

# 外形任意的多孔介质轴对称物体中充满 非 Newton 幂律流体时的自然对流\*

S·M·阿布德尔-盖德, M·R·伊德

(艾斯尤特大学 教育学院 科学与数学系, 新谷 72111, 埃及)

**摘要:** 在一个轴对称、外形任意的多孔介质二维体中, 充满了有屈服应力的非 Newton 幂律流体时, 数值分析其自由对流及其传热/传质问题. 利用相似变换, 将边界层控制方程及其边界条件变换为无量纲形式, 然后用有限差分法求解该方程组. 所研究的参数为流变常数、浮力比和 Lewis 数. 给出并讨论了典型的速度、温度及浓度曲线. 发现屈服应力参数值和非 Newton 流体的幂律指数对结果有着显著的影响.

**关键词:** 非 Newton 流体; 多孔介质; 屈服应力

**中图分类号:** O357.1      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.005

## 符 号 说 明

$a$	常数, $0 \leq a < 1$	$m$	常数
$a_1$	无量纲常数	$m_w$	局部的表面传质率
$C$	浓度	$n$	非 Newton 流体的幂律指数, $n \geq 0$
$D$	有效质量扩散系数	$Nu_x$	局部的 Nusselt 数
$f$	相似的流函数	$q_w$	局部表面传热率
$g$	重力加速度	$Ra_n$	修正的 Rayleigh 数
$h$	局部的传热系数	$r$	径向距离
$h_m$	局部的传质系数	$S$	形状变量
$K$	渗透系数	$Sh_x$	局部的 Sherwood 数
$k_{ef}$	有效的热传导系数	$T$	温度
$Le$	Lewis 数	$u, v$	分别为 $x$ 和 $y$ 方向 Darcy 速度分量
$l$	参考长度	$x, y$	直角坐标
<b>希腊字母</b>			
$\alpha_0$	阈值梯度, $(a_1 \tau_0 / \sqrt{K})$	$\mu_{ef}$	非 Newton 流体的有效粘度
$\alpha_{ef}$	有效的热扩散系数	$\xi$	无量纲变量

\* 收稿日期: 2010-10-15; 修订日期: 2010-11-18

作者简介: Mohamed R. Eid, 博士 (E-mail: m\_r\_eid@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

$\beta_T$	热膨胀系数	$\rho$	流体的密度
$\beta_c$	浓度扩散系数	$\tau_0$	屈服应力
$\gamma$	角度	$\phi$	无量纲浓度
$\zeta$	轴对称体外形的无量纲变量	$\psi$	流函数
$\eta$	相似变量	$\Omega$	无量纲流变参数
$\theta$	无量纲温度		
<b>角 标</b>			
0	参考条件	ef	有效的
w	壁面	$\infty$	自由流
x	局部的	*	无量纲量

## 引 言

多孔介质中的非 Newton 流体显示出非线性的特点,与多孔介质中的 Newton 流体不同.非 Newton 流体通过多孔介质时的流变效应,出现在诸多工程应用领域中,如化学工业中的输运过程、核废料的储存、储油层中石油流动的发现、食品的加工等.

