^{C20} = S_{1436} \xi_2^2(q) \varepsilon_{22}^{(0)02}, \tag{10}$$

即 S_{1436} 表示椭圆形子域中按 ξ_2^2 分布的单位本征应变分量 ε_{22}^0 所引起的按 ξ_1^2 分布的拘束应变分量 ε_{11}^C . 对于二维问题, 不为 0 的 Eshelby 张量共有 78 项, 其中对应于常数应变的项有 5 个, 可按式(7)计算. 对应于线性应变和二次应变的项分别有 18

个和 41 个, 由本征应变平方项所引起的常数拘束应变的项有 14 个.

式(1)和(2)中含有场点多项式表达的本征应变的区域积分, 也转换为边界积分进行计算. 以多项式的任一项为例, 经过局部到整体的坐标变换(参见式(8)), 将场点多项式写成两点多项式的形式:

$$\int_{\Omega_i} x_1^m(q) x_2^n(q) \sigma_{ijk}^* d\Omega = \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \frac{m!n!}{(m-s)!s!(n-t)!t!} [x_1(p)]^{m-s} [x_2(p)]^{n-t} \int_{\Omega_i} x_1^s x_2^t \sigma_{ijk}^* d\Omega, \tag{11}$$

$$\int_{\Omega_i - \Omega_e} x_1^m(q) x_2^n(q) \sigma_{ijkl}^* d\Omega + x_1^m(p) x_2^n(p) O_{ijkl}^* =$$

$$\sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \frac{m!n!}{(m-s)!s!(n-t)!t!} [x_1(p)]^{m-s} [x_2(p)]^{n-t} \times \int_{\Omega_I - \Omega_\varepsilon} x_1^s x_2^t \sigma_{ijkl}^* d\Omega + x_1^m(p) x_2^n(p) O_{ijkl}^*, \quad (12)$$

式中, s 和 t 均为整数. 这样式(1)和(2)中的区域积分均可逐项转换为边界积分^[25], 转换公式列于附录 A 和 B, 从而保留了边界型数值方法只需在边界上离散的优点.

对于 S_{ijkl} 的数值计算, 可按本征应变多项式的各项利用式(3) 逐项进行. 以多项式的某一项为例, 具体的步骤为: 首先将局部坐标 $\xi_k(q)$ 映射为原点位于 Ω_I 中心的整体坐标 $x_k(q)$, 利用式(12) 将场点多项式写成两点多项式, 结合式(9) 的定义并利用附录 B 的公式, 即可通过边界积分用数值方法计算相应的 S_{ijkl} . 需要指出的是, 仅当本征应变为常数时式(12) 中的自由项才存在, 这时只需直接用式(7) 来计算 Eshelby 张量.

1.3 等效夹杂物上的本征应变

根据 Eshelby 等效夹杂物的概念^[1-2], 在外加应变 ε_{ij} 的作用下, 可以用含有本征应变的子域, 即等效夹杂物来替换异质体域而保持其力学状态不变. 由弹性力学的理论, 替换的条件为

$$C_{ijkl}^I (\varepsilon_{kl}^C + \varepsilon_{kl}) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^C + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad (13)$$

C_{ijkl} 为基体的弹性常数张量. 定义弹性模量比 $\beta = E_1/E$, 其中 E_1 和 E 分别为异质体和基体的弹性模量, 上标(或下标) I 表示异质体. 记

$$\gamma = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \beta_1 = \frac{\beta(1+\nu)}{1+\nu_1}, \beta_2 = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta\nu_1}{1-2\nu_1}, \quad (14)$$

式(13) 可显式地写成

$$(1 - \beta_1) \varepsilon_{ij}^C + \beta_2 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^C - \varepsilon_{ij}^0 - 0.5\gamma \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^0 = -(1 - \beta_1) \varepsilon_{ij} - \beta_2 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}. \quad (15)$$

将式(9) 代入式(15), 便可通过子域上的外加应变来计算等效夹杂物上的本征应变. 如图 1, 本文用子域中 7 个拟合点上的 21 个外加应变分量, 通过最小二乘拟合来确定本征应变二次多项式的 18 个系数.

