

变厚度非均匀粘弹性复合圆柱体的旋转应力^{*}

A·M·任库尔^{1,2}

- (1. 阿卜杜勒阿齐兹国王大学 理学院 数学系,80203 邮箱,吉达 21589,沙特阿拉伯;
2. 卡夫拉-谢赫大学 理学院 数学系,卡夫拉-谢赫 35516,埃及)

摘要: 在平面应变的假设下,给出了两个复合弹性圆柱体旋转时的解析解.外柱是由厚度按公式变化的正交各向异性材料所组成,它包裹着一个等厚度纤维增强粘弹性均匀各向同性的实心圆柱体.外圆柱体的厚度和弹性性质按半径方向的幂函数变化.应用边界和连续条件,确定复合圆柱体旋转时的径向位移和应力,应用等效模量和 Illyushin 逼近法,得到问题的粘弹性解.讨论了各向异性、厚度变化、本构参数以及时间参数,对径向位移和应力的影响.

关键词: 旋转的复合圆柱体; 正交各向异性; 非均匀性; 变厚度; 纤维增强的粘弹性核心体

中图分类号: O343 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.04.011

引 言

几年来,旋转的纤维增强复合圆柱体受到越来越多的关注,机械工程中得到了普遍的应用,如高速旋转齿轮、飞轮、涡轮发动机和热压冷缩配合.等厚度均匀各向同性材料圆柱体弹性问题的解析解,可以容易地在众多标准的弹性理论书籍中找到^[1].但是,非均匀各向异性材料圆柱体弹性问题的解析解,在文献[2-3]中也能找到,比较而言要少许多.Liew 等^[4]研究了功能梯度空心圆柱体的热应力.Oral 和 Anlas^[5]对各向异性圆柱实体的应力分布,进行了连续非均匀性影响的分析.Tutuncu 在文献[6]中指出,厚壁圆柱体在内压力作用下,应力呈指数变化的特性.Chandrashekhara 和 Gopalakrishnan 在文献[7]中建立了双层长圆柱体:有一个正交各向异性的外壳和一个横观各向同性的核心体,在轴对称荷载作用下的弹性分析.Zenkour^[8]得到了旋转变厚度正交各向异性圆柱体,包裹着一个等厚度固体内核时的应力.最近,Zenkour^[9]分析研究了在内/外表面荷载作用下复合圆柱体的性能,圆柱体由许多轴向变厚度的均质板所组成.另外,Allam 等^[10]研究了变密度非均匀实/空心圆柱体的旋转问题.

在工程结构设计中,确定粘弹性圆柱体的应力,是一个十分重要的问题.Shinozuka 和 Spillers^[11]对一个增强的粘弹性薄圆筒,弹性增强物填充后,按轴对称问题求解.Ting 和 Tuan^[12]在一个粘弹性圆柱体中,引入改进了的数值方法,研究交变内压力对应力和温度分布的影响.Feng 等^[13]在拉伸和扭转荷载作用下,得到了粘弹性实圆柱体的有限变形解.Karnaikhov 和

* 收稿日期: 2010-05-02; 修订日期: 2010-11-25

作者简介: A. M. Zenkour, 教授(Tel: +92-51-90642172; E-mail: zenkour@sci.kfs.edu.eg).

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

Senchenkov^[14] 对一个粘弹性有限长圆柱体, 研究其轴向谐和变形时的热力学行为。

本文所研究的变厚度纤维增强粘弹性圆柱体的旋转响应, 尚不多见。许多学者^[15-16] 提出了纤维增强复合结构, 按准静态粘弹性问题方法求解。Allam 和 Appleby^[17] 应用现有的弹性解, 求解粘弹性板在单向弹性纤维增强下的弯曲问题。还有一些文献, 如文献[18], 纤维增强粘弹性板在均匀剪力作用下, 应用等效模量法确定圆孔/圆形夹杂物周围的应力集中。Allam 和 Zenkour^[19] 应用小参数法和等效模量法, 将纤维增强粘弹性拱桥, 按二次曲线变化模拟厚度, 得到均布荷载作用下的弯曲响应。在文献[20]中, 就纤维增强粘弹性弯曲板, 得到圆孔周围有填充物/没有填充物时的应力分布。最近, 同一作者^[21] 应用广义的 Illyushin 逼近法, 找到了旋转纤维增强粘弹性体和变厚度环形盘的闭式解。

本文将旋转的变厚度非均匀弹性圆柱体, 包裹着一个纤维增强的等厚度粘弹性内核进行分析研究。外圆柱体的厚度和弹性性质是半径坐标的函数, 导出其二阶的控制微分方程, 并在常规条件下用超几何函数求解。得到旋转的非均匀、正交各向异性、变厚度圆柱体, 包裹着等厚度各向同性粘弹性内核时的精确解。对粘弹性问题, 应用 Illyushin 逼近法求解相应弹性问题的解, 给出了径向位移和应力的数值结果。对一些参数的影响加以讨论, 并得出相应的结论。

1 问题的公式化表示

所研究的结构由内圆柱体和外圆柱体组成。外柱是变厚度的弹性空心圆柱体, 内柱为等厚度的粘弹性实心圆柱体。首先假定, 弹性圆柱体是由非均匀正交各向异性材料组成, 并沿自身轴线旋转而成。选择柱面坐标系 (r, θ, z) , 使得轴向坐标 z 为旋转轴, r 为径向坐标。假定圆柱体关于 z 轴对称, 仅有与环向坐标 θ 无关的径向位移 u 。其次假定, 垂直于 z 轴的平面为平面应变问题, u 仅仅是 r 的函数。正交各向异性圆柱体的应力分量给出如下:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = c_{11}(r) \frac{du}{dr} + c_{12}(r) \frac{u}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta} = c_{12}(r) \frac{du}{dr} + c_{22}(r) \frac{u}{r}, \\ \sigma_{zz} = c_{13}(r) \frac{du}{dr} + c_{23}(r) \frac{u}{r}, \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, c_{ij} 为弹性特征系数。假定弹性特征系数沿圆柱体厚度, 即半径方向按指数规律变化:

$$P(r) = P_0 \left(1 - \frac{r-a}{b} \right)^{\eta_p}, \quad (2)$$

其中, a 和 b 分别为外圆柱体的内径和外径。现假定, 圆柱体厚度 h 按上面的公式变化, $P_0 = h_0$ 为圆柱体轴向的厚度, $\eta_p = n$ 为几何参数, 参数 n 决定了厚度曲线的形状。本文就 $a = 0.4b$, 无量纲厚度 h/h_0 为无量纲半径 r/b 的函数, 讨论 3 组不同数值的几何参数 n , 见图 1。图 1(a) 中 n 为负值, 厚度曲线呈凸形, 图 1(b) ~ (c) 中 n 为正值, 厚度曲线呈凹形。特别使 $n = 0$, 得到等厚度的圆柱体。另外, 非均匀材料的弹性特征系数 c_{ij} 由方程(1) 给出, $P_0 = \alpha_{ij}$ 对应于均匀材料时的 c_{ij} 值, $\eta_p = m$ 为有理数, n 和 m 的值不受任何限制, 即它们可以有相同的数值。