Mohanty<sup>[1]</sup>在各种类型的轴对称物体中,就伴有传热/传质稳定的轴对称非 Newton 流动,寻找不同形式相似解法存在的可能性.Hassanien 和 Hady<sup>[2]</sup>就不可压缩的粘性导电非 Newton 流体,在横向磁场作用下,流经竖向表面(平板)没有限制的多孔介质时,对其二维稳定自由对流和质量传递作了分析.Nakayama 和 Koyama<sup>[3]</sup>提出了一般积分解,分析非 Newton 幂律流体流经任意几何外形物体时的强迫对流及其传热.Kawase<sup>[4]</sup>基于边界层研究,提出了颗粒-流体传热/传质的一种新模型.Yang 和 Wang<sup>[5]</sup>在饱和流体多孔介质中,就二维外形任意的轴对称体,在有/无屈服应力时,分析非 Newton 幂律流体的自由对流问题.J. P. Pascal 和 H. Pascal<sup>[6]</sup>在多孔介质中,分析非 Newton 幂律流体有屈服应力时的自由对流.Jumah 和 Mujumdar<sup>[7]</sup>在一个多孔介质充满 Herschel-Bulkley 流体时,关注流经竖直平板的自由对流及其传热/传质问题.Wang 等<sup>[8]</sup>在一个饱和流体的多孔介质中,流经二维外形任意的可渗透轴对称体时,研究非 Newton 幂律流体有屈服应力时的自由对流.Ibrahim 等<sup>[9]</sup>在一个内置不可渗透竖直平板的饱和流体多孔介质中,研究非 Newton 流体的自然对流及其传热问题.Cheng<sup>[10-12]</sup>在一个具有不同表面的饱和多孔介质中,致力于非 Newton 幂律流体的研究.Hayat 和 Sajid<sup>[13]</sup>提出了由于平板的线性伸展而产生的二阶流体轴对称流动.

二维轴对称不可渗透、外形任意的多孔介质物体中,充满计及屈服应力的非 Newton 幂律流体时,其自然对流及其传热/传质问题;屈服应力取不同值时,Lewis 数对传热/传质影响的研究;壁面的温度和浓度的常数值,在初始值和 0 之间变化;边界侧面质量通量的适当分布,以上问题迄今为止尚未有人研究过.因此,本文的主要工作就是在这样一个二维轴对称不可渗透、外形任意的多孔介质物体中,研究层流边界层的自然对流及其传热/传质问题,调查计及屈服应力时幂律流体流变参数的重要性.利用相似变换,将控制方程变换为无量纲形式.然后,用显式的有限差分法,求解变换的边界层方程.给出了速度、温度和浓度曲线的数值结果.

## 1 分 析

要知道非 Newton 流体的流变效应,可以写出粘度  $\mu_{ef}$  与剪切率  $\dot{\gamma}$  之间的关系式,Herschel-Bulkley 模型为



$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = \frac{x}{l}, y^* = \frac{yRa_n^{1/2}}{l}, r^* = \frac{r}{l}, \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \phi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \\ S = \cos \gamma, u^* = \frac{ul}{Ra_n \alpha_{ef}}, v^* = \frac{vl}{Ra_n^{1/2} \alpha_{ef}}, \\ \Omega = \frac{\alpha_0}{\rho g \beta_T (T_w - T_\infty) - \rho g \beta_C (C_w - C_\infty)}, N = \frac{\beta_C (C_w - C_\infty)}{\beta_T (T_w - T_\infty)}, \\ Ra_n = \frac{l}{\alpha_{ef}} \left[ \frac{K \rho g \beta_T (T_w - T_\infty)}{\mu_{ef}} \right]^{1/n}, Le = \frac{\alpha_{ef}}{D}, \end{array} \right. \quad (6)$$

注意到,  $\theta$  和  $\phi$  分别为无量纲温度和无量纲浓度;  $S$  为形状变量;  $\Omega$  为屈服应力参数;  $N$  为浮力比, 对于受热流动, 即当  $C_w > C_\infty, T_w > T_\infty$  时,  $N$  为正, 而对于散热流动,  $N$  为负, 对于热驱动流动,  $N$  为 0;  $Ra_n$  为修正的 Rayleigh 数;  $l$  为参考长度;  $Le$  为 Lewis 数.

根据边界层理论, 方程(1) ~ (5) 可以表示为以下的无量纲形式:

$$\frac{\partial (r^*)^m u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial (r^*)^m v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = [(\theta + N\phi)S - (1 + N)\Omega]^{1/n}, \quad |(\theta + N\phi)S| > (1 + N)\Omega, \\ u^* = 0, \quad |(\theta + N\phi)S| \leq (1 + N)\Omega, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}}, \quad (9)$$

$$u^* \frac{\partial \phi}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \phi}{\partial y^*} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}}, \quad (10)$$

相应的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} y^* = 0: v^* = 0, \theta = 1, \phi = 1, \\ y^* \rightarrow \infty: u^* \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