1.4 求解步骤

对于每个异质体域上的外加应力, 除了受到外加载荷的影响, 也将受到其他异质体域的影响. 这是由于每个子域上的本征应变都在整个 Ω 上产生一个自平衡的内应力场, 使得不仅每个子域的应力状态要受到其他子域的影响, 而且给定位移的外边界面力和给定面力的外边界位移也都受到子域本征应变的影响. 因此等效夹杂物上的外加应变以及本征应变必须通过迭代的方式来计算. 经过离散并结合边界条件, 将式(1) 写成矩阵的形式:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + B\boldsymbol{\alpha}, \quad (16)$$

式中, A 为系统的系数矩阵, B 为式(1) 中与区域积分核相关联的系数矩阵, \mathbf{b} 为右向量, \mathbf{x} 为外边界未知向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 为子域上多项式本征应变的系数向量, 需要通过迭代计算来修正. 应指出的是, A, B 和 \mathbf{b} 均为常量, 只需计算一次.

计算时首先利用式(2), 通过外加应力(换算成应变) 给每个异质体的位置赋以本征应变的初值, 再利用下列迭代公式计算未知向量 \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A^{-1}(\mathbf{b} + B\boldsymbol{\alpha}^{(k)}), \quad (17)$$

式中, k 为迭代次数. 多项式本征应变格式算法的流程如图 2 所示, 与常数本征应变格式算法的流程相似, 细节可参阅文献[21-22], 这里从略.

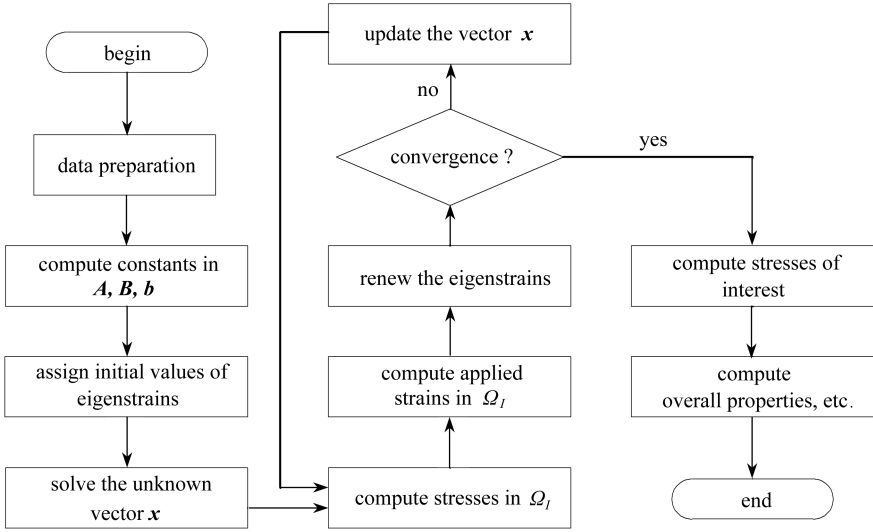


图2 算法的流程图

Fig.2 Flowchart of the algorithm for the eigenstrain formulation of the BIE

2 数值验证

2.1 数值模型

如图3所示,计算区域为含有单个椭圆形异质体(取 $N_1 = 1$)的正方形域,设其边长为 l ,取椭圆长轴 $2a = 0.4l$,椭圆轴比 $b/a = 0.6$,椭圆中心坐标 $(l/3, l/2)$ 。计算了不同加载方式下基体 Ω 和异质体 Ω_l 上的应力,应力计算分别沿 $x_1 = 0.553l$ 的竖直虚线和 $x_2 = 0.5l$ 的水平点划线进行(图3)。

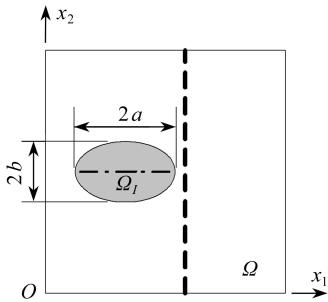


图3 计算区域

Fig.3 Computing domain

以边界元分域法为参照,比较了常数本征应变和多项式本征应变的计算结果。在分域法中,对域 Ω 和 Ω_l 分别采用两个不同的边界积分方程描述,并分别用32个二次单元对 Γ 和 Γ_l 进行了剖分,关于域 Ω 和 Ω_l 的两个方程在界面 Γ_l 上耦合,即位移连续,面力平衡。在本征应变计算模型中采用式(1)的离散形式,外边界 Γ 仍然剖分了32个二次单元,而对界面 Γ_l 则采用了边界点法离散为120个支域^[26-27]。在本征应变计算模型中,界面的离散是为了计算式(1)至式(3)中的区域积分,而这些区域积分也要转化为边界积分来计算^[25]。

