文章编号:1000-0887(2011)02-0202-11　

非完整系统有耗散和循环力时的平衡不稳定性*

M·韦仕科尉克[1], V·科尉克[2], A·奥布拉德尉克[2]

(1. 克拉古涅瓦茨大学 机械工程学院,克拉列沃 36000,塞尔维亚;
2. 贝尔格莱德大学 机械工程学院,贝尔格莱德 11000,塞尔维亚)

摘要: 讨论定常非完整系统在耗散、保守、循环力作用下的不稳定平衡问题. 应用方法是基于运动微分方程解的存在性,当 $t \to -\infty$ 时,系统渐近地趋于平衡状态. 假定在平衡位置附近,动能、Reyleigh 耗散函数、位置力都是无限可微函数. 结果将通过一个实例说明. 部分结果参见 Kozlov V V. On the asymptotic motions of systems with dissipation. *Prikl Math Mekh*, 1994, **58**(4): 31-36. (in Russian); Merkin D R. *Introduction to the Theory of the Stability of Motion*. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian); Thomson W, Tait P. *Treatise on Natural Philosophy*, *Part* Ⅰ[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1879.

关　键　词: 非完整; 不稳定性; 势能; 耗散力
中图分类号: O316　　**文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.008

引　　言

过去 30 年间发表了一连串的出版物,应用 Liapunov 第一法(近似法)和 Liapunov 第二法(直接法)研究非完整力学系统运动的稳定性. 该问题的沿革和结果在文献[1]和[2]中已有详述. 这些工作都与线性均匀非完整约束下的定常力学系统有关. 在文献[3-8]中,也应用 Liapunov 第一法和第二法得到了有意义的结果,其中 Mei 及其合作者,研究了非线性非完整约束下力学系统的平衡状态流形,同时研究了 Birkhoff 系统和相对 Birkhoff 系统的平衡状态流形. Luo 等在文献[9]中也研究了非完整系统,相对于非惯性参考系运动时的平衡状态流形.

上述论及的论文,在应用 Liapunov 第一法时,将扰动运动方程的线性近似式作为截短方程. 本文在一个稳定的粘性力场和一个稳定的循环力场中,研究线性均匀约束下,定常力学系统的不稳定平衡状态问题. Kozlov 等在文献[10-12]中,对 Liapunov 第一法的应用进行了论述,与前述论文不同,截短方程是通过力学系统扰动运动方程的非线性渐近式获得.

令系统的位形由 Lagrange 坐标系 $\boldsymbol{x} = (x^1, ..., x^n)$ 给出. 设系统的运动受到 $l(l < n)$ 个理想的线性均匀非完整的独立约束,即

* **收稿日期:** 2010-09-12; **修订日期:** 2010-11-04
基金项目: 塞尔维亚科技发展部出版基金资助项目(ON174016;TR35006)
作者简介: Vukman Covic(联系人. E-mail: covicv@eunet.rs).
本文原文为英文,吴承平 译,张禄坤 校.

$$B_i^\nu(\boldsymbol{x})\dot{x}^i = 0,\qquad \nu = m+1,\cdots,n;\ i = 1,\cdots,n;\ m = n-l$$

或,当约束为独立时 $(\mathrm{rank}[B_i^\nu(\boldsymbol{x})] = l)$, 有

$$\dot{x}^\nu = b_\alpha^\nu(\boldsymbol{x})\dot{x}^\alpha,\qquad \alpha = 1,\cdots,m;\ m = n-l. \tag{1}$$

系统的动能和 Reyleigh 耗散函数分别为注①

$$T = \frac{1}{2}a_{ij}(\boldsymbol{x})\dot{x}^i\dot{x}^j,\ \Phi = \frac{1}{2}f_{ij}(\boldsymbol{x})\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{2}$$

动能 T 是正定的,一般情况下对所有 $\boldsymbol{x}$ 值,Reyleigh 耗散函数 Φ 是 $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$ 半定的. 位置力场由矢量 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = (X_1(\boldsymbol{x}),\cdots,X_n(\boldsymbol{x}))$ 给出,其坐标就是一般的位置力.

本系统的运动就是微分方程(1)的解, 将微分方程写成 Woronetz 微分方程形式(参见文献[13])注①

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial x^\alpha} - b_\alpha^\nu\frac{\partial T^*}{\partial x^\nu} + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu}\right)^*\gamma_{\alpha\beta}^\nu\dot{q}^\beta = X_\alpha^* - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \dot{x}^\alpha}, \tag{3}$$

其中

$$T^* = T_{(\dot{x}^\nu = b_\alpha^\nu\dot{x}^\alpha)},\ \gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{\partial b_\beta^\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial x^\beta} + b_\alpha^\rho\frac{\partial b_\beta^\nu}{\partial x^\rho} - b_\beta^\rho\frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial x^\rho},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu}\right)^* = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu}\right)_{(\dot{x}^\nu = b_\alpha^\nu\dot{x}^\alpha)},\ X_\alpha^* = X_\alpha + b_\alpha^\nu X_\nu,\ \Phi^* = \Phi_{(\dot{x}^\nu = b_\alpha^\nu\dot{x}^\alpha)}.$$

变换后动能 T^* 和 Rayleigh 耗散函数 Φ^* 的显式表达式为

$$T^* = \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta,\ \Phi^* = \frac{1}{2}d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta, \tag{4}$$