为了满足连续性方程(7), 定义无量纲流函数  $\psi$  如下:

$$u^* = \frac{1}{(r^*)^m} \frac{\partial \psi}{\partial y^*}, v^* = \frac{-1}{(r^*)^m} \frac{\partial \psi}{\partial x^*}. \quad (12)$$

引入如下的无量纲相似变换<sup>[5]</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = y^* (r^*)^m (a - \Omega)^{1/(2n)} \zeta^{-1/2}, \\ \psi = \zeta^{1/2} (a - \Omega)^{1/(2n)} f(\eta), \end{array} \right. \quad (13)$$

其中  $a = \cos \gamma, r^* = x^* \sqrt{1 - a^2}$ ;  $a$  为常数,  $0 \leq a < 1, \zeta = \int_0^{x^*} (r^*)^m d\xi$  为轴对称体外形的无量纲变量,  $\xi$  为无量纲变量, 从而无量纲速度分量为

$$u^* = (a - \Omega)^{1/n} f', \quad (14)$$

$$v^* = -\frac{1}{2} \zeta^{-1/2} (r^*)^m (a - \Omega)^{1/(2n)} [f - \eta f'], \quad (15)$$

其中  $f(\eta)$  为相似的无量纲流函数. 由方程(6)、(14)和(15), 得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\Omega}{a}\right)^{1/n} f' = \left[\theta + N\phi - (1 + N) \frac{\Omega}{a}\right]^{1/n}, \quad |\theta + N\phi| > (1 + N) \frac{\Omega}{a}, \\ f' = 0, \quad |\theta + N\phi| \leq (1 + N) \frac{\Omega}{a}, \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\theta'' + \frac{1}{2}f\theta' = 0, \quad (17)$$

$$\phi'' + \frac{1}{2}Le f\phi' = 0, \quad (18)$$

需要满足的边界条件为

$$\begin{cases} \eta = 0: f = 0, \theta = 1, \phi = 1, \\ \eta \rightarrow \infty: f' = 0, \theta = 0, \phi = 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中,上角撇号表示对  $\eta$  求导.

根据热传导的 Fourier 定律和质量扩散的 Fick 定律,局部的表面传热率  $q_w(x)$  和传质率  $m_w(x)$  可以分别写成

$$q_w(x) = -k_{ef} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{Ra_n^{1/2}(T_w - T_\infty)k_{ef}}{l} \theta'(0) \frac{\partial \eta}{\partial y^*}, \quad (20)$$

$$m_w(x) = -D \left[ \frac{\partial C}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{Ra_n^{1/2}(C_w - C_\infty)D}{l} \phi'(0) \frac{\partial \eta}{\partial y^*}. \quad (21)$$

局部 Nusselt 数  $Nu_x$  和局部 Sherwood 数  $Sh_x$  可以分别表示为

$$\begin{aligned} Nu_x &= \frac{hx}{k_{ef}} = \frac{q_w x}{k_{ef}(T_w - T_\infty)} = -\frac{Ra_n^{1/2}}{l} \theta'(0) \frac{\partial \eta}{\partial y^*} = \\ &= -\frac{Ra_n^{1/2}}{l} (r^*)^m (a - \Omega)^{1/(2n)} \zeta^{-1/2} \theta'(0), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Sh_x &= \frac{h_m x}{k_{ef}} = \frac{m_w x}{D(C_w - C_\infty)} = -\frac{Ra_n^{1/2}}{l} \phi'(0) \frac{\partial \eta}{\partial y^*} = \\ &= -\frac{Ra_n^{1/2}}{l} (r^*)^m (a - \Omega)^{1/(2n)} \zeta^{-1/2} \phi'(0), \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $h, h_m$  分别表示局部的传热系数和局部的传质系数,  $k_{ef}$  表示非 Newton 流体-饱和多孔介质的有效热传导系数.