采用了两种弹性模量比,分别为 $E_1/E = 0.01$ 和 $E_1/E = 10$ 。设基体和异质体的Poisson比相同,即 $\nu = \nu_1 = 0.3$ 。如图4所示,采用了4种加载方式,即单向拉伸(图4(a))、纯剪切(图4(b))、二次分布的单向拉伸(图4(c))和简单剪切(图4(d)),各加载方式中的外加面力取值均为 $p = 1$ 。

2.2 计算结果

采用边界元分域法、常数以及多项式本征应变格式3种算法对4种加载方式下的应力分布进行的计算如图5至图10所示,其中基体 Ω 上的应力沿 $x_1 = 0.553l$ 的竖直线、异质体 Ω_l 上

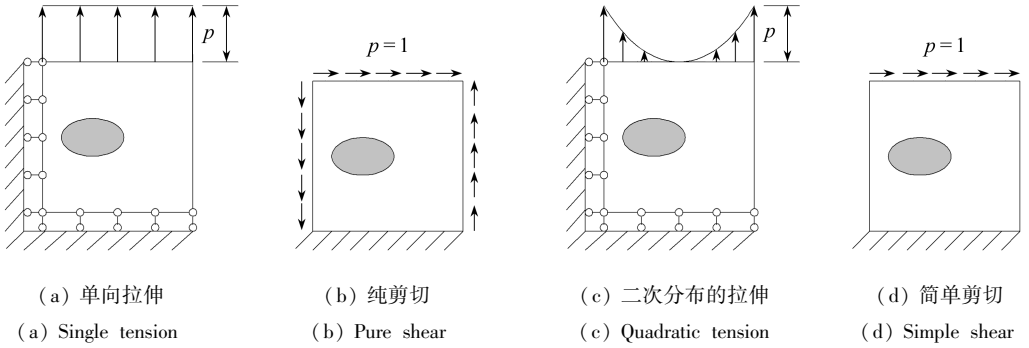


图4 加载方式

Fig. 4 The loading manners

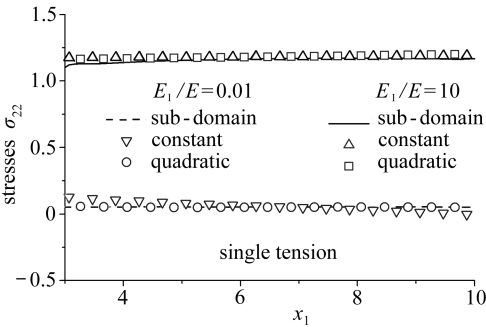


图5 单向拉伸时异质体上的正应力

Fig. 5 Normal stresses in inhomogeneity under single tension

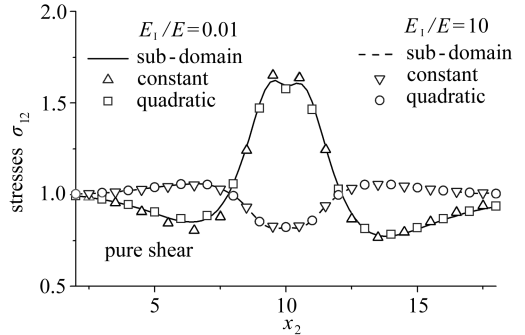


图6 纯剪切时基体上的正应力

Fig. 6 Shear stresses in matrix under pure shear

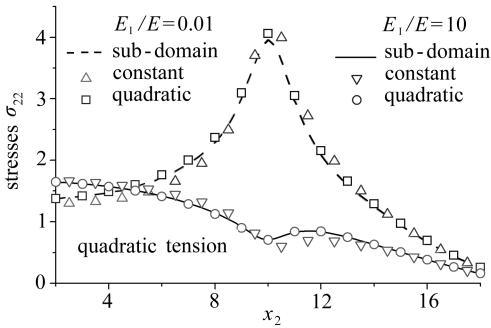


图7 二次分布拉伸时基体上的正应力

Fig. 7 Normal stresses in matrix under quadratic tension

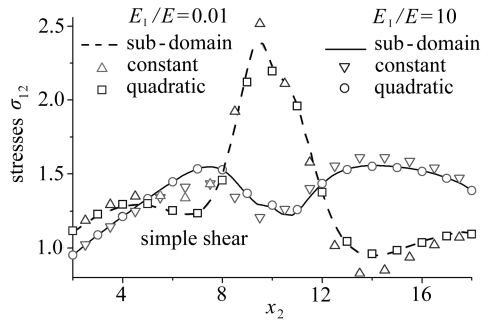


图8 简单剪切时基体上的切应力