旋转圆柱体厚度变化的影响, 可以在它们的平衡方程中加以考虑, 只要它们满足平面应变的假设, 变厚度圆柱体理论可以和等厚度圆柱体理论一样, 得到极好的结果。考虑了该因素的影响后, 变厚度旋转圆柱体的平衡方程能够写成^[8-9]

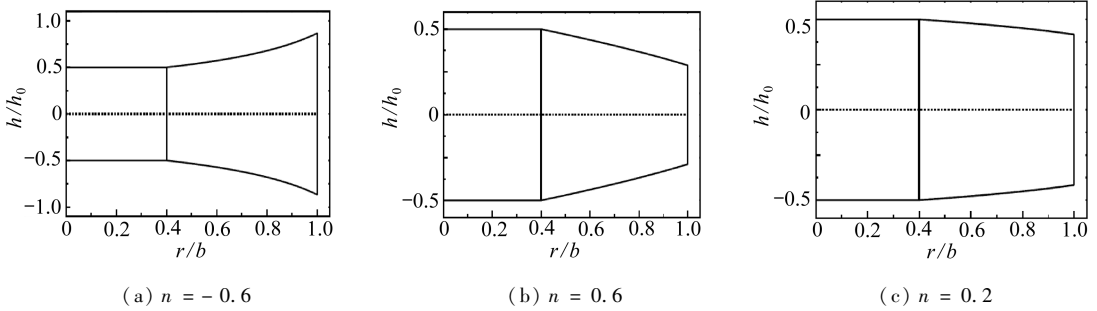


图1 变厚度复合圆柱体,其中内圆柱体是等厚度的
Fig.1 Variable-thickness cylinder with uniform-thickness core

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_{rr}) - h\sigma_{\theta\theta} + h\rho\Omega^2 r^2 = 0, \quad (3)$$

其中, Ω 是角速度,为常数, ρ 为圆柱体材料的密度. 下面详细地给出弹性问题的解析解,然后研究粘弹性问题的解.

2 弹性解和粘弹性解

本节将对两个圆柱体:外圆柱体为变厚度非均匀正交各向异性空心圆柱体,内圆柱体为等厚度各向同性粘弹性实心圆柱体,得到其弹性解和粘弹性解.

2.1 外圆柱体

将方程(1)代入方程(3),对于弹性特性和圆柱曲线可借助于方程(2),可以得到径向位移 $u(r)$ 的超几何微分方程如下:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \left[1 - (n+m) \left(\frac{r}{a+b-r} \right) \right] \frac{du}{dr} - \left[\lambda^2 + \mu(n+m) \left(\frac{r}{a+b-r} \right) \right] u + \frac{\rho\Omega^2 r^3}{\alpha_{11}} \left(\frac{b}{a+b-r} \right)^m = 0, \quad (4)$$

其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}}}, \quad \mu = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}. \quad (5)$$

上述方程被称为 Gauss 超几何微分方程,有一个正则奇点 $r = 0$, 根据 Frobenius 法,求得其通解:

$$u(r) = C_1 P(r) + C_2 Q(r) + R(r), \quad (6)$$

其中, C_1 和 C_2 为任意的积分常数,又

$$\begin{cases} P(r) = r^\lambda M\left(i, j, \delta, \frac{r}{a+b}\right), \\ Q(r) = r^{-\lambda} M\left(i - \delta + 1, j - \delta + 1, 2 - \delta, \frac{r}{a+b}\right), \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} i = \lambda + \frac{n+m-\ell}{2}, j = i + \ell, \delta = 1 + 2\lambda, \\ \ell = \sqrt{(n+m)^2 + 4[\lambda^2 - \mu(n+m)]}. \end{cases} \quad (8)$$

注意到, $M(\xi, \eta, \zeta, z)$ 为广义超几何函数,定义^[22]如下:

$$M(\xi, \eta, \zeta, z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\xi \eta z^q}{\zeta q!}, \quad z = \frac{r}{a+b}, \quad (9)$$

其中, ξ_q 为 Pochhammer 符号, 由下式给出:

$$\xi_q = \xi(\xi+1)(\xi+2)\cdots(\xi+q-1) = \frac{\Gamma(\xi+q)}{\Gamma(\xi)}, \quad (10)$$

这里, Γ 表示 Gamma 函数. 注意到当 $|z| < 1$ 时, 对于上部参数 ξ 和 η 的实数值, 以及对于下部参数 ζ 的非零实数值, 广义超几何函数 $M(\xi, \eta, \zeta, z)$ 是收敛的. 方程(6) 的特解 $R(r)$ 可以用参数变异法求得:

$$R(r) = Q(r) \int_0^r \frac{P(\phi)f(\phi)}{\Delta(\phi)} d\phi - P(r) \int_0^r \frac{Q(\phi)f(\phi)}{\Delta(\phi)} d\phi, \quad (11)$$

其中

$$f(r) = -\frac{\rho\Omega^2 r}{\alpha_{11}} \left(\frac{b}{a+b-r} \right)^m, \quad (12)$$

又, $\Delta(r)$ 为 Wronskian 式, 由下式给出:

$$\Delta(r) = P(r) \frac{dQ(r)}{dr} - Q(r) \frac{dP(r)}{dr}. \quad (13)$$

将方程(6)代入方程(1), 得到旋转变厚度非均匀正交各向异性空心圆柱体的径向、环向及轴向的应力分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \left(1 - \frac{r-a}{b}\right)^m \left\{ C_1 \left(\alpha_{11} \frac{dP(r)}{dr} + \alpha_{12} \frac{P(r)}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. C_2 \left(\alpha_{11} \frac{dQ(r)}{dr} + \alpha_{12} \frac{Q(r)}{r} \right) + \alpha_{11} \frac{dR(r)}{dr} + \alpha_{12} \frac{R(r)}{r} \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= \left(1 - \frac{r-a}{b}\right)^m \left\{ C_1 \left(\alpha_{12} \frac{dP(r)}{dr} + \alpha_{22} \frac{P(r)}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. C_2 \left(\alpha_{12} \frac{dQ(r)}{dr} + \alpha_{22} \frac{Q(r)}{r} \right) + \alpha_{12} \frac{dR(r)}{dr} + \alpha_{22} \frac{R(r)}{r} \right\}, \\ \sigma_{zz}(r) &= \left(1 - \frac{r-a}{b}\right)^m \left\{ C_1 \left(\alpha_{13} \frac{dP(r)}{dr} + \alpha_{23} \frac{P(r)}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. C_2 \left(\alpha_{13} \frac{dQ(r)}{dr} + \alpha_{23} \frac{Q(r)}{r} \right) + \alpha_{13} \frac{dR(r)}{dr} + \alpha_{23} \frac{R(r)}{r} \right\}, \end{aligned} \right. \quad (14a \sim c)$$