其中

$$\theta_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\nu}b_\beta^\nu + a_{\beta\nu}b_\alpha^\nu + a_{\nu\rho}b_\alpha^\nu b_\beta^\rho,\ d_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + f_{\alpha\nu}b_\beta^\nu + f_{\beta\nu}b_\alpha^\nu + f_{\nu\rho}b_\alpha^\nu b_\beta^\rho.$$

如果 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_o) = \boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{x}_o$ 是 Ⅱ 类平衡位置. 不失去一般性,假设平衡位置在点 $\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{0}$,函数 $X_i(\boldsymbol{x})$, $a_{ij}(\boldsymbol{x})$, $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ 和 $b_\alpha^\nu(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 邻域是无限可微的. 令

$$X_i(\boldsymbol{x}) = X_i^{(p-1)}(\boldsymbol{x}) + X_i^{(p)}(\boldsymbol{x}) + \cdots \tag{5}$$

为 $X_i(\boldsymbol{x})$ 的 Maclaurin 级数. 这里 $X_i^{(s)}(\boldsymbol{x})$ 是 s 次齐次式. 因为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是Ⅱ类平衡位置,则 $s \geqslant 1$.

在文献[10]中,陈述了下列命题:如果势能 $\Pi = \Pi(\boldsymbol{x})$ 在平衡位置 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 没有最小值,就可以从 Maclaurin 级数的首次非平凡式得到结论:在一个保守及耗散力场中,完整定常系统的平衡是不稳定的. 在文献[14]中,该结论推广到线性均匀约束下的非完整系统,文献[15]推广到线性非均匀约束下的非完整系统,文献[16]推广到非线性约束下的非完整系统.

此外文献[10]和[14],在更为复杂的场中,讨论了非完整系统的不稳定平衡问题:除保守力和耗散力外,还有循环力.

根据文献[10-12,17]的主要结果,进一步考虑:若微分方程(1)和(3)存在渐近解 $\boldsymbol{x}(t)$,即有

$$\lim_{t\to-\infty}(\boldsymbol{x}(t),\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = 0, \tag{6}$$

那末所讨论力学系统的平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

---

① 角标还可取: $\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,\cdots,m$; $\nu,\rho,\theta,\psi = m+1,\cdots,n$; $i,j,k = 1,\cdots,n$. 重复角标表示求和.

利用特殊型式的级数可以证明上述渐近解的存在[10-12]. 该方法要求函数 $X_i(\boldsymbol{x})$, $a_{ij}(\boldsymbol{x})$, $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ 和 $b_\alpha^\nu(\boldsymbol{x})$ 是解析的,至少在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 邻域是无限可微的. 在 $p \geqslant 3$ 时,找到如下级数形式的解(也可能是发散的):

$$\sum_{s=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_s(\ln(-t))(-t)^{-\mu s}, \qquad \mu > 0, \tag{7}$$

其中(参见文献[11-12]) $\boldsymbol{a}_1 = \mathrm{const}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots$ 为 $\ln(-t)$ 的矢量多项式且 $\mu > 0$. 如果上述级数存在并收敛,表明方程(1) 和(3) 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 有性质:当 $t \to -\infty$ 时,$\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{0}$. 若该级数存在但发散,如文献[18],方程(1) 和(3) 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 存在(当 $t \to -\infty$ 时有性质 $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{0}$),级数(7)是该解的一个渐近形式. 它清楚地表明,平衡 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

从现在开始取 $p \geqslant 3$ 是正确的. $p=2$ 时,可用 Liapunov 逼近(线性近似稳定,参看文献[19])求解. 这种情况不作考虑.

1 在耗散和位置力作用下的不稳定平衡

将函数 $W(\boldsymbol{x})$,在点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的邻域展开为 Maclaurin 级数 $W = W^{(p)}(\boldsymbol{x}) + W^{(p+1)}(\boldsymbol{x}) + \cdots$ $(p \geqslant 1)$. 这里 $W^{(s)}(\boldsymbol{x})$ 是一个 s 次的齐次式. 在 $W(\boldsymbol{x})$ 中,表达式 $x^\nu - b_\beta^\nu(\boldsymbol{0})x^\beta = 0$ 替换之,得到函数 $\hat{W}(\boldsymbol{x}')$:

$$\hat{W}(\boldsymbol{x}') \equiv \hat{W}(x^1, \cdots, x^m) = W(x^1, \cdots, x^m, b_\alpha^{m+1}(\boldsymbol{0})x^\alpha, \cdots, b_\alpha^n(\boldsymbol{0})x^\alpha),$$

其中 $\boldsymbol{x}' = (x^1, \cdots, x^m)$. 函数 $\hat{W}(\boldsymbol{x}')$ 的 Maclaurin 级数的首次非平凡式 $\hat{W}(\boldsymbol{x}')$,而且还是式 $\hat{W}^{(p)}(\boldsymbol{x})$ 到 $(n-m)$ 维平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的约束,由下面的方程式给出:

$$x^\nu - b_\beta^\nu(\boldsymbol{0})x^\beta = 0. \tag{8}$$

认为向量式

$$(\hat{X}_1^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b_1^\nu(\boldsymbol{0})\hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}'), \cdots, \hat{X}_m^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b(\boldsymbol{0})\hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}'))$$

是非平凡的. 如下陈述成立:

定理 1 设 $\det[d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})] \neq 0$,并设存在向量 $\boldsymbol{c}' \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}' = (c^1, \cdots, c^m)$, 是如下方程的解:

$$\hat{X}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') + b_{\alpha o}^\nu \hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') = \kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta, \qquad \kappa > 0. \tag{9}$$

则由微分方程(1)和(3)描述的力学系统的平衡 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

定理 1 推广了文献[14]的结果,文献[14]指出了在保守力和粘滞摩擦力作用下的非完整系统运动平衡的不稳定性. 没有耗散力时,定理 1 仍然成立(见文献[17]).