## 2 结果和讨论

利用隐式有限差分法,在边界条件(19)下,数值地求解变换后的非线性常微分方程组(16)~(18).本文取  $\eta_\infty = 12$ .为了彰显本文公式和计算精度,就热驱动自由对流(即  $N=0$ )的情况,将本文得到的结果,与 Yang 和 Wang<sup>[5]</sup>的结果进行对比,发现两者有着很好的一致性.本文得到的结果:  $n < 1.0$ , 流体呈有屈服应力的伪塑性性能;  $n > 1.0$ , 流体出现膨胀特性;  $n = 1.0$ , 即 Bingham 模型,且当  $n = 1.0$  和  $\Omega/a = 0.0$  时,它简化为 Newton 流体.由此可见,当屈服应力为 0 时,该模型类似于 Ostwald-de Waele 幂律模型.

图 2~图 5 给出了  $n$  和  $\Omega/a$  对无量纲速度的影响,图 2 和图 3 为散热流动( $N = -0.5$ ),图 4~图 5 为受热流动( $N = 0.5$ ),其中  $Le = 1.0$ .可以看出,无论是散热流动还是受热流动,动量边界层的厚度随  $n$  增加,而随  $\Omega/a$  减小.值得注意的是,  $n > 1.0$  时的无量纲速度  $f'(\eta)$  曲线,与  $n \leq 1.0$  情况有着明显的差别.另一方面,图 6~图 9 描述了  $n$  和  $\Omega/a$  对无量纲温度和无量纲浓度的影响,图 6 和图 7 为散热流( $N = -0.5$ ),图 8 和图 9 为受热流( $N = 0.5$ ),其中  $Le = 1.0$ .可以清楚地看到,无论是散热流动还是受热流动,热量和浓度的边界层厚度随  $\Omega/a$  增大,而随  $n$  减小.但请注意,与散热流相比较,受热流表面的温度梯度和浓度梯度更陡些.这意

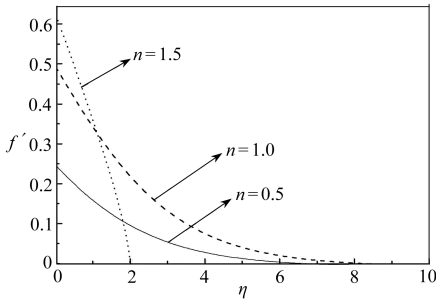


图2 当  $N = -0.5, \Omega/a = 0, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对速度曲线的影响

Fig.2 Effects of the fluid rheology on velocity profiles with  $N = -0.5, \Omega/a = 0$  and  $Le = 1$

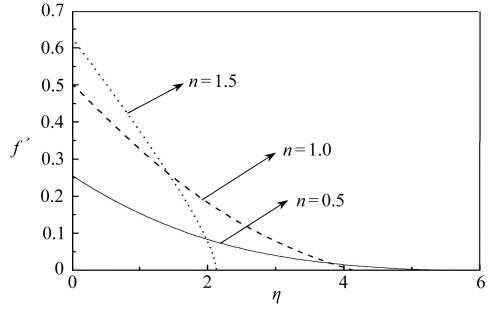


图3 当  $N = -0.5, \Omega/a = 0.2, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对速度曲线的影响

Fig.3 Effects of the fluid rheology on velocity profiles with  $N = -0.5, \Omega/a = 0.2$  and  $Le = 1$

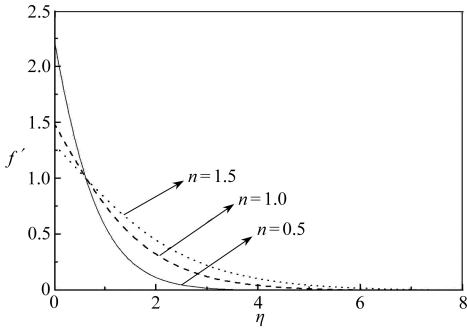


图4 当  $N = 0.5, \Omega/a = 0, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对速度曲线的影响

Fig.4 Effects of the fluid rheology on velocity profiles with  $N = 0.5, \Omega/a = 0$  and  $Le = 1$