这里, 在求 P, Q 和 R 的导数时, 要用到下面的求导公式:

$$\frac{d}{dr} M(\xi, \eta, \zeta, z) = \frac{\xi\eta}{\zeta} M(\xi+1, \eta+1, \zeta+1, z) \frac{dz}{dr}. \quad (15)$$

正如文献[23], 正交各向异性圆柱体的弹性分量 α_{ij} , 可以根据工程特征值表达为

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{E_r(1 - \nu_{\theta z} \nu_{z\theta})}{\Delta}, \quad \alpha_{22} = \frac{E_{\theta}(1 - \nu_{rz} \nu_{rz})}{\Delta}, \\ \alpha_{12} &= \frac{E_r(\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{rz})}{\Delta} = \frac{E_{\theta}(\nu_{r\theta} + \nu_{z\theta} \nu_{rz})}{\Delta}, \\ \alpha_{13} &= \frac{E_r(\nu_{rz} + \nu_{\theta r} \nu_{z\theta})}{\Delta} = \frac{E_z(\nu_{rz} + \nu_{r\theta} \nu_{\theta z})}{\Delta}, \\ \alpha_{23} &= \frac{E_{\theta}(\nu_{z\theta} + \nu_{r\theta} \nu_{rz})}{\Delta} = \frac{E_z(\nu_{\theta z} + \nu_{\theta r} \nu_{rz})}{\Delta}, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

在这里

$$\Delta = 1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r} - \nu_{zr}\nu_{rz} - \nu_{\theta z}\nu_{z\theta} - 2\nu_{\theta r}\nu_{z\theta}\nu_{rz}, \quad (17)$$

其中, E_i 为弹性模量, ν_{ij} 为 Poisson 比, 它们满足下面的倒数关系:

$$\frac{\nu_{\theta r}}{E_{\theta}} = \frac{\nu_{r\theta}}{E_r}, \quad \frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{\nu_{rz}}{E_r}, \quad \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} = \frac{\nu_{\theta z}}{E_{\theta}}. \quad (18)$$

2.2 内圆柱体

对于等厚度的均匀圆柱体 ($n = 0, m = 0$), 有 $h(r) = h_0, c_{ij} = \alpha_{ij}$. 另外, 对于各向同性圆柱体, 有

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (19)$$

利用上述公式, 各向同性圆柱体的应力分量可以写成

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{du}{dr} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{u}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{du}{dr} + \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{u}{r}, \\ \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{du}{dr} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{u}{r}, \end{cases} \quad (20)$$

而方程(4)变为

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \rho \Omega^2 r^3 = 0. \quad (21)$$

上述二阶微分方程的通解容易得到

$$u(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{8E(1 - \nu)} \rho \Omega^2 r^3, \quad (22)$$

其中, C_3 和 C_4 为任意的积分常数. 将方程(22)代入方程(20), 得到旋转等厚度均匀各向同性圆柱体的径向、环向及轴向应力:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{C_3}{1 - 2\nu} - \frac{C_4}{r^2} \right] - \frac{3 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \rho \Omega^2 r^2, \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{C_3}{1 - 2\nu} + \frac{C_4}{r^2} \right] - \frac{1 + 2\nu}{8(1 - \nu)} \rho \Omega^2 r^2, \\ \sigma_{zz}(r) = \frac{2E\nu}{1 + \nu} \left[\frac{C_3}{1 - 2\nu} - \frac{1 + \nu}{4E(1 - \nu)} \rho \Omega^2 r^2 \right], \end{cases} \quad (23a \sim c)$$

这就是著名的旋转等厚度圆柱体的解(参见文献[1]). 值得注意的是, 对于实心的圆柱体, 常数 C_4 必须等于 0, 否则当 $r = 0$ 时, 径向位移和应力变为无穷大. 另外, 前面弹性解中其他的积分常数 $C_i (i = 1, 2, 3)$, 利用边界和连续性条件确定(在第 3 节中叙述).

现在考虑一个由 2 种材料复合的实心圆柱体, 第 1 种为粘弹性材料, 单向增强的弹性纤维作为第 2 种材料. 第 1 种材料起填充物的作用, 呈现线性粘弹性材料的特性, 由粘弹性模量 E_f 和 Poisson 比 ν_f 来表示. 另一种材料作为增强材料, 它是一种用弹性模量 E_e 和 Poisson 比 ν_e 来表示的弹性材料. 注意到, 粘弹性模量由文献[16, 24]给出如下:

$$E_f = \frac{9K\omega}{2 + \omega}, \quad (24)$$

其中, K 为体积压缩系数(又称体积模量), 并假定不出现松弛, 即 $K = \text{const}$, 而 ω 为松弛函数的无量纲核, 它与相应的 Poisson 比间有下面的公式^[16, 24]关系:

$$\omega = \frac{1 - 2\nu_f}{1 + \nu_f}. \quad (25)$$

基于上述考虑,并利用等效模量的方法^[16,24],给出如下弹性模量和 Poisson 比:

$$\begin{cases} E = \gamma E_e + (1 - \gamma) E_f = E_e \left[\gamma + \frac{9(1 - \gamma)p\omega}{2 + \omega} \right], \\ \nu = \gamma\nu_e + (1 - \gamma)\nu_f = \gamma\nu_e + \frac{(1 - \gamma)(1 - \omega)}{2 + \omega}, \end{cases} \quad (26)$$

其中, $p = K/E_e$ 为本构参数, γ 为增强纤维的体积分数. 借助方程(26)给出的表达式,可以将方程(22)和(23)给出的解改写为

$$\begin{cases} u^* = \bar{\Omega}^2 u(r, \omega), \sigma_{rr}^* = \hat{\Omega}^2 \sigma_{rr}(r, \omega), \bar{\Omega}^2 = \frac{\hat{\Omega}^2}{E_e}, \\ \sigma_{\theta\theta}^* = \hat{\Omega}^2 \sigma_{\theta\theta}(r, \omega), \sigma_{zz}^* = \hat{\Omega}^2 \sigma_{zz}(r, \omega), \hat{\Omega}^2 = \rho \Omega^2. \end{cases} \quad (27)$$

在弹性材料中,径向位移和应力是 r 和 ω 的函数,而在粘弹性材料中,径向位移和应力是时间 t 和 r 的算子函数. 根据 Illyushin 逼近法^[16,24-25],函数 u 可以表示为

$$u(r, \omega) = \sum_{i=1}^4 A_i(r) \Phi_i(\omega), \quad (28)$$

其中, $\Phi_i(\omega)$ 是一些已知的核,以核 ω 为基础构成,可以如下选取:

$$\Phi_1 = 1, \Phi_2 = \omega, \Phi_3 = \pi = \frac{1}{\omega}, \Phi_4 = g_{\beta_1} = \frac{1}{1 + \omega/2}. \quad (29)$$

