文章编号: 1000-0887(2011)02-0144-14

含线性阻尼的 2D 非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子*

姜金平[1,2]， 侯延仁[1]， 王小霞[2]

(1. 西安交通大学 理学院，计算地学研究中心，西安 710049;
2. 延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘要: 讨论了无界区域上含线性阻尼的 2D 非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子，通过验证共圈的拉回 $\mathscr{D}$-吸收集的存在性和拉回 $\mathscr{D}$-渐近紧性，证明了含线性阻尼的 2D 非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性，并给出了拉回吸引子的 Fractal 维数估计.

关 键 词: 拉回吸引子; g-Navier-Stokes 方程; 拉回渐近紧性; Fractal 维数; 线性阻尼

中图分类号: O175; O35 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.003

引　言

众所周知，对动力系统的渐近行为的认识是现代数学物理的重要问题之一. 对一个具有耗散性的系统来讲，解决这一问题的一种途径就是分析其吸引子的存在性和结构. 十多年来，Navier-Stokes 方程得到研究且 2D Navier-Stokes 方程的吸引子的存在性被众多学者所证明(参见文献[1-2]).

在本文中，我们考虑无界区域 $\Omega \subset R^2$ 上含有线性阻尼的 2D 非自治 g-Navier-Stokes 方程，其具有下列形式(参见文献[1-3]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}(t), & \text{在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中}, \\ \nabla\cdot(g\boldsymbol{u}) = 0, & \text{在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中}, \\ \boldsymbol{u}(x,t) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{1}$$

这里，$\boldsymbol{u}(x,t) \in R^2$ 和 $p(x,t) \in \mathbf{R}$ 表示速度和压力，$\nu > 0$，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x,t) \in (L^2(\Omega))^2$ 是和时间有关的外力项. $\alpha > 0$ 是线性阻尼常数，$\alpha\boldsymbol{u}$ 是与速度场平行的阻尼项，$0 < m_0 \leqslant g = g(x_1, x_2) \leqslant M_0$. 这里 $g = g(x_1,x_2)$ 是某类实值光滑函数. 当 $g = 1$，方程(1)即就是 2D Navier-Stokes 方程. 我们的目标就是利用拉回吸引子理论来研究方程(1)的弱解的长时间性态. 拉回吸引子

---

* 收稿日期: 2010-06-05; 修订日期: 2011-01-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871156)
作者简介: 姜金平(1974—)，男，陕西洛川人，副教授，博士(E-mail: yadxjjp@163.com);
侯延仁(1969—)，男，陕西延安人，教授，博士生导师(联系人. E-mail: yrhou@mail.xjtu.edu.cn).

理论是由研究自治系统的全局吸引子理论发展而来，其优越于一致吸引子理论(参见文献[13])之处是允许非自治项可以在合适的范数及与时间有关的函数中任意取值.

近年来，有关自治的 2D g-Navier-Stokes 的吸引子的研究已经取得了一些结果，如文献[1，3-5]. 在文献[1]中，Roh 借助半流理论研究了有界区域上 2D g-N-S 方程的全局吸引子的存在性；Kwak 在文献[5]中研究了周期边界和 Dirichlet 边界条件下 2D g-N-S 方程的全局吸引子的 Hausdorff 和 Fractal 维数；此外，在文献[3-4]中，我们不仅研究了含线性阻尼的 2D g-N-S 方程在 R^2 上的全局吸引子的存在性和其 Fractal 维数，而且研究了有界区域上 2D g-N-S 方程的拉回吸引子的存在性. 据我们所知，无界区域上非自治 2D g-N-S 方程的拉回吸引子的存在性尚未研究. 而最近，Caraballo 在文献[14]中介绍了非自治动力系统的拉回 $\mathscr{D}$-吸引子的概念并借助能量方程方法证明了拉回 $\mathscr{D}$-吸引子的存在性. Langa 在文献[23]中得到了 2D N-S 方程的拉回吸引子的 Fractal 维数. 受文献[14，23]的启发，在本文中，我们证明了无界区域上 2D g-N-S 方程的拉回吸引子的存在性并对其 Fractal 维数进行了估计.

本文结构安排如下：第 1 节，我们回顾了有关 2D g-Navier-Stokes 方程的主要概念和结果及拉回渐近紧性的概念；第 2 节，我们利用拉回渐近紧性获得了含线性阻尼的非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子存在性；第 3 节，我们估计了无界区域上含线性阻尼的非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的 Fractal 维数.