若 $\det[f_{ij}(\boldsymbol{0})] \neq 0$ 成立,则有 $\det[d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})] \neq 0$. 相反的陈述不成立,当 Rayleigh 函数 Φ 半定时,意味着矩阵 $[d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})]$ 恰好正则,还意味着,定理 1 在给定条件下,不完全耗散时也成立.

利用下面微分方程

$$\dot{x}^i = F_{(p-1)}^i(\boldsymbol{x}) + K_{jk}^i(\boldsymbol{x})\dot{x}^j\dot{x}^k + V^i(\boldsymbol{x}) + P_j^i(\boldsymbol{x})\ddot{x}^j \tag{10}$$

的一般结果可以证明定理 1. 其中 $F_{(p-1)}^i(\boldsymbol{x})$ 是 $(p-1) \geqslant 2$ 的齐次式,系数 $K_{jk}^i(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的任意函数. 显然 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 就是方程(10) 的解. 假设函数 $V^i(\boldsymbol{x})$, $K_{jk}^i(\boldsymbol{x})$ 和 $P_j^i(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 邻域是无限可微的,同时当 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$ 时,有 $V^i(\boldsymbol{x}) = O^i(\|\boldsymbol{x}\|^p)$. 下列陈述有效:

定理 2 设存在矢量 $\boldsymbol{c} = (c^1, \ldots, c^n) \neq \boldsymbol{0}$, 使得

$$F_{(p-1)}^i(\boldsymbol{c}) = \kappa c^i, \qquad \kappa = \mathrm{const} > 0. \tag{11}$$

在这些条件下,由微分方程(10)描述的力学系统,其平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

为了证明级数(7)存在,必须证明方程(10)中包含了方程(7),假设 $\mu = 1/(p-2)$, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c}$,即假设前述级数的首项 $\boldsymbol{x}_1 = (-t)^{-\mu}\boldsymbol{c}$ 是截短方程(参照方程(10))取如下形式的特解:

$$\dot{x}^i = F^i_{(p-1)}(\boldsymbol{x}). \tag{12}$$

定理 2 的证明　使同次幂 $t^{-(s+p-2)(p-2)}$ 的系数相等,当 $s=1$ 时,得到 $\kappa = 1/(p-2)$;当 $s \geqslant 2$ 时,得到一个带常系数线性非齐次微分方程的级数. 该函数导致这些方程的非齐次式,就是熟知的变量 $\ln(-t)$ 的多项式. 系数 $\boldsymbol{a}_s(s \geqslant 2)$ 是这些微分方程的特解. 文献[10-12,17]详细地叙述了这些微分方程的构成及其求解方法. 于是知道,这样的一个微分方程组,总是有一个常系数多项式的特解. 这就表明微分方程(10)描述的力学系统,存在所需的渐近解,因此平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的. 定理 2 证毕. □

注 1　当 $P^i_j(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ 或 $K^i_{jk}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ 时,定理 2 也成立.

定理 1 的证明　为了证明运动微分方程(1)和(3)所描述系统平衡 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ 的不稳定性,清楚地表明,这些方程是方程(10)的一个特殊情况,同时表明条件(11)被简化为条件(9).

利用 $d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) = d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0}) + \Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})$, $\Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0}) = 0$ 和 $b^\nu_\alpha = b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0}) + \Delta^\nu_\alpha(\boldsymbol{x})$, $\Delta^\nu_\alpha(\boldsymbol{0}) = 0$, 方程(1)和(3)可由如下方法

$$\begin{cases}(d^o_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}))\dot{x}^\beta = X_\alpha(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\alpha(\boldsymbol{x})X_\nu(\boldsymbol{x}) + G_\alpha(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}') - \theta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\ddot{x}^\beta, \\ d^o_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0}),\ \dot{x}^\nu = (b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0}) + \Delta^\nu_\alpha(\boldsymbol{x}))\dot{x}^\alpha,\end{cases} \tag{13}$$

显式地表示为

$$\begin{cases}d^o_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = X_\alpha(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\alpha(\boldsymbol{x})X_\nu(\boldsymbol{x}) + G_\alpha(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}') - \theta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\ddot{x}^\beta + \\ \qquad \Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})(d^{\beta\delta}_o + \Delta^{\beta\delta}(\boldsymbol{x}))(X_\alpha(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\alpha(\boldsymbol{x})X_\nu(\boldsymbol{x}) + G_\delta(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}') - \theta_{\delta\gamma}(\boldsymbol{x})\ddot{x}^\gamma), \\ \dot{x}^\nu = b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0})d^{\alpha\beta}_o[X_\beta(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\beta(\boldsymbol{x})X_\nu(\boldsymbol{x})] + b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0})d^{\alpha\beta}_o[G_\beta(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}') - \theta_{\beta\delta}(\boldsymbol{x})\ddot{x}^\delta] + \\ \qquad \Delta^\nu_\alpha(\boldsymbol{x})[d^{\alpha\beta}_o + \Delta^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})][X_\beta(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\beta(\boldsymbol{x})X_\nu(\boldsymbol{x}) + G_\beta(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}') - \theta_{\beta\delta}(\boldsymbol{x})\ddot{x}^\delta],\end{cases} \tag{14}$$