系数 $A_i(r)$ 通过代数方程组来确定:

$$\sum_{j=1}^4 L_{ij} A_j = B_i \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (30)$$

其中

$$L_{ij} = \int_0^1 \Phi_i \Phi_j d\omega, \quad B_i = \int_0^1 \Phi_i u(r, \omega) d\omega. \quad (31)$$

现在来考虑指数形式的松弛函数:

$$\omega(t) = c_1 + c_2 e^{-\alpha t}, \quad (32)$$

其中, c_1 和 c_2 为常数,由实验方法确定. 应用 Laplace-Carson 变换,确定函数 $\pi(t)$ 和 $g_{\beta_1}(t)$. 用 $\pi^*(s)$ 和 $g_{\beta_1}^*(s)$ 表示 $\pi(t)$ 和 $g_{\beta_1}(t)$ (参见文献[26]),所以 $\omega(t)$ 变换为

$$\omega^*(s) = c_1 + \frac{sc_2}{s + \alpha}, \quad (33)$$

于是,得到(详见文献[26])

$$\begin{cases} \pi(t) = \frac{1}{c_1} \left[1 - \frac{c_2}{c_1 + c_2} e^{-c_1 \tau / (c_1 + c_2)} \right] \quad (\tau = \alpha t), \\ g_{\beta_1}(t) = \frac{2}{2 + c_1} \left[1 - \frac{c_2}{2 + c_1 + c_2} e^{-(2+c_1)\tau / (2+c_1+c_2)} \right]. \end{cases} \quad (34)$$

表示粘弹性材料径向位移的方程(28),可以作为 r 和时间 t 的函数,得到其显式公式:

$$\begin{aligned} u(r, t) = & A_1(r) \bar{\Omega}^2(t) + A_2(r) \int_0^t \omega(t - \tau) d\bar{\Omega}^2(\tau) + \\ & A_3(r) \int_0^t \pi(t - \tau) d\bar{\Omega}^2(\tau) + A_4(r) \int_0^t g_{\beta_1}(t - \tau) d\bar{\Omega}^2(\tau). \end{aligned} \quad (35)$$

取 $\bar{\Omega}^2(t) = \bar{\Omega}_0^2 H(t)$, 其中 $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数,如下所示:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (36)$$

则方程(35)可以变为下面形式:

$$u(r, t) = \bar{\Omega}_0^2 \{ A_1 H(t) + A_2 \omega(t) + A_3 \pi(t) + A_4 g_{\beta_1}(t) \}, \quad (37)$$

其中, $\omega(t)$, $\pi(t)$ 和 $g_{\beta_1}(t)$ 由方程(32)和(34)给出. 将 $\sigma_{rr}(r, t)$, $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ 或 $\sigma_{zz}(r, t)$ 取代 $u(r, t)$, 并作适当的改变, 再一次应用如上的方法, 便可以得到旋转纤维增强、粘弹性各向同性、等厚度实心圆柱体的径向、环向和轴向应力.

3 旋转的复合圆柱体

本节考虑双层复合的圆柱体, 以一个常角速度 Ω 绕其自身轴旋转. 外圆柱体已在 2.1 节中讨论, 内圆柱体在 2.2 节也已讨论. 记区域 $0 \leq r \leq a$ 为区域 I, 区域 $a \leq r \leq b$ 为区域 II. 应用外表面的边界条件, 以及两个圆柱体之间的界面条件, 可以得到这种结构的解. 在复合圆柱体的界面($r = a$)上, 径向应力和位移是连续的, 而在外圆柱体的外表面($r = b$)上, 仅仅不出现径向应力. 界面连续条件可以表示为

$$r = a \text{ 时, } u^I(r) = u^{II}(r), \sigma_r^I(r) = \sigma_r^{II}(r). \quad (38)$$

另一方面, 当外圆柱体的外表面自由时, 即没有牵引力作用时, 边界条件为

$$r = b \text{ 时, } \sigma_r^{II}(r) = 0. \quad (39)$$

由方程(38)、(6)、(14a)、(22)和(23a), 能够很容易得到常数 C_1 , C_2 和 C_3 . 再由方程(6)和(14), 能够计算出区域 II ($a \leq r \leq b$) 中的径向位移和应力. 此外由方程(22)和(23), 计算出区域 I ($0 \leq r \leq a$) 中的径向位移和应力.

4 数值举例及其讨论

本节对所研究的复合圆柱体, 列举一些数值例子, 完成径向位移和应力的数值计算, 采用下面的无量纲形式:

表 1 复合圆柱体半径方向上的径向位移 u_r

Table 1 Radial displacement u_r through the radial direction of the composite cylinder

\bar{r}	n						
	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
inner cylinder	0.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	0.1	0.068 646	0.064 830	0.061 246	0.057 891	0.054 758	0.051 840
	0.2	0.135 721	0.128 088	0.120 921	0.114 211	0.107 945	0.102 109
	0.3	0.199 654	0.188 204	0.177 453	0.167 388	0.157 990	0.149 235
	0.4	0.258 872	0.243 606	0.229 271	0.215 851	0.203 320	0.191 647
outer cylinder	0.4	0.258 872	0.243 606	0.229 271	0.215 851	0.203 320	0.191 647
	0.5	0.259 517	0.244 212	0.229 841	0.216 385	0.203 821	0.192 116
	0.6	0.260 215	0.244 885	0.230 487	0.217 005	0.204 414	0.192 684
	0.7	0.260 809	0.245 469	0.231 060	0.217 566	0.204 962	0.193 217
	0.8	0.261 205	0.245 871	0.231 466	0.217 974	0.205 370	0.193 624
	0.9	0.261 339	0.246 023	0.231 634	0.218 156	0.205 565	0.193 829
1.0	0.261 161	0.245 867	0.231 499	0.218 040	0.205 466	0.193 747	

$$u_r = \frac{u}{\hat{\Omega}_0^2}, \sigma_r = \frac{\sigma_{rr}}{\hat{\Omega}_0^2}, \sigma_\theta = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\hat{\Omega}_0^2}, \sigma_z = \frac{\sigma_{zz}}{\hat{\Omega}_0^2}.$$

当 $a = 0.4b$, $n = \pm 0.6$ 和 0.2 时, 给出相应的数值结果. 在下面的数值例子中, 将给出圆柱体的弹性特征系数、厚度参数、本构参数和时间参数, 对径向位移和应力的影响. 我们取

$$E_r = 25 \times 10^6 \text{ psi} (145 \text{ psi} = 1 \text{ MPa}), E_\theta = E_z = 10^6 \text{ psi}, \nu_{r\theta} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} = 0.25,$$

并对 m 取不同的数值, 举例说明非均匀性和正交各向异性的影响. 计算时取参数:

$$\nu_e = 0.3, \gamma = c_1 = 0.1, c_2 = 0.9, \omega = 0.5.$$

另外, 除非另有说明, 其他参数取 $p = 0.2$, $m = 0.25$, 系数 α 尚为未知, 时间参数 $\tau (\equiv \alpha t)$ 在项中给定.