Fig. 8 Shear stresses in matrix under simple shear

的应力沿 $x_2 = 0.5l$ 的水平线进行(图3)。由图5和图6可知,与常数本征应变格式的算法相比较,对于多项式本征应变格式的算法,除了在 $E_1/E = 0.01$ 条件下的单向拉伸时(图4(a)) 异质体上的正应力 σ_{22} 与纯剪切时(图4(b)) 基体上的切应力 σ_{12} 的计算结果有所改善以外,两种算法结果的差异并不明显。因为对于有限域,在单向拉伸和纯剪切这两种加载方式下的外加应变均为常数,异质体上的应变响应仍然几乎为常数,能够较好地用常数本征应变的计算模型来描述。

在二次分布单向拉伸(图 4(c))和简单剪切(图 4(d))条件下,基体应力的计算结果分别如图 7 和 8 所示,异质体应力的计算结果分别如图 9 和 10 所示.由图 7 至图 10 的结果可知,常数本征应变的计算结果与分域法相比较,存在着较大的差异,说明常数应变不足以描述相应的应变分布特征.而多项式本征应变的计算结果与分域法的结果吻合良好,不仅说明在复杂加载条件下用多项式描述应变的分布更接近实际情况,也证明了多项式本征应变计算模型的正确性.

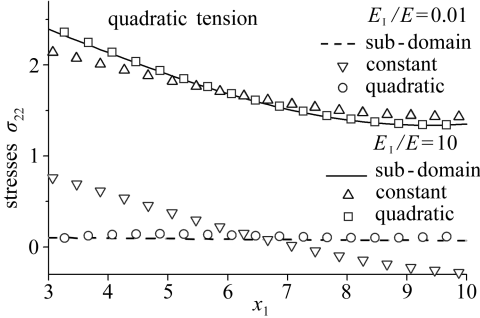


图 9 二次分布拉伸时异质体上的正应力
Fig.9 Normal stresses in inhomogeneity under quadratic tension

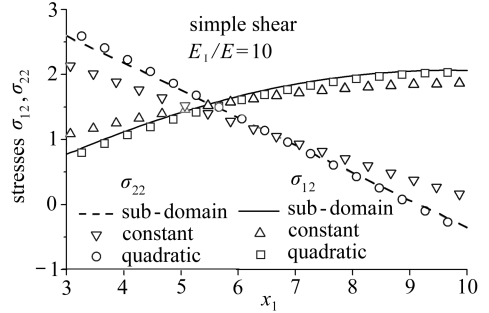


图 10 简单剪切时异质体上的应力
Fig.10 Stresses in inhomogeneity under simple shear

表 2 基体上沿 $x_1 = 0.553 l$ 的应力计算误差 ($E_1/E = 10$)