其中

$$G_\alpha(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}') = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + b^\nu_\alpha\frac{\partial\theta_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu}\right) - \frac{\partial\theta_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \gamma^\nu_{\alpha\beta}(a_{\nu\gamma} + b^\rho_\gamma a_{\nu\rho})\right]\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma,$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}' = (\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^m),\ d^{\alpha\delta}_o d^o_{\delta\beta} = \delta^\alpha_\beta,\ (d^{\alpha\delta}_o + \Delta^{\alpha\delta}(\boldsymbol{x}))(d^o_{\delta\beta} + \Delta_{\delta\beta}(\boldsymbol{x})) = \delta^\alpha_\beta,\ \Delta^{\alpha\delta}(\boldsymbol{0}) = 0.$$

考虑到函数 $X_i(\boldsymbol{x})$, $a_{ij}(\boldsymbol{x})$, $d_{ij}(\boldsymbol{x})$ 和 $b^\nu_\alpha(\boldsymbol{x})$ 是无限可微的,且 $\det[d^o_{\alpha\beta}] \neq 0$, 则方程(14)也可写成

$$\begin{cases}\dot{x}^\alpha = d^{\alpha\beta}_o[X^{(p-1)}_\beta(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0})X^{(p-1)}_\nu(\boldsymbol{x})] + \\ \qquad O^\alpha(\|\dot{\boldsymbol{x}}'\|^2) + O^\alpha(\|\boldsymbol{x}\|^p) + O^\alpha(\|\ddot{\boldsymbol{x}}'\|), \\ \dot{x}^\nu = b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0})d^{\alpha\beta}_o[X^{(p-1)}_\beta(\boldsymbol{x}) + b^\theta_\alpha(\boldsymbol{0})X^{(p-1)}_\theta(\boldsymbol{x})] + \\ \qquad O^\nu(\|\dot{\boldsymbol{x}}'\|^2) + O^\nu(\|\boldsymbol{x}\|^p) + O^\nu(\|\ddot{\boldsymbol{x}}'\|).\end{cases} \tag{15}$$

因此,说明微分方程(15)为方程(10)的一个特殊情况.

考虑到

$$\begin{cases}F^\alpha_{(p-1)}(\boldsymbol{x}) = d^{\alpha\beta}_o[X^{(p-1)}_\beta(\boldsymbol{x}) + b^\theta_\alpha(\boldsymbol{0})X^{(p-1)}_\nu(\boldsymbol{x})], \\ F^\nu_{(p-1)}(\boldsymbol{x}) = b^\nu_{\alpha o}d^{\alpha\beta}_o[X^{(p-1)}_\beta(\boldsymbol{x}) + b^\nu_\alpha(\boldsymbol{0})X^{(p-1)}_\theta(\boldsymbol{x})],\end{cases} \tag{16}$$

条件(11)可化简为

$$\begin{cases} d_o^{\alpha\beta}\left[X_\beta^{(p-1)}(\boldsymbol{c}) + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})X_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c})\right] = \kappa c^\alpha, \\ b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})d_o^{\alpha\beta}\left[X_\beta^{(p-1)}(\boldsymbol{c}) + b_\alpha^\theta(\boldsymbol{0})X_\theta^{(p-1)}(\boldsymbol{c})\right] = \kappa c^\nu, \qquad \kappa > 0, \end{cases} \tag{17}$$

即简化为

$$X_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{c}) + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})X_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c}) = \kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta,\ c^\nu - b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})c^\alpha, \qquad \kappa > 0, \tag{18}$$

与方程(9)等价,

$$\hat{X}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})\hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') = \kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta, \qquad \kappa > 0. \tag{19}$$

于是, 定理 1 证毕. □(虽然它被隐含在证明过程之中, 为正确起见, 下面将着重强调: 当 $t \to -\infty$ 时,$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{0}$,则约束(1) 仍满足). 还注意到,基于条件(18),向量 $\boldsymbol{c}$ 和级数(7) 的首次项,$\boldsymbol{x}_1 = (-t)^{-\mu}\boldsymbol{c}$ 位于平面 $\boldsymbol{\pi}$.

系统(15)(或系统(1)、(3))存在的一个渐近解,形式上简化为求解方程(19). 虽然这是一个纯代数问题,对它的求解,是不可能找到必要和充分条件的(线性情况除外). 在特殊情况下,下面的引理(参见文献[10-12]),在特殊情况中,定义了方程(19)解存在的充分条件.

向量场(16)位于平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的约束也是一个场. 求得下面系统方程组的解

$$\hat{X}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})\hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') = 0. \tag{20}$$

就得到向量场的零值.

引理 1 设 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ 是方程(20) 的一个孤立解,且设 $m = (n - l)$ 为奇数. 则方程组

$$\hat{X}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})\hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') = \kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta \tag{21}$$

有非平凡解 $\boldsymbol{c}'$,其中 κ 可负可正.

引理 2 设 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ 是方程(20) 的一个孤立解,且设$(p-1)$ 为偶数. 这时至少有一对直接相对的向量 $\boldsymbol{c}'$, 是如下方程的解

$$\hat{X}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') + b_{\alpha o}^\nu\hat{X}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') = \kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta. \tag{22}$$

注 引理中条件的检验还是比较简单.