表2 复合圆柱体半径方向上的径向应力 σ_r

Table 2 Radial stress σ_r through the radial direction of the composite cylinder

	\bar{r}	n						
		-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
inner cylinder	0.0	0.416 063	0.393 005	0.371 354	0.351 083	0.332 156	0.314 525	0.298 135
	0.1	0.412 236	0.389 178	0.367 526	0.347 256	0.328 329	0.310 698	0.294 308
	0.2	0.399 989	0.376 931	0.355 280	0.335 009	0.316 082	0.298 451	0.282 061
	0.3	0.379 578	0.356 519	0.334 868	0.314 598	0.295 671	0.278 040	0.261 650
	0.4	0.351 002	0.327 943	0.306 292	0.286 022	0.267 095	0.249 464	0.233 074
outer cylinder	0.4	0.351 002	0.327 943	0.306 292	0.286 022	0.267 095	0.249 464	0.233 074
	0.5	0.342 890	0.324 665	0.307 201	0.290 529	0.274 667	0.259 624	0.245 395
	0.6	0.296 012	0.283 608	0.271 462	0.259 628	0.248 146	0.237 052	0.226 371
	0.7	0.231 113	0.224 116	0.217 070	0.210 023	0.203 016	0.196 088	0.189 271
	0.8	0.157 118	0.154 387	0.151 498	0.148 477	0.145 352	0.142 148	0.138 889
	0.9	0.078 853	0.078 675	0.078 388	0.078 000	0.077 518	0.076 953	0.076 312
	1.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000

表3 复合圆柱体半径方向上的径向应力 σ_θ

Table 3 Circumferential stress σ_θ through the radial direction of the composite cylinder

	\bar{r}	n						
		-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
inner cylinder	0.0	0.416 178	0.393 119	0.371 468	0.351 198	0.332 271	0.314 640	0.298 250
	0.1	0.414 071	0.391 013	0.369 362	0.349 092	0.330 164	0.312 533	0.296 144
	0.2	0.407 331	0.384 272	0.362 621	0.342 351	0.323 424	0.305 793	0.289 403
	0.3	0.396 097	0.373 038	0.351 387	0.331 117	0.312 190	0.294 559	0.278 169
	0.4	0.380 369	0.357 310	0.335 659	0.315 389	0.296 462	0.278 831	0.262 441
outer cylinder	0.4	0.695 007	0.653 990	0.615 475	0.579 417	0.545 748	0.514 385	0.485 230
	0.5	0.543 816	0.511 772	0.481 677	0.453 496	0.427 176	0.402 654	0.379 855
	0.6	0.441 452	0.415 511	0.391 142	0.368 317	0.346 994	0.327 123	0.308 644
	0.7	0.366 601	0.345 127	0.324 950	0.306 047	0.288 386	0.271 923	0.256 610
	0.8	0.308 614	0.290 584	0.273 642	0.257 769	0.242 937	0.229 110	0.216 248
	0.9	0.261 506	0.246 240	0.231 896	0.218 459	0.205 903	0.194 199	0.183 313
	1.0	0.221 540	0.208 566	0.196 378	0.184 961	0.174 295	0.164 353	0.155 107

本文的研究结果由表1~4给出, 并绘于图2~5. 表1就幂律参数 n 取不同数值时, 给出了

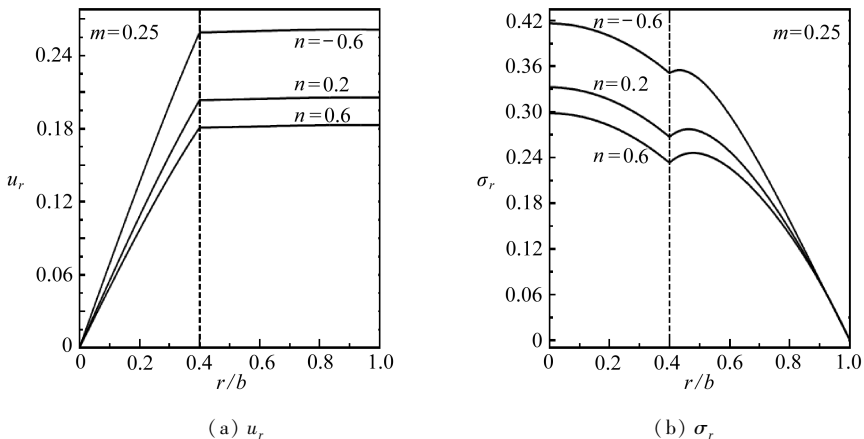
旋转厚度复合圆柱体无量纲的径向位移 u_r 。类似地,表2~4分别给出了无量纲的径向应力 σ_r 、环向应力 σ_θ 和轴向应力 σ_z 。表格显示,对给定的 $\bar{r} (\equiv r/b)$,随着参数 n 的减小,上述结果都是增加的。但是,对于参数 n 的一个固定值,径向位移 u_r 随着 \bar{r} 的增加,在内圆柱体中快速增大,而在外圆柱体中缓慢增大。应力变化就完全不一样,随着 \bar{r} 的增加,应力在内圆柱体中缓慢减少,而在外圆柱体中快速减少。

表4 复合圆柱体半径方向上的径向应力 σ_z Table 4 Axial stress σ_z through the radial direction of the composite cylinder

\bar{r}	n							
	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	
inner cylinder	0.0	0.174 770	0.165 086	0.155 992	0.147 479	0.139 529	0.132 124	0.125 241
	0.1	0.173 524	0.163 840	0.154 746	0.146 233	0.138 283	0.130 878	0.123 995
	0.2	0.169 537	0.159 852	0.150 759	0.142 245	0.134 296	0.126 891	0.120 007
	0.3	0.162 891	0.153 207	0.144 113	0.135 600	0.127 650	0.120 245	0.113 362
	0.4	0.153 587	0.143 903	0.134 810	0.126 296	0.118 347	0.110 942	0.104 058
outer cylinder	0.4	0.177 261	0.166 776	0.156 931	0.147 714	0.139 108	0.131 090	0.123 638
	0.5	0.139 382	0.131 189	0.123 491	0.116 279	0.109 540	0.103 259	0.097 417
	0.6	0.113 323	0.106 713	0.100 500	0.094 675	0.089 230	0.084 151	0.079 424
	0.7	0.093 961	0.088 522	0.083 408	0.078 612	0.074 126	0.069 941	0.066 045
	0.8	0.078 724	0.074 189	0.069 925	0.065 927	0.062 187	0.058 699	0.055 450
	0.9	0.066 165	0.062 346	0.058 758	0.055 394	0.052 251	0.049 319	0.046 591
1.0	0.055 385	0.052 141	0.049 094	0.046 240	0.043 573	0.041 088	0.038 776	