1 预 备 知 识

在本文中，Ω 指无界光滑区域，我们假设 Poincaré 不等式在 Ω 上成立，即存在 $\lambda_1 > 0$，使得

$$\int_\Omega \phi^2 g\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 g\mathrm{d}x, \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

设 $L^2(g) = (L^2(\Omega))^2$，其内积为

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} g\mathrm{d}x,$$

范数为 $|\cdot| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in L^2(g)$. 另设 $H_0^1(g) = (H_0^1(\Omega))^2$，其内积和范数分别为

$$((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{2} \nabla u_j\cdot\nabla v_j g\mathrm{d}x, \quad \|\cdot\| = ((\cdot,\cdot))^{1/2},$$

$$\boldsymbol{u} = (u_1,u_2), \ \boldsymbol{v} = (v_1,v_2) \in H_0^1(g).$$

由式(2)可知，范数 $\|\cdot\|$ 等价于 $H_0^1(\Omega)$ 的范数，设 $D(\Omega)$ 是在 Ω 中具有紧支集的 $\mathscr{C}^\infty$ 函数空间，$\aleph = \{\boldsymbol{v} \in (D(\Omega))^2 : \nabla\cdot g\boldsymbol{v} = 0$，在 Ω 中$\}$；H_g 是 $\aleph$ 在 $L^2(g)$ 中的闭包；V_g 是 $\aleph$ 在 $H_0^1(g)$ 中的闭包. H_g 和 V_g 各自具有 $L^2(g)$ 和 $H_0^1(g)$ 的内积和范数. 由式(2)可得

$$|\boldsymbol{u}|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|\boldsymbol{u}\|^2, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in V_g. \tag{3}$$

我们定义 g-Laplace 算子：

$$-\Delta_g \boldsymbol{u} = -\frac{1}{g}(\nabla\cdot g\nabla)\boldsymbol{u} = -\Delta\boldsymbol{u} - \frac{1}{g}\nabla g\cdot\nabla\boldsymbol{u}.$$

利用 g-Laplace 算子，我们将方程(1)写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta_g\boldsymbol{u} + \nu\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}. \tag{4}$$

我们定义 g-正交投射为 $P_g : L^2(g) \to H_g$ 和 g-Stokes 算子

$$A_g\boldsymbol{u} = -P_g\left(\frac{1}{g}(\nabla\cdot(g\nabla\boldsymbol{u}))\right).$$

将投射 P_g 作用于方程(4),可得式(1)的弱形式:设 $\boldsymbol{f}\in V_g$,$\boldsymbol{u}_0\in H_g$,有

$$\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;H_g)\cap L^2(0,T;V_g),\qquad T>0,\tag{5}$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\nu((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))+\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b_g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\nu(R\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle,$$

$$\forall\boldsymbol{v}\in V_g,\ \forall t>0,\tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0,\tag{7}$$

这里 $b_g: V_g\times V_g\times V_g\to\mathbf{R}$ 且有

$$b_g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^{2}\int u_i\frac{\partial v_j}{\partial x}w_j g\,\mathrm{d}x\tag{8}$$

和

$$R\boldsymbol{u}=P_g\left[\frac{1}{g}(\nabla g\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right],\qquad\forall\boldsymbol{u}\in V_g,$$

则式(6)和(7)等价于下面方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\nu A_g\boldsymbol{u}+\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+B\boldsymbol{u}+\nu R\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},\tag{9}$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0,\tag{10}$$

这里 $A_g: V_g\to V_g'$ 是 g-Stokes 算子且

$$\langle A_g\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})),\qquad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V_g,$$

$B(\boldsymbol{u})=B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=P_g(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 是双线性算子且 $B: V_g\times V_g\to V_g'$,

$$\langle B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w}\rangle=b_g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\qquad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V_g.$$

定义 g-Stokes 算子 $A_g: V_g\to V_g'$,B 和 R 满足下面不等式(参见文献[1-2]和文献[24]):

$$\|B(\boldsymbol{u})\|_{V_g'}\leqslant c|\boldsymbol{u}|\|\boldsymbol{u}\|,\ \|R\boldsymbol{u}\|_{V_g'}\leqslant\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|\boldsymbol{u}\|,\qquad\forall\boldsymbol{u}\in V_g.$$

下面命题是成立的(参见文献[25]).

命题 1 设 $\boldsymbol{f}\in L^2(g)$,$\boldsymbol{u}_0(x)\in H_g$,则存在一个唯一解

$$\boldsymbol{u}(x,t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H_g)\cap L^2(0,T;V_g)\cap C(\mathbf{R}^+;H_g)\qquad(\forall T>0),$$

使得式(6)和式(7)成立.

下面介绍一些概念和定义(参见文献[14]).

设 Γ 是非空集,定义一族映射 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为 $\theta_t:\Gamma\to\Gamma$ 满足

1) $\theta_0\gamma=\gamma$ 对所有 $\gamma\in\Gamma$;

2) $\theta_t(\theta_\tau\gamma)=\theta_{t+\tau}\gamma$ 对所有 $\gamma\in\Gamma$,t,$\tau\in\mathbf{R}$.则称算子 θ_t 为平移算子.