2 保守、循环和耗散力组合作用下的不稳定性

考虑保守、循环和粘性力场中,非完整系统运动的平衡不稳定性,Rayleigh 耗散函数由方程(2)确定. 假设位置力场为

$$X_i(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x^i} + C_i(\boldsymbol{x}), \tag{23}$$

其中 $\Pi(\boldsymbol{x})$ 表示系统的势能,$C_i(\boldsymbol{x})$ 表示广义循环力,即下式成立

$$C^i(\boldsymbol{x})x_i \equiv 0. \tag{24}$$

设 $\boldsymbol{x} = 0$ 为Ⅱ类平衡位置,则

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x^i}(\boldsymbol{0}) = 0,\ C_i(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}. \tag{25}$$

又设 $\Pi(\boldsymbol{0}) = 0$. 假定所假设的条件(H)成立,且设

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \Pi^{(p)}(\boldsymbol{x}) + \Pi^{(p+1)}(\boldsymbol{x}) + \cdots \tag{26}$$

和

$$C_i(\boldsymbol{x}) = C_i^{(p-1)}(\boldsymbol{x}) + C_i^{(p)}(\boldsymbol{x}) + \cdots \tag{27}$$

分别为 $\Pi(\boldsymbol{x})$ 和 $C_i(\boldsymbol{x})$ 的 Maclaurin 级数. 其中 $C_i^{(s)}(\boldsymbol{x})$ 和 $\Pi^{(s)}(\boldsymbol{x})$ 是 s 次齐次式,有 $s \geqslant 1$.

显然等式

$$C_i^{(p-1)}(\boldsymbol{x})x^i \equiv 0 \tag{28}$$

成立，由此得到等式

$$(\hat{C}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})\hat{C}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}'))x^\beta \equiv 0. \tag{29}$$

设 $\det[d_{\alpha\beta}^o] \neq 0$. 考虑到前面的陈述，描述力学系统由式(23)定义的微分方程(15)，可以写成如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x}^\alpha = d_o^{\alpha\beta}\left[-\dfrac{\partial\Pi^{(p)}}{\partial x^\beta} - b_\beta^\nu(\boldsymbol{0})\dfrac{\partial\Pi^{(p)}}{\partial x^\nu} + C_\beta^{(p-1)}(\boldsymbol{x}) + b_{\beta o}^\nu C_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x})\right] + \\ \qquad O^\alpha(\|\dot{\boldsymbol{x}}'\|^2) + O^\alpha(\|\boldsymbol{x}\|^p) + O^\alpha(\|\ddot{\boldsymbol{x}}'\|), \\ \dot{x}^\nu = b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})d_o^{\alpha\beta}\left[-\dfrac{\partial\Pi^{(p)}}{\partial x^\beta} - b_\beta^\nu(\boldsymbol{0})\dfrac{\partial\Pi^{(p)}}{\partial x^\nu} + C_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{x}) + b_\alpha^\nu(\boldsymbol{0})C_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x})\right] + \\ \qquad O^\nu(\|\dot{\boldsymbol{x}}'\|^2) + O^\nu(\|\boldsymbol{x}\|^p) + O^\nu(\|\ddot{\boldsymbol{x}}'\|). \end{cases} \tag{30}$$

首先考虑下面条件：

$$(\hat{C}_1^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b_1^\nu(\boldsymbol{0})\hat{C}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}'),\cdots,\hat{C}_m^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b_m^\nu(\boldsymbol{0})\hat{C}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}')) \neq 0$$

成立时的不稳定性问题.

定理 3　设下列条件成立：

a) $\det[d_{\alpha\beta}^o] \neq 0$；

b) 点 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ 是函数 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}')$ 和 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}') \neq 0$ 的最大值(不必严格)；

c) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ 是如下方程的一个孤立解

$$-\frac{\partial\hat{\Pi}_p}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}') + \hat{C}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') + b_\beta^\nu(\boldsymbol{0})\hat{C}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{x}') = 0; \tag{31}$$

d) $m = n - l$ 为奇数；

e) $p \geqslant 3$.

这时，由微分方程组(30)描述的力学系统，其平衡 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

方程(31)的解属于

$$\omega = \{\boldsymbol{x} \in R^n : \hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}') = 0\}.$$

特别地，若 $\hat{\Pi}_p(\hat{\boldsymbol{x}})$ 在点 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ 有一个严格意义上的最大值，则方程(31)的解是孤立的.

推论 1　设 $m = n - l$ 为奇数，且点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是函数 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}')$ 的严格意义上的最大值. 那末，平衡 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

在定理 3 的条件下，对任意循环和耗散力、自由度为奇数(参见文献[20]207)的完整系统，其稳定平衡是不可能的. 在这个意义上，定理是在非完整系统上推广了上述结果.

定理 3 的证明　定理 1 是其证明的基础. 基于引理 1 和定理 3 的条件 c) 和 d)，有一个矢量 $\boldsymbol{c}$ 为方程组(9)的解，简化为

$$-\frac{\partial\hat{\Pi}_p}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{c}') + \hat{C}_\alpha^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') + b_\beta^\nu(\boldsymbol{0})\hat{C}_\nu^{(p-1)}(\boldsymbol{c}') = \kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta. \tag{32}$$

在定理 3 的条件下，$\kappa > 0$. 当然，考虑到等式(29)，得到

$$\kappa d_{\alpha\beta}^o c^\beta c^\beta = -\frac{\partial\hat{\Pi}_p}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{c}')c^\alpha. \tag{33}$$

从此，因为 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}')$ 是一个齐次式，并且 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{c}') < 0$(根据定理 3 的条件 b))，有

$$\kappa = -(d^o_{\alpha\beta} c^\beta c^\beta)^{-1} p \hat{\Pi}_p(\boldsymbol{c}') > 0. \tag{34}$$

定理3证毕. □

定理4 设下列条件满足:

a) $\det[d^o_{\alpha\beta}] \neq 0$;

b) p 为奇数;

c) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ 为以下方程的一个孤立解:

$$-\frac{\partial \hat{\Pi}_p}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{x}') + \hat{C}^{(p-1)}_\alpha(\boldsymbol{x}') + b^\nu_\beta(\boldsymbol{0})\hat{C}^{(p-1)}_\nu(\boldsymbol{x}') = 0; \tag{35}$$

d) $p \geqslant 3$.