图2就 $m = 0.25$, n 取不同数值时,给出了旋转复合圆柱体无量纲的径向位移和应力在半径方向上的分布。图3就 $n = -0.6$, m 取不同数值时,显示了无量纲径向位移和应力在半径方向上的分布。此外,图4就 $n = m = 0.6$, 本构参数 p 取不同数值时,绘出了无量纲径向位移和应力在半径方向上的分布。由图2~4可以看出,无量纲径向位移在内圆柱体沿半径方向线性地增大,并在界面上达到最大值,而在外圆柱体的半径方向上始终保持不变。

径向应力 σ_r 在内圆柱体沿半径方向上逐渐减小,并在界面上达到最小,然后单调地增大,并在外圆柱体界面附近达到最大,然后快速地减小直至为0,和外圆柱体外表面的边界条件相一致。在图4(b)中,当 $p = 0.5$ 和 $p = 1.0$ 时,从 $\bar{r} = 0$ 到 $\bar{r} = 1$, σ_r 一直是减小的。



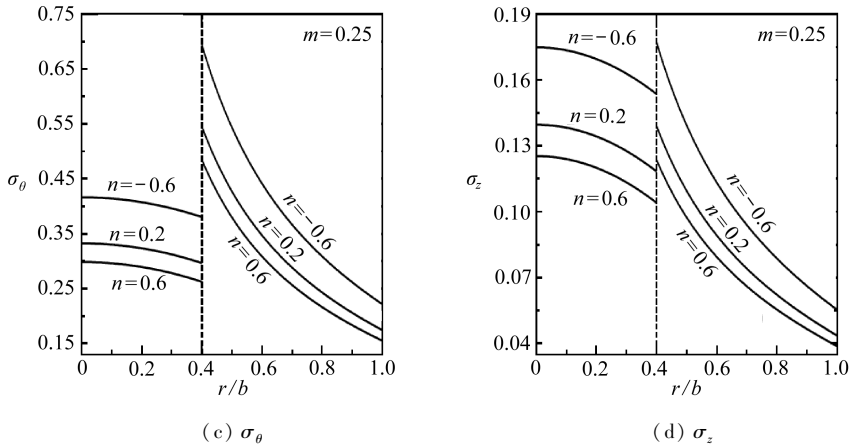


图2 复合圆柱体无量纲位移和应力随 r/b 的变化

Fig.2 Dimensionless displacement and stresses versus r/b of the composite cylinder

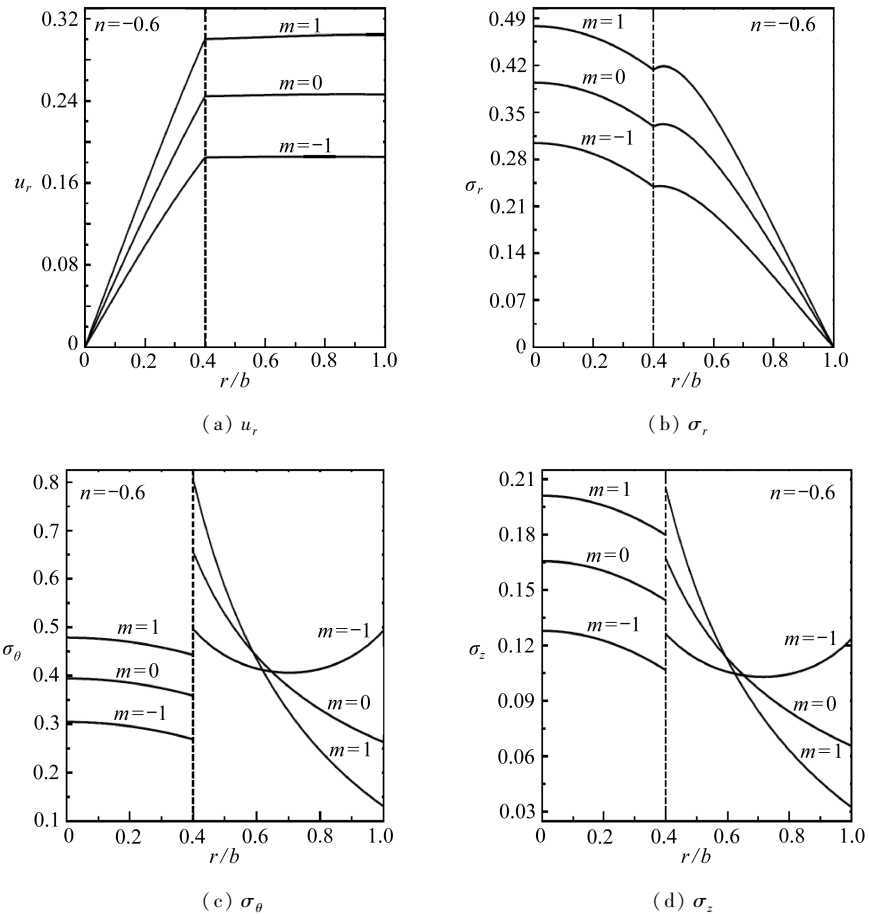


图3 m 取不同数值时,复合圆柱体半径方向上无量纲位移和应力的变化

Fig.3 Dimensionless displacement and stresses through the radial direction of the composite cylinder for various values of m

但是,图2(c)~(d)显示,较大的 n ,无量纲的环向应力 σ_θ 和轴向应力 σ_z 反而较小.图3(c)~(d)显示,在内圆柱体和界面附近, σ_θ 和 σ_z 随着 m 的增大而增大,而在外圆柱体外表面

附近正好相反.图4(c)~(d)显示, σ_θ 和 σ_z 在内圆柱体中随着 p 的增大而增大, 而在外圆柱体中随着 p 的增大而减小. 此外, σ_θ 和 σ_z 在内圆柱体中沿半径方向缓慢减小, 而在外圆柱体中沿半径方向快速减小.