Table 2 The errors of stresses in matrix along $x_1 = 0.553 l$ for $E_1/E = 10$

loading	algorithm	$\varepsilon_{\text{MAX}}(\sigma_{11})$	$\varepsilon_{\text{MAX}}(\sigma_{12})$	$\varepsilon_{\text{MAX}}(\sigma_{22})$	$\varepsilon_{\text{RMS}}(\sigma_{11})$	$\varepsilon_{\text{RMS}}(\sigma_{12})$	$\varepsilon_{\text{RMS}}(\sigma_{22})$
single tension	constant	0.010 8	0.008 4	0.007 8	0.011 6	0.009 4	0.011 9
	quadratic	0.002 8	0.008 6	0.001 7	0.005 7	0.006 0	0.003 9
pure shear	constant	0.040 1	0.009 3	0.014 4	0.021 2	0.012 6	0.016 2
	quadratic	0.031 3	0.002 4	0.025 0	0.012 6	0.005 7	0.012 0
quadratic tension	constant	0.126 7	0.120 5	0.322 2	0.043 8	0.050 3	0.065 6
	quadratic	0.057 8	0.011 4	0.064 5	0.029 9	0.013 9	0.027 0
simple shear	constant	0.128 4	0.040 0	0.174 3	0.039 9	0.031 7	0.054 7
	quadratic	0.024 7	0.011 6	0.021 4	0.016 4	0.009 8	0.017 5

ε_{MAX} : the maximum errors; ε_{RMS} : the root mean square errors

基体应力的最大计算误差 ε_{MAX} 和均方根误差 ε_{RMS} 在表 2 中进行了比较,表明对于各种加载模式,多项式本征应变算法的计算精度都高于常数本征应变的算法.虽然在单向拉伸条件下基体切应力 σ_{12} (图 6) 的计算结果($E_1/E = 10$) 没有明显的差异,从表 2 数据中却能清楚地看出多项式本征应变的算法优于常数本征应变的算法.

表 3 3 种算法离散方程的自由度和计算效率

Table 3 The degree of freedom and efficiency of three algorithms

algorithm	sub-domain	constant	quadratic
degree of freedom	256	128	128
CPU time t /ms	562	172	235

采用本征应变计算模型进行计算时,通常只需 3 至 4 次迭代即可收敛.由表 3 比较了 3 种算法离散方程的自由度和计算效率,说明本征应变模型的计算效率要优于分域法.这是由于在分域法中,外边界和界面未知量均需要直接求解,其解题规模与异质体的数量成比例,所需的

CPU 时间则按几何级数增长,当异质体数量较多时,分域法的程序甚至无法在台式机上运行.与此相反,本征应变计算模型的解题规模与异质体的数量无关,所需的 CPU 时间与异质体的数量成比例,这是本征应变模型与分域法的主要区别之一.与常数本征应变相比,由于多项式本征应变的待定系数较多,这些系数又要通过拟合的方式加以确定,因此在迭代计算时要花费较多的 CPU 时间,但由表 3 可知,多项式本征应变计算模型的效率仍优于分域法,并且能够处理非均匀本征应变问题.

3 结 论

本文给出了低阶多项式分布的二维本征应变边界积分方程和相应的 Eshelby 张量的定义.以边界元分域法为参照,对弹性介质中的单个椭圆形异质体问题进行了数值分析,验证了多项式本征应变边界积分方程计算模型的正确性和算法的可行性.与常数本征应变计算模型比较,多项式本征应变计算模型提高了计算精度;与分域法比较,本征应变计算模型提高了计算效率.

附 录 A

位移积分方程中的两点多项式区域积分向边界积分的变换公式^[25]为(在以下各式中, $m \geq 0, n \geq 0$)

$$\int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{111}^* d\Omega = \frac{1}{m+n+1} \int_{\Gamma} x_1^{m+1} x_2^n \tau_{11}^* d\Gamma, \tag{A1}$$

$$\int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{222}^* d\Omega = \frac{1}{m+n+1} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^{n+1} \tau_{22}^* d\Gamma, \tag{A2}$$

$$\int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{112}^* d\Omega = \frac{1}{m+n+1} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^{n+1} \tau_{11}^* d\Gamma, \tag{A3}$$

$$\int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{221}^* d\Omega = \frac{1}{m+n+1} \int_{\Gamma} x_1^{m+1} x_2^n \tau_{22}^* d\Gamma, \tag{A4}$$

$$\int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{122}^* d\Omega = \frac{1}{n+1} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^{n+1} \tau_{12}^* d\Gamma - \frac{m}{(n+1)(m+n+1)} \int_{\Gamma} x_1^{m-1} x_2^{n+2} \tau_{11}^* d\Gamma, \tag{A5}$$

$$\int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{211}^* d\Omega = \frac{1}{m+1} \int_{\Gamma} x_1^{m+1} x_2^n \tau_{21}^* d\Gamma - \frac{n}{(n+1)(m+n+1)} \int_{\Gamma} x_1^{m+2} x_2^{n-1} \tau_{22}^* d\Gamma. \tag{A6}$$