则由微分方程(30)所描述的力学系统,其平衡 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

当耗散力不存在时,定理4仍然成立. 该结果可参考文献[22].

定理4的证明 点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是方程(31)的孤立解,且次数 p 为奇数. 因此,至少有一对直接相对的向量 $\boldsymbol{c}$,是方程(32)的解(见引理2). 又 $\hat{\Pi}_p(-\boldsymbol{c}') = -\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{c}')$(因为 $\hat{\Pi}_p$ 是奇函数). 后面的证明可以采用定理1中同样的方法.

考虑下列条件得到满足的情况

$$\hat{C}^{(p-1)}_\alpha(\boldsymbol{x}') + b^\nu_\beta(\boldsymbol{0})\hat{C}^{(p-1)}_\nu(\boldsymbol{x}') \equiv 0. \tag{36}$$

现在,条件(32)成为如下形式

$$-\frac{\partial \hat{\Pi}_p}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{c}') = \kappa d^0_{\alpha\beta} c^\beta, \qquad \kappa \neq 0. \tag{37}$$

定理4证毕. □

定理3的条件c)、d)和定理4的条件b)、c),用公式表示定理时可以省略.

定理5 设下列条件满足:

a) $\det[d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})] \neq 0$;

b) 函数 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}')$, $p \geqslant 3$ 没有最小值 $\boldsymbol{x} = 0$.

则由微分方程(30)所描述的力学系统,其平衡 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

推论2 设 $\det[d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})] \neq 0$,且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是势能 Π 最大值(不必严格),又有 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}') \neq 0$. 则平衡 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

若 $p = 2$, 定理5简化为类似于文献[1]的结果. 特别地,当没有非完整约束(1)和循环力时,定理5与文献[10](有耗散的定常完整系统)的结果相一致.

没有耗散力时,定理5的证明参见文献[17](文献[17]中定理证明时,函数 Π, $a_{ij}(x)$ 和 $b^\nu_\alpha(x)$ 是无限可微的). 当假设这些函数是有限次可微时,类似结果的证明参见文献[21-23].

定理5的证明 证明以定理1为基础. 为了证明定理5, 充分性证明如下, 由条件b), 存在向量 $\boldsymbol{c}'$(满足系统(37)), 又 $\kappa > 0$. 设 $\boldsymbol{c}'$ 为确定点的单位向量, 在该点上函数 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}')$ 在 $(m-1)$-维椭圆体 $d^o_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1$ 上有最小值. 根据函数 $\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{x}')$ 的条件极值定理,有一向量 $\boldsymbol{c}'$ 为如下方程的解

$$-\frac{\partial \hat{\Pi}_p}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{c}') = \kappa d^o_{\alpha\beta} \mathrm{e}^\beta .$$

根据定理5的条件,最小值为负,因此

$$\kappa = -p\hat{\Pi}_p(\boldsymbol{c}') > 0$$

成立. 从而定理 1 的所有条件满足. 定理 5 证毕. □

3 实　例

滑橇 A 在固定水平面 $\boldsymbol{\pi}$ 上运动,和平面有 3 个接触点. 前两个支撑点 N_2 和 N_3,可在平面 $\boldsymbol{\pi}$ 上任意方向滑动. 与平面 M 接触的第三点是一个竖直的刀刃 S,刀刃连接于滑橇支撑点 N_1. 该点不能朝刀刃平面的竖直方向运动. 滑橇的位形由 Lagrangy 坐标系 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,x^3)$ 决定,其中 $x^1=x,x^3=y$ 为点 M_1 的 Cartesian 坐标,$x^2=\varphi$ 表示 Ox 轴与滑橇平面和平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的交线所构成的角. 刚度为 c 的弹簧,一端连接到滑橇上部水平面(ε) 的 K_1 点,弹簧的另一端连接到固定点 O_1. 滑橇在位置 $\boldsymbol{x}=(0,0,0)$ 时,这时弹簧轴竖直,且未变形,长度为 l. 滑橇具有对称的竖直平面,点 K_1 和 K ($K\in(\varepsilon)$) 属于该平面. 点 K 位于包含点 K_1 的竖直线上. 距离 $\overline{K_1K}=a$. 沿 K_1 和 K 的连结线作用着力 $\boldsymbol{F}=\alpha(x^3+y^3)\overrightarrow{KK_1}/|\overrightarrow{KK_1}|$,$\alpha$ 为常数(见图 1). 运动时,滑橇的刀刃受粘性摩擦力 $\boldsymbol{F}_w=-\beta\boldsymbol{v}_M$ 作用,其中 $\beta=\mathrm{const}>0$,$\boldsymbol{v}_M$ 为滑橇与平面接触点的速度. 滑橇的转动,粘性摩擦力外加出现力偶 $\boldsymbol{M}_w=-\gamma\dot{\varphi}\boldsymbol{p}$,其中 $\gamma=$ 常数 >0,$\boldsymbol{p}$ 为垂直于平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的单位向量. 滑橇的质量为 m,中心轴惯性半径为 k. 确定滑橇的平衡位置并讨论其稳定性.