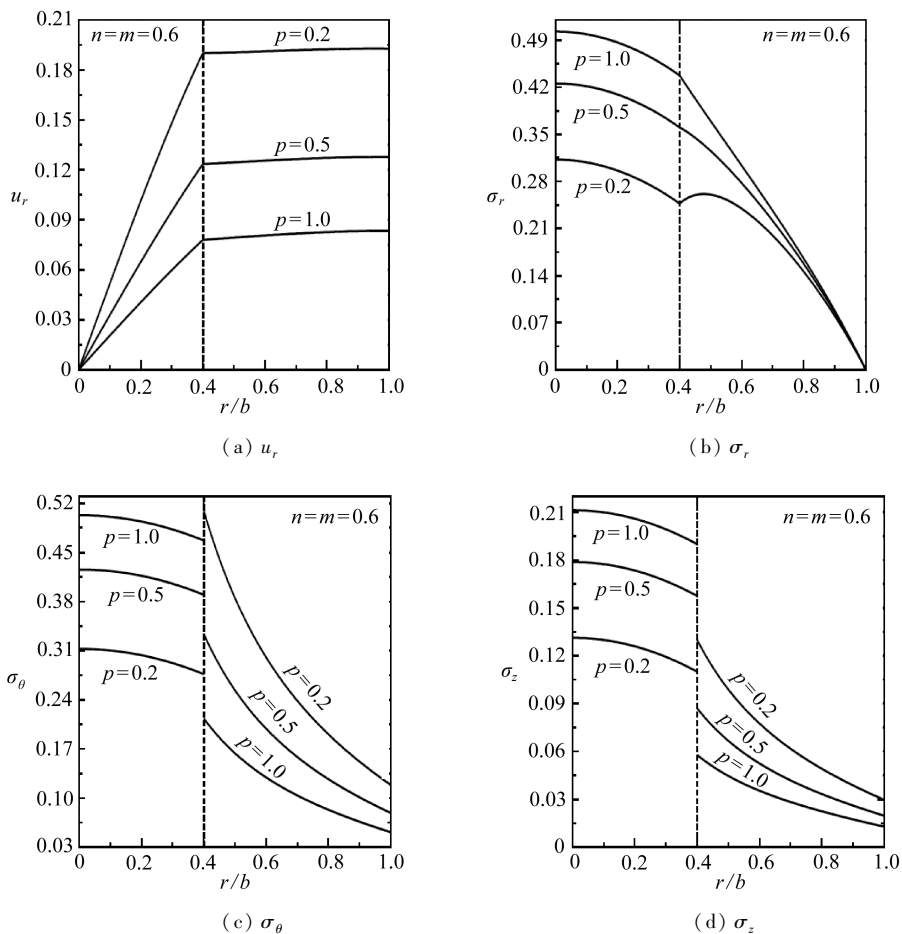
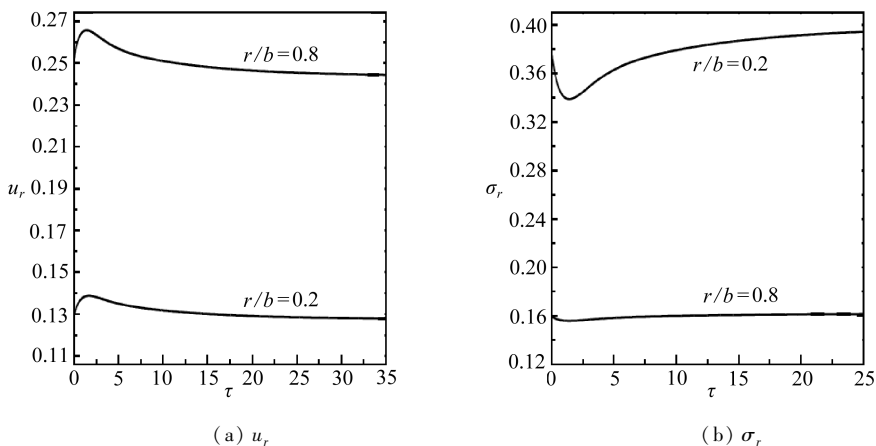


图4 本构参数 p 取不同数值时, 复合圆柱体无量纲位移和应力随 r/b 的变化

Fig. 4 Dimensionless displacement and stresses versus r/b of the composite cylinder for different values of the constitutive parameter p



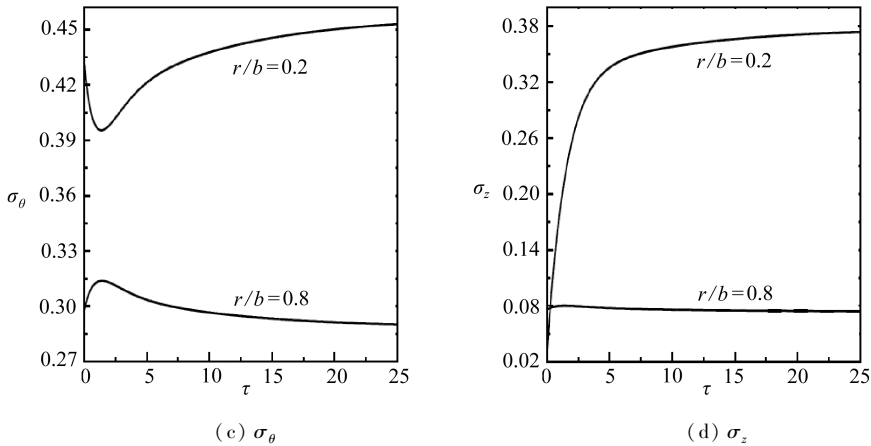


图5 当 $\bar{r} = 0.2$ 和 $\bar{r} = 0.8$ 时,复合圆柱体无量纲位移和应力随时间参数 τ 的变化

Fig.5 Dimensionless displacement and stresses versus the time parameter τ at two positions in the composite cylinder

最后,图5给出了时间参数 τ ,对旋转变厚度复合圆柱体无量纲位移和应力的影响.取几何参数 $n = -0.6$ 和 $m = 0.25$,选择两个位置:一点在 $\bar{r} = 0.2$ 的内圆柱体中,另一点在 $\bar{r} = 0.8$ 的外圆柱体中.显然在这两点上,无量纲径向位移 u_r 是逐渐增大的,分别在 $\tau \approx 2$ 和 1.25 时达到最大,然后逐渐减小,分别在 $\tau \geq 33$ 和 27 后保持不变.又当 $\bar{r} = 0.2$ 时, σ_r 和 σ_θ 同时在 $\tau \approx 1.5$ 处出现最小值,然后 σ_r 和 σ_θ 逐渐增大,并在 $\tau \geq 24$ 后接近为常数.另外,无量纲轴向应力 σ_z ,随着时间参数 τ 的增大而快速增大,在 $\tau \geq 236$ 后为常数.当 $\bar{r} = 0.8$ 时, σ_θ 在 $\tau \approx 1.5$ 时达到最大值,然后在 $1.5 < \tau < 22$ 区域时, σ_θ 缓慢减小,在 $\tau \geq 22$ 后保持不变.但是,无量纲径向和轴向应力在时间参数 τ 分别大于 5 和 4 后就保持不变.