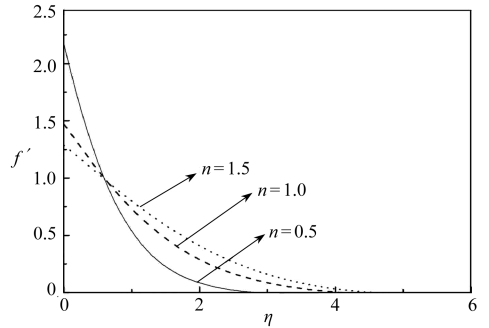


图5 当  $N = 0.5, \Omega/a = 0.01, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对速度曲线的影响

Fig.5 Effects of the fluid rheology on velocity profiles with  $N = 0.5, \Omega/a = 0.01$  and  $Le = 1$

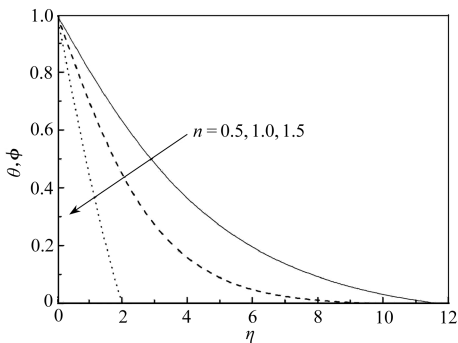


图6 当  $N = -0.5, \Omega/a = 0, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对温度和浓度曲线的影响

Fig.6 Effects of the fluid rheology on temperature and concentration profiles with  $N = -0.5, \Omega/a = 0$  and  $Le = 1$

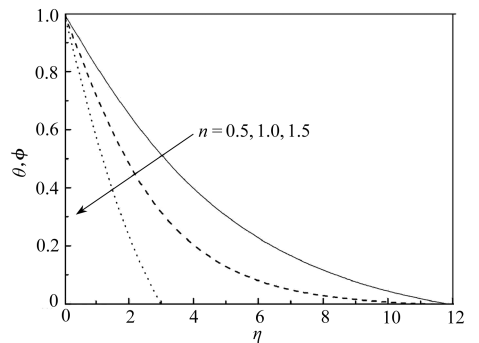


图7 当  $N = -0.5, \Omega/a = 0.2, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对温度和浓度曲线的影响

Fig.7 Effects of the fluid rheology on temperature and concentration profiles with  $N = -0.5, \Omega/a = 0.2$  and  $Le = 1$

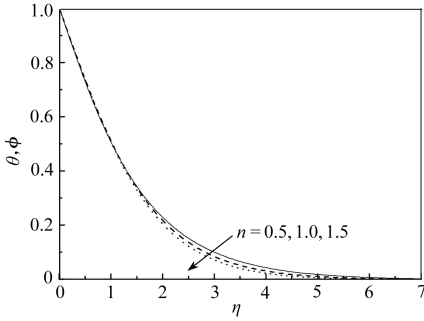


图 8 当  $N = 0.5, \Omega/a = 0.0, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对温度和浓度曲线的影响

Fig. 8 Effects of the fluid rheology on temperature and concentration profiles with  $N = 0.5, \Omega/a = 0.0$  and  $Le = 1$

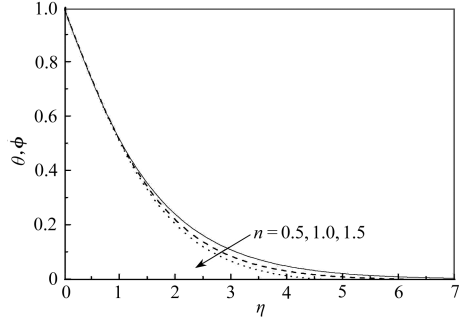


图 9 当  $N = 0.5, \Omega/a = 0.01, Le = 1$  时, 流变参数  $n$  对温度和浓度曲线的影响

Fig. 9 Effects of the fluid rheology on temperature and concentration profiles with  $N = 0.5, \Omega/a = 0.01$  and  $Le = 1$