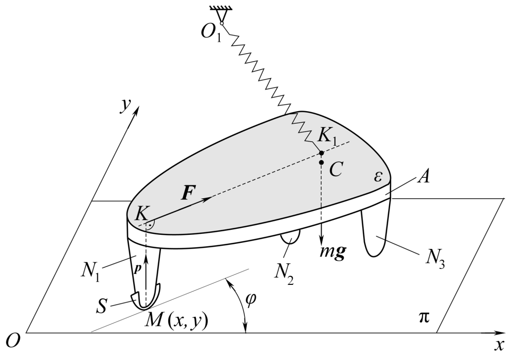

图 1　滑橇示意图

Fig. 1　Diagrammatic sketch of sledge

解　非完整约束方程为[13]

$$\dot{y}=\dot{x}\tan\varphi, \tag{38}$$

滑橇的动能、耗散函数和弹簧的势能分别为

$$\begin{cases} T=\dfrac{1}{2}m[\dot{x}^2+\dot{y}^2-2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi+2a\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi+(a^2+k^2)\dot{\varphi}^2], \\ \Phi=\dfrac{1}{2}\beta(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)^2+\dfrac{1}{2}\gamma\dot{\varphi}^2, \\ \Pi=\dfrac{1}{2}c(\sqrt{[x-a(1-\cos\varphi)]^2+[y+a\sin\varphi]^2+l^2}-l)^2. \end{cases} \tag{39}$$

广义非保守的位置力为

$$F_1=-\alpha(x^3+y^3)\cos\varphi,\ F_2=0,\ F_3=\alpha(x^3+y^3)\sin\varphi,$$

这些力由 Maclaurin 级数读取

$$F_1=-\alpha(x^3+y^3)+O_1(\boldsymbol{x}^3),\ F_2=0,\ F_3=O_3(|\boldsymbol{x}|^3),$$

而弹性势能的 Maclaurin 级数为 $\Pi=\Pi_{(4)}+O(|\boldsymbol{x}|^5)$,其中

$$\Pi_{(4)}=\frac{c}{8l^2}(x^4+2x^2y^2+y^4+4ax^2y\varphi+4ay^3\varphi+2a^2x^2\varphi^2+6a^2y^2\varphi^2+4a^3y\varphi^3+a^4\varphi^4).$$

去除广义速度 $\dot{x}^3=\dot{y}$ 后,动能和耗散函数分别为

$$T^*=\frac{1}{2}m[\dot{x}^2(1+\tan^2\varphi)+(a^2+k^2)\dot{\varphi}^2],$$

$$\Phi^* = \frac{1}{2}\beta\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\gamma\dot{\varphi}^2.$$

滑橇的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot{x}}\right) + \frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\frac{\partial b_1^3}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \bar{X}_1 - \frac{\partial\Pi}{\partial x} + b_1^3\left(\bar{X}_3 - \frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) - \frac{\partial\Phi^*}{\partial\dot{x}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\frac{\partial b_1^3}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \bar{X}_2 - \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Phi^*}{\partial\dot{\varphi}},\ \dot{y} = b_1^3\dot{x},$$

其中 $b_1^3 = \tan\varphi$. 显然 $\boldsymbol{x} = (0,0,0)$ 是滑橇的平衡位置. 此时的代数方程(9)为

$$\hat{F}_\alpha^{(3)}(\boldsymbol{c}') - \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial x^\alpha}(\boldsymbol{c}') = \kappa d_{\varepsilon\delta}^o c^\delta,\qquad \delta = 1,2,$$

其中

$$\pi = \{x^3 = 0\},\ d_{11}^o = \beta,\ d_{12}^o = d_{21}^o = 0,\ d_{22}^o = \gamma,\ \boldsymbol{c}' = (c^1, c^2),$$

$$\hat{F}_1^{(3)}(\boldsymbol{c}') - \frac{\partial\hat{\Pi}_{(4)}}{\partial x}(\boldsymbol{c}') = \left(\alpha - \frac{c}{2l^2}\right)(c^1)^3 - \frac{ca^2}{2l^2}c^1(c^2)^2,$$

$$\hat{F}_2^{(3)}(\boldsymbol{c}') - \frac{\partial\hat{\Pi}_{(4)}}{\partial\varphi}(\boldsymbol{c}') = -\frac{ca^2}{2l^2}(c^1)^2c^2 - \frac{ca^4}{2l^2}(c^2)^3.$$

取得最后方程组的解为 $c^1 = \pm 1/\sqrt{\beta}$, $c^2 = 0$, $\kappa = \alpha - c/(2l^2)$. 由此得出结论,若 $c < 2\alpha l^2$,滑橇的平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

参考文献:

[1] Karapetyan A V, Rumyantsev V V. Stability of conservative and dissipative systems[J]. *Itogi Nauki i Tekhniki*, *Obshchaya Mekh*, 1983, **6**: 3-128. (in Russian)

[2] Karapetyan A V. *Stability of Steady Motions*[M]. Moscow: Editorial URSS, 1998: 165. (in Russian)

[3] 梅凤翔,史荣昌,张永爱, 朱海平. 约束力学系统的运动稳定性[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1997. (MEI Feng-xiang, SHI Rong-chang, ZHANG Yong-ai, ZHU Hai-ping. *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1997.)