5 结 论

本文研究了内圆柱体为等厚度各向同性弹性柱,被纤维增强的变厚度正交各向异性圆柱体包裹时的旋转问题.应用超几何函数解析地求解弹性问题,为此采用级数解.应用等效模量法和 Illyushin 逼近法求解粘弹性问题.从而求得等厚度粘弹性均匀核心体,和变厚度非均匀弹性圆柱体复合时的旋转解析解.对不同的超几何参数、厚度参数和本构参数,列表和图示其数值结果.还研究了时间参数对径向位移和应力的影响.

参考文献:

- [1] Landau L D, Lifshitz E M. *Theory of Elasticity*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1986.
- [2] Senitskii Y E. Stress state of a rotating inhomogeneous anisotropic cylinder of variable density [J]. *Prikl Mekhan*, 1992, **28**(5): 28-35.
- [3] Vasilenko A T, Sudavtsova G K. Elastic equilibrium of circumferentially inhomogeneous orthotropic cylindrical shells of arbitrary thickness [J]. *Int Appl Mech*, 2001, **37**(8): 1046-1054.
- [4] Liew K M, Kitipornchai S, Zhang X Z, Lim C W. Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders [J]. *Int J Solids Struct*, 2003, **40**(10): 2355-2380.
- [5] Oral A, Anlas G. Effects of radially varying moduli on stress distribution of nonhomogeneous

- anisotropic cylindrical bodies[J]. *Int J Solids Struct*, 2005, **42**(20): 5568-5588.
- [6] Tutuncu N. Stresses in thick-walled FGM cylinder with exponentially-varying properties[J]. *Eng Struct*, 2007, **29**(9): 2032-2035.
- [7] Chandrashekhara K, Gopalakrishnan P. Analysis of an orthotropic cylindrical shell having a transversely isotropic core subjected to axisymmetric load[J]. *Thin-Walled Struct*, 1986, **4**(3): 223-237.
- [8] Zenkour A M. Rotating variable-thickness orthotropic cylinder containing a solid core of uniform-thickness[J]. *Arch Appl Mech*, 2006, **76**(1/2): 89-102.
- [9] Zenkour A M. Stresses in cross-ply laminated circular cylinders of axially variable thickness [J]. *Acta Mech*, 2006, **187**(1): 85-102.
- [10] Allam M N M, Zenkour A M, Elazab E R. On the rotating inhomogeneous elastic cylinders of variable-thickness and density[J]. *J Appl Math Infor Sci*, 2008; **2**(3): 237-257.
- [11] Shinozuka M, Spillers W R. Axisymmetric reinforced viscoelastic cylindrical shell[J]. *Int J Mech Sci*, 1966, **8**(1): 1-12.
- [12] Ting E C, Tuan J L. Effect of cyclic internal pressure on the temperature distribution in a viscoelastic cylinder[J]. *Int J Mech Sci*, 1973, **15**(11): 861-871.
- [13] Feng W W, Hung T, Chang G. Extension and torsion of hyperviscoelastic cylinders[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1992, **27**(3): 329-335.
- [14] Karnaukhov V G, Senchenkov I K. Thermomechanical behavior of a viscoelastic finite circular cylinder under harmonic deformations[J]. *J Eng Math*, 2003, **46**(3/4): 299-312.
- [15] Bland D. *The Linear Theory of Viscoelasticity*[M]. New York: Pergamon Press, 1960.
- [16] Ilyushin A A, Pobedria B E. *Foundations of Mathematical Theory of Thermo Viscoelasticity* [M]. Moscow: Nauka, 1970.
- [17] Allam M N M, Appleby P G. On the plane deformation of fiber-reinforced viscoelastic plates [J]. *Appl Math Modell*, 1985, **9**(5): 341-346.
- [18] Allam M N M, Appleby P G. On the stress concentrations around a circular hole in a fiber-reinforced viscoelastic plate[J]. *Res Mech*, 1986, **19**(2): 113-126.
- [19] Allam M N M, Zenkour A M. Bending response of a fiber-reinforced viscoelastic arched bridge model[J]. *Appl Math Modell*, 2003, **27**(3): 233-248.
- [20] Zenkour A M, Allam M N M. Stresses around filled and unfilled circular holes in a fiber-reinforced viscoelastic plate under bending[J]. *Mech Adv Mater*, 2005, **12**(6): 379-389.
- [21] Zenkour A M, Allam M N M. On the rotating fiber-reinforced viscoelastic composite solid and annular disks of variable thickness[J]. *Int J Comput Methods Eng Sci Mech*, 2006, **7**(1): 21-31.
- [22] Abramowitz M, Stegun A I. *Handbook of Mathematical Functions*[M]. 5th Printing. Washington DC, USA: US Government Printing Office, 1966.
- [23] Bogdanovich A E, Pastore C M. *Mechanics of Textile and Laminated Composites With Applications to Structural Analysis*[M]. New York: Chapman and Hall, 1996.
- [24] Pobedria B E. Structural anisotropy in viscoelasticity[J]. *Polym Mech*, 1976, **12**(4): 557-561.
- [25] Zenkour A M. Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory[J]. *Acta Mech*, 2004, **171**(3/4): 171-187.
- [26] Zenkour A M. Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate

theories[J]. *J Eng Math*, 2004, **50**(1): 75-93.

- [27] 任库尔 A M, 伊莉莎白 K A, 玛沙特 D S. 功能梯度空心及实心圆柱体旋转时的弹性及粘弹性解[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(12): 1457-1471. (Zenkour A M, Elsibai K A, Mashat D S. Elastic and viscoelastic solutions to rotating functionally graded hollow and solid cylinders [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, **29**(12): 1601-1616.)

Stresses in a Rotating Heterogeneous Viscoelastic Composite Cylinder With Variable Thickness

A. M. Zenkour^{1,2}

(1. *Department of Mathematics, Faculty of Science, King AbdulAziz University, P. O. Box 80203, Jeddah 21589, Saudi Arabia;*

2. *Department of Mathematics, Faculty of Science, Kafrelsheikh University, Kafr El-Sheikh 33516, Egypt*)

Abstract: An analytical solution for the rotation problem of a two-layer composite elastic cylinder under plane strain assumption was presented. The external cylinder had variable-thickness formulation and made of a heterogeneous orthotropic material. It was contained by a fiber-reinforced viscoelastic homogeneous isotropic solid core of uniform-thickness. The thickness and elastic properties of the external cylinder were taken as power functions of the radial direction. On application of the boundary and continuity conditions, the radial displacement and stresses for the rotating composite cylinder were determined. The effective moduli and Illyushin's approximation methods were used to obtain the viscoelastic solution of this problem. The effects of heterogeneity, thickness variation, constitutive and time parameters on the radial displacement and stresses were investigated.

Key words: rotating composite cylinder; orthotropic; heterogeneous; variable thickness; fiber-reinforced viscoelastic core