附 录 B

记 $\gamma = 2\nu/(1-2\nu)$, n_i 为边界(界面)外向法线,应力积分方程中的两点多项式区域积分向边界积分的变换公式^[25]为(在以下各式中, $m \geq 0, n \geq 0, m+n \geq 0$)

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{1111}^* d\Omega = & \frac{(\gamma+2)m}{m+n} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n \tau_{11}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n [(\gamma+2)\sigma_{111}^* n_1 + \gamma\sigma_{211}^* n_2] d\Gamma + \\ & \frac{\gamma n}{m+1} \int_{\Gamma} x_1^{m+1} x_2^{n-1} \tau_{21}^* d\Gamma - \frac{\gamma n(n-1)}{(m+1)(m+n)} \int_{\Gamma} x_1^{m+2} x_2^{n-2} \tau_{22}^* d\Gamma, \end{aligned} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{2222}^* d\Omega = & \frac{(\gamma+2)n}{m+n} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n \tau_{22}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n [(\gamma+2)\sigma_{222}^* n_2 + \gamma\sigma_{122}^* n_1] d\Gamma + \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma m}{n+1} \int_{\Gamma} x_1^{m-1} x_2^{n+1} \tau_{12}^* d\Gamma - \frac{\gamma m(m-1)}{(n+1)(m+n)} \int_{\Gamma} x_1^{m-2} x_2^{n+2} \tau_{11}^* d\Gamma, \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{1122}^* d\Omega &= \frac{n}{m+n} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n \tau_{11}^* d\Gamma + \\ &\frac{m}{m+n} \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n \tau_{22}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n (\sigma_{221}^* n_1 + \sigma_{112}^* n_2) d\Gamma, \end{aligned} \quad (B3)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{1112}^* d\Omega &= \\ &\frac{n}{m+n} \int_{\Gamma} x_1^{m+1} x_2^{n-1} (\tau_{11}^* - \tau_{22}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n (\sigma_{221}^* - \sigma_{111}^*) n_2 d\Gamma, \end{aligned} \quad (B4)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \int_{\Omega} x_1^m x_2^n \sigma_{2221}^* d\Omega &= \\ &\frac{m}{m+n} \int_{\Gamma} x_1^{m-1} x_2^{n+1} (\tau_{22}^* - \tau_{11}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} x_1^m x_2^n (\sigma_{112}^* - \sigma_{222}^*) n_1 d\Gamma. \end{aligned} \quad (B5)$$

若 $m = n = 0$, 则

$$\int_{\Omega-\Omega_I} \sigma_{ijkl}^* d\Omega + O_{ijkl}^* = \int_{\Gamma} x_i \tau_{ijk}^* d\Gamma. \quad (B6)$$

参考文献:

- [1] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1957, **241**(1226): 376-396.
- [2] Eshelby J D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1959, **252**(1271): 561-569.
- [3] Mura T, Shodja H M, Hirose Y. Inclusion problems (part 3) [J]. *Applied Mechanics Review*, 1996, **49**(10S): S118-S127.
- [4] Federico S, Grillo A, Herzog W. A transversely isotropic composite with a statistical distribution of spheroidal inclusions: a geometrical approach to overall properties[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, **52**(10): 2309-2327.
- [5] Cohen I. Simple algebraic approximations for the effective elastic moduli of cubic arrays of spheres[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, **52**(9): 2167-2183.
- [6] Franciosi P, Lorrand G. Using the radon transform to solve inclusion problems in elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(3/4): 585-606.
- [7] Feng X Q, Mai Y W, Qin Q H. A micromechanical model for interpenetrating multiphase composites[J]. *Computational Material Science*, 2003, **28**(3/4): 486-493.
- [8] Kompis V, Kompis M, Kaukic M. Method of continuous dipoles for modeling of materials reinforced by short micro-fibers[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2007, **31**(5): 416-424.
- [9] Doghri I, Tinel L. Micromechanics of inelastic composites with misaligned inclusions: numerical treatment of orientation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(13/16): 1387-1406.
- [10] Kakavas P A, Kontoni D N. Numerical investigation of the stress field of particulate reinforced polymeric composites subjected to tension[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, **65**(7): 1145-1164.
- [11] Kanaun S K, Kochekseraii S B. A numerical method for the solution of thermo- and electrostatic problems for a medium with isolated inclusions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **192**(2): 471-493.