[4] 梅凤翔. 关于非线性非完整系统平衡状态的稳定性[J]. 科学通报, 1992,**37**(1): 82-85. (MEI Feng-xiang. On stability of equilibrium states of nonlinear nonholonomic systems[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**(1) 82-85.)

[5] 梅凤翔. On the stability of equilibria of nonlinear nonholonomic systems[J]. 科学通报, 1992, **37**(16): 1397-1401. (MEI Feng-xiang. On the stability of equilibria of nonlinear nonholonomic systems[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**(16): 1397-1401.)

[6] 朱海平,梅凤翔. 关于非完整力学系统相对部分变量的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(3): 225-233. (ZHU Hai-ping, MEI Feng-xiang. On the stability of nonholonomic mechanical systems with respect to partial variables[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 1995,**16**(3): 237-245.)

[7] Shi R C, Mei F X, Zhu H P. On the stability of the motion of a Birkhoff system[J]. *Mechanics Research Communications*, 1994, **21**(3): 269-272.

[8] Fu J L, Chen L Q, Luo Y, Luo S K. Stability for the equilibrium state manifold of relativistic

Birkhoffian systems[J]. *Chinese Physics*, 2003, **12**(4): 351-356.

[9] Luo S K, Chen X W, Fu J L. Stability theorems for the equilibrium state manifold of non-holonomic systems in a noninertial reference frame[J]. *Mechanics Research Communication*, 2001, **28** (4): 463-469.

[10] Kozlov V V. On the asymptotic motions of systems with dissipation[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **58**(5): 787-792.

[11] Kozlov V V, Furta S D. *Asymptotics of Solutions for Strongly Nonlinear Systems of Differential Equations*[M]. Regular and Chaotic Dynamics. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2009: 312. (in Russian)

[12] Kozlov V V, Furta S D. Lyapunov's first method for strongly non-linear systems[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, **60**(1): 7-18. (in Russian)

[13] Neimark J I, Fufaev N A. *Dynamics of Nonholonomic Systems*[M]. Providence, Rhode Island: Am Math Society, 1972.

[14] Vesković M. On the equilibrium stability of mechanical systems with dissipation[J]. *Theoretical and Applied Mechanics*, 1998, **24**: 139-154.

[15] Čović V, Vesković M, Obradović A. On the instability of equilibrium of nonholonomic systems with nonhomogeneous constraints[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2010, **51**(9/10): 1097-1106.

[16] V·科维克, M·维什科维克, D·狄加瑞克, A·阿伯拉达维克. 非线性约束下非完整系统的平衡稳定性[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(6): 722-730. (Čović V, Vesković M, Đurić D, Obradović A. On the stability of equilibria of nonholonomic systems with nonlinear constraints [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2010, **31**(6): 751-760.)

[17] Kozlov V V. On the stability of equilibria of non-holonomic systems[J]. *Soviet Math Dokl*, 1986, **33**(3): 654-656. (in Russian)

[18] Kuznetsov A N. The existence of solutions of an autonomous system, recurring at a singular point, having a formal solution[J]. *Funktsional'nyi Analiz i Yego Prilozheniya*, 1989, **23** (4): 63-74. (in Russian)

[19] Lyapunov A M. *The General Problem of the Stability of Motion*[M]. 450. Khar'kov: Mat Obshch, 1892. (in Russian)

[20] Merkin D R. *Introduction to the Theory of the Stability of Motion*[M]. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian)

[21] Vesković M. On the instability of equilibrium of non-holonomic systems with a non-analytic potential[J]. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1996, **31**(4): 459-463.

[22] Vesković M, Čović V. Lyapunov first method for nonholonomic systems with circulatory forces[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2007, **45**(9/10): 1145-1156.

[23] Sosnitskii S N. A certain case of equilibrium instability of nonholonomic voronets systems [J]. *International Applied Mechanics*, 1989, **25**(10): 1040-1045.

[24] Thomson W, Tait P. *Treatise on Natural Philosophy*: *Part* Ⅰ[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1879.

[25] Čović V, Vesković M. Hagedorn's theorem in some special cases of rheonomic systems[J]. *Mechanics Research Communications*, 2005, **32**(3): 265-280.

On the Instability of Equilibrium of Nonholonomic Systems With Dissipation and Circulatory Forces

M. Vesković[1], V. Čović[2], A. Obradović[2]

(1. *University of Kragujevac*, *Faculty of Mechanical Engineering*, *Dositejeva* 19, 36000 *Kraljevo*, *Serbia*;

2. *University of Belgrade*, *Faculty of Mechanical Engineering*, *Kraljice Marije* 16, 11000 *Belgrade*, *Serbia*)

Abstract: The equilibrium instability problem of the scleronomic nonholonomic systems acted upon by dissipative, conservative, circulatory forces was discussed. The applied methodology was based on the existence of solutions of differential equations of motion which asymptotically tend to the equilibrium state of the system, as $t \to -\infty$. It was assumed that the kinetic energy, the Rayleigh dissipation function, the positional forces in the neighborhood of the equilibrium position are infinitely differentiable functions. The results obtained, which partially generalize results from [V V Kozlov. On the asymptotic motions of systems with dissipation. *Prikl Math Mekh*, 1994, 58 (4): 31-36. (in Russian); D R Merkin. *Introduction to the Theory of the Stability of Motion.* 1987, Moscow: Nauka. (in Russian); W Thomson, P Tait. *Treatise on Natural Philosophy. Part* Ⅰ. Cambridge University Press, 1879], are illustrated by an example.

Key words: nonholonomic constraint; instability; potential; dissipative forces