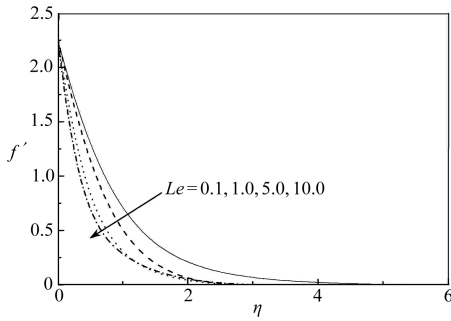


图 10 当  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$  时, Lewis 数对速度曲线的影响

Fig. 10 Effects of the Lewis number on velocity profiles with  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$

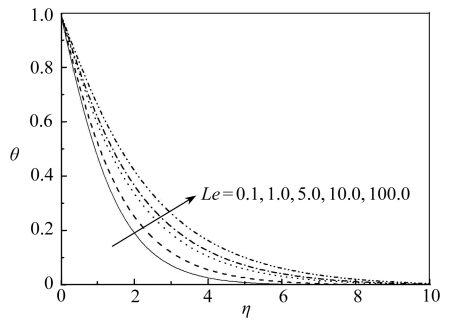


图 11 当  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$  时, Lewis 数对温度曲线的影响

Fig. 11 Effects of the Lewis number on temperature profiles with  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$

意味着受热流有更高的传热 / 传质率。当热量和浓度边界层的特定点上  $\theta + N\phi = (1 + N)\Omega/a$  时, 由方程(16)可知速度曲线逼近于 0, 这意味着伪塑性和膨胀的流体, 其速度边界层比热量和浓度边界层要薄些。

图 10 给出了 Lewis 数  $Le$  对速度分布的影响, 其中  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$ 。可以看出, 动量边界层厚度随 Lewis 数减小。图 11 给出了 Lewis 数对温度曲线的影响。可以清楚地看到, 热边界层厚度随  $Le$  增加, 导致表面热传导随  $Le$  减小。图 12 给出了 Lewis 数对浓度曲线的影响。可以看出, 浓度边界层厚度随  $Le$  减小, 这意味着表面质量传递随  $Le$  的增加而增加。由图 11 和图 12 还可以看出, 与浓

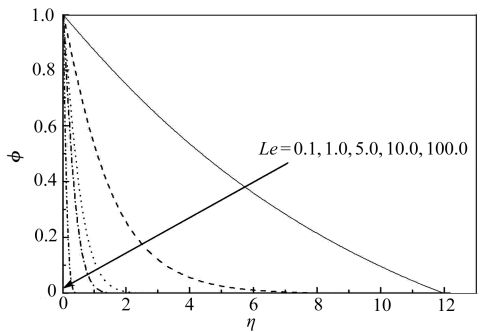


图 12 当  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$  时, Lewis 数对浓度曲线的影响

Fig. 12 Effects of the Lewis number on concentration profiles with  $n = N = 0.5, \Omega/a = 0.1$



度曲线相比, Lewis 数对温度曲线的影响更小。另外,与膨胀流体相比, Lewis 数对伪塑性流体温度和浓度曲线的影响要大很多。此外,与 Bingham 塑性流体 ( $n = 1.0$ ) 和膨胀流体 ( $n = 1.5$ ) 相比,  $\Omega$  和  $N$  对伪塑性流体 ( $n = 0.5$ ) 传热/传质的影响更突出。

### 3 结 论

本文在一个轴对称的接近不可渗透的多孔介质二维体中,当表面温度和浓度为常数时,研究了非 Newton 幂律流体自然对流的传热/传质问题。利用相似变换,将控制方程变换为无量纲形式,再用有限差分法求解这些方程。多孔介质中具有屈服应力的幂律流体参数变化时,给出了速度、温度、浓度结果曲线。结果表明,幂律流体中阈值梯度(屈服应力)的存在,将使热量和浓度的边界层厚度增加,而幂律指数的增加,将使热量和浓度的边界层厚度减小;当屈服应力为 0 时, Lewis 数的增加,将引起浓度边界层厚度的减小,而有屈服应力影响时,这种减小变得厉害得多。这意味着传热/传质非常依赖于高屈服应力值。