- [12] Lee J, Choi S, Mal A. Stress analysis of an unbounded elastic solid with orthotropic inclusions and voids using a new integral equation technique[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(16): 2789-2802.
- [13] Dong C Y, Cheung Y K, Lo S H. A regularized domain integral formulation for inclusion problems of various shapes by equivalent inclusion method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, **191**(31): 3411-3421.
- [14] Dong C Y, Lee K Y. Boundary element analysis of infinite anisotropic elastic medium containing inclusions and cracks[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2005, **29**(6): 562-569.
- [15] Dong C Y, Lee K Y. Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(25/26): 7919-7938.
- [16] Liu Y J, Nishimura N, Tanahashi T, Chen X L, Munakata H. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2005, **72**(1): 115-128.
- [17] Ma H, Deng H L. Nondestructive determination of welding residual stresses by boundary element method[J]. *Advances in Engineering Software*, 1998, **29**(2): 89-95.
- [18] Nakasone Y, Nishiyama H, Nojiri T. Numerical equivalent inclusion method: a new computational method for analyzing stress fields in and around inclusions of various shapes[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2000, **285**(1/2): 229-238.
- [19] Qin Q H. Nonlinear analysis of Reissner plates on an elastic foundation by the BEM[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, **30**(22): 3101-3111.
- [20] Greengard L F, Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **73**(2): 325-348.
- [21] Ma H, Yan C, Qin Q H. Eigenstrain formulation of boundary integral equations for modeling particle-reinforced composites[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2009, **33**(3): 410-419.
- [22] 马杭, 夏利伟, 秦庆华. 短纤维复合材料的本征应变边界积分方程计算模型[J]. 应用数学和力学, **29**(6): 687-695. (MA Hang, XIA Li-wei, QIN Qing-hua. Computational model for short-fiber composites with eigen-strain formulation of boundary integral equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, **29**(6): 757-767.)
- [23] Rahman M. The isotropic ellipsoidal inclusion with a polynomial distribution of eigenstrain [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2002, **69**(5): 593-601.
- [24] Nie G H, Guo L, Chan C K, Shin F G. Non-uniform eigenstrain induced stress field in an elliptic inhomogeneity embedded in orthotropic media with complex roots[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(10): 3575-3593.
- [25] Ma H, Kamiya N, Xu S Q. Complete polynomial expansion of domain variables at boundary for two-dimensional elasto-plastic problems[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 1998, **21**(3): 271-275.
- [26] Ma H, Qin Q H. Solving potential problems by a boundary-type meshless method—the boundary point method based on BIE[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2007, **31**(9): 749-761.
- [27] Ma H, Zhou J, Qin Q H. Boundary point method for linear elasticity using constant and quadratic moving elements[J]. *Advances in Engineering Software*, 2010, **41**(3): 480-488.

Two-Dimensional Polynomial Eigenstrain Formulation of Boundary Integral Equation With Numerical Verification

MA Hang¹, GUO Zhao², QIN Qing-hua³

(1. *Department of Mechanics, College of Sciences, Shanghai University,
Shanghai 200444, P. R. China;*

2. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China;*

3. *School of Engineering, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia)*

Abstract: The low-order polynomial distributed eigenstrain formulation of boundary integral equation (BIE) and the corresponding definition of Eshelby tensors were proposed for elliptical-shaped inhomogeneities in a two-dimensional elastic medium. Taking the results from traditional sub-domain boundary element method (BEM) as the control, effectiveness of the present algorithm was verified for an elastic medium with a single elliptical inhomogeneity. It is shown that, with the present computational model and algorithm, significant improvements are achieved in terms of efficiency as compared with the traditional BEM and in terms of accuracy as compared with the constant eigenstrain formulation of the BIE.

Key words: eigenstrain; Eshelby tensor; boundary integral equation; polynomial; inhomogeneity