**致谢** 感谢审稿专家对本文提出的很有价值的意见和建议。同时特别感谢上海大学周哲玮教授。

#### 参考文献:

- [1] Mohanty H K. Similarity solutions of unsteady laminar, incompressible boundary layer equations for flow, heat and mass transfer in non-Newtonian fluids around axisymmetric bodies [J]. *Rheologica Acta*, 1978, **17**(4): 342-352.
- [2] Hassanien I A, Hady F M. Hydromagnetic free convection and mass transfer flow of non-Newtonian fluid through a porous medium bounded by an infinite vertical limiting surface with constant suction [J]. *Astrophysics Space Science*, 1985, **116**(1): 141-148.
- [3] Nakayama A, Koyama H. An analysis for friction and heat transfer characteristics of power-law non-Newtonian fluid flows past bodies of arbitrary geometrical configuration [J]. *Heat and Mass Transfer*, 1988, **22**(1/2): 29-36.
- [4] Kawase Y. Particle-fluid heat/mass transfer: Newtonian and non-Newtonian fluids [J]. *Heat and Mass Transfer*, 1992, **27**(2): 73-76.
- [5] Yang Y T, Wang S J. Free convection heat transfer of non-Newtonian fluids over axisymmetric and two-dimensional bodies of arbitrary shape embedded in a fluid-saturated porous medium [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1996, **39**(1): 203-210.
- [6] Pascal J P, Pascal H. Free convection in a non-Newtonian fluid saturated porous medium with lateral mass flux [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, **32**(3): 471-482.
- [7] Jumah R Y, Mujumdar A S. Free convection heat and mass transfer of non-Newtonian power law fluids with yield stress from a vertical flat plate in saturated porous media [J]. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2000, **27**(4): 485-494.
- [8] Wang S C, Chen C K, Yang Y T. Natural convection of non-Newtonian fluids through permeable axisymmetric and two-dimensional bodies in a porous medium [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, **45**(2): 393-408.
- [9] Ibrahim F S, Mansour M A, Abdel-Gaied S M. Radiative and thermal dispersion effects on non-Darcy natural convection with lateral mass flux for non-Newtonian fluid from a vertical flat plate in a saturated porous medium [J]. *Transport in Porous Media*, 2005, **61**(1): 45-57.



- [10] Cheng C Y. Natural convection heat and mass transfer of non-Newtonian power law fluids with yield stress in porous media from a vertical plate with variable wall heat and mass fluxes [J]. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2006, **33**(9): 1156-1164.
- [11] Cheng C Y. Double diffusion from a vertical wavy surface in a porous medium saturated with a non-Newtonian fluid[J]. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2007, **34**(3): 285-294.
- [12] Cheng C Y. Double-diffusive natural convection along a vertical wavy truncated cone in non-Newtonian fluid saturated porous media with thermal and mass stratification[J]. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2008, **35**(8): 985-990.
- [13] Hayat T, Sajid M. Analytic solution for axisymmetric flow and heat transfer of a second grade fluid past a stretching sheet[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, **50**(1/2): 75-84.

## Natural Convection of Non-Newtonian Power-Law Fluid Over Axisymmetric and Two-Dimensional Bodies of Arbitrary Shape in a Fluid-Saturated Porous Medium

S. M. Abdel-Gaied, M. R. Eid

(*Department of Science and Mathematics, Faculty of Education, Assiut University, The New Valley 72111, Egypt*)

**Abstract:** Numerical analysis of free convection coupled heat and mass transfer was presented for non-Newtonian power-law fluids with yield stress flowing over two-dimensional or axisymmetric body of arbitrary shape in a fluid-saturated porous medium. The governing boundary layer equations and boundary conditions were cast into a dimensionless form by similarity transformation and the resulting system of equations was solved by a finite difference method. The parameters studied were the rheological constants, the buoyancy ratio, and the Lewis number. Representative velocity as well as temperature and concentration profiles were presented and discussed. It was found that the result depend strongly on the values of the yield stress parameter, and the power-law index of non-Newtonian fluid.

**Key words:** non-Newtonian fluid; porous medium; yield stress