设 X 是具有度量 $d(\cdot,\cdot)$ 的度量空间,称 ϕ 是 X 上的 θ-共圈,即 $\phi:\mathbf{R}_+\times\Gamma\times X\to X$ 满足:

1) $\phi(0,\gamma,x)=x$ 对所有 $(\gamma,x)\in\Gamma\times X$;

2) $\phi(t+\tau,\gamma,x)=\phi(t,\theta_\tau\gamma,\phi(\tau,\gamma,x))$ 对所有 $t,\tau\in\mathbf{R}_+$,$(\gamma,x)\in\Gamma\times X$.

称 θ-共圈 ϕ 是连续的,若对所有 $(t,\gamma)\in\mathbf{R}_+\times\Gamma$,映射 $\phi(t,\gamma,\cdot): X\to X$ 是连续的.设 $\mathscr{P}(X)$ 是 X 的非空子集族,φ 是由 $\tilde{D}=\{D(\gamma):\gamma\in\Gamma\}\subset\mathscr{P}(X)$ 的所有集族构成的类,这里 $D(\gamma)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 的非空子集.

定义 1　设有非空子类 $\mathscr{D} \subset \varphi$，称 θ-共圈 ϕ 是拉回 $\mathscr{D}$-渐近紧的，如果对任意 $\gamma \in \Gamma, \tilde{D} \in \mathscr{D}$ 和任意序列 $t_n \to +\infty$，$x_n \in D(\theta_{-t_n}\gamma)$，序列 $\phi(t_n, \theta_{-t_n}\gamma, x_n)$ 具有一个收敛的子序列.

定义 2　称集族 $\tilde{C} = \{C(\gamma);\ \gamma \in \Gamma\} \in \varphi$ 是拉回 $\mathscr{D}$-吸收的，若对每一个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $\tilde{D} \in \mathscr{D}$，总存在 $t_0(\gamma, \tilde{D}) \geqslant 0$ 使得 $\phi(t, \theta_{-t}\gamma, D(\theta_{-t}\gamma)) \subset C(\gamma)$，$t \geqslant t_0(\gamma, \tilde{D})$. 这里 $C(\gamma)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 的非空子集.

我们定义 C_1 和 C_2 的 Hausdorff 半距离为

$$\operatorname{dist}(C_1, C_2) = \sup_{x \in C_1} \inf_{y \in C_2} d(x, y), \qquad C_1, C_2 \subset X.$$

定义 3　称集族 $\tilde{E} = \{E(\gamma);\ \gamma \in \Gamma\} \in \varphi$ 是拉回 $\mathscr{D}$-吸引子，若其满足下列条件：

1) 对任意 $\gamma \in \Gamma$，$E(\gamma)$ 是紧的；

2) $\tilde{E}$ 是拉回 $\mathscr{D}$-吸引的，即

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\phi(t, \theta_{-t}\gamma, D(\theta_{-t}\gamma)), E(\gamma)) = 0, \qquad \tilde{D} \in \mathscr{D}, \gamma \in \Gamma;$$

3) $\tilde{E}$ 是不变的，即对任意 $(t, \gamma) \in \mathbf{R}_+ \times \Gamma$，$\phi(t, \gamma, E(\gamma)) = E(\theta_t\gamma)$. 这里 $E(\gamma)$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 的非空子集.

对每一个 $\tilde{D} \in \varphi$ 和 $\omega \in \Omega$，定义 $\tilde{D}$ 在 ω 的 ω-极限集（在拉回意义下）为

$$\Lambda(\tilde{D}, \omega) = \bigcap_{s \geqslant 0} \left(\overline{\bigcup_{t \geqslant s} \phi(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_t \omega))} \right).$$

定理 1　设 θ-共圈 ϕ 是连续的和拉回 $\mathscr{D}$-渐近紧的，且存在 $\tilde{C} \in \mathscr{D}$ 是拉回 $\mathscr{D}$-吸收的，则 $E(\omega) = \Lambda(\tilde{C}, \omega)$，$\omega \in \Omega$ 是最小的全局拉回吸引子，即对集族 $\tilde{F} \in \varphi$，$F(\omega)$ 是闭的且 $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\phi(t, \theta_{-t}\omega, C(\theta_{-t}\omega)), F(\omega)) = 0$ 时，有 $E(\omega) \subset F(\omega)$ 成立.

2　无界区域上含线性阻尼的 2D 非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性

为了建立由式(6)所生成的非自治动力系统，我们令 $\Gamma = \mathbf{R}$，$\theta_t\tau = \tau + t$ 并定义

$$\phi(t, \tau, \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{u}(t + \tau;\ \tau, \boldsymbol{u}_0), \qquad \tau \in \mathbf{R}, t \geqslant 0, \boldsymbol{u}_0 \in H_g. \tag{11}$$

由式(6)解的唯一性可知：

$$\phi(t + s, \tau, \boldsymbol{u}_0) = \phi(t, s + \tau, \phi(s, \tau, \boldsymbol{u}_0)), \qquad \tau \in \mathbf{R}, t, s \geqslant 0, \boldsymbol{u}_0 \in H_g.$$

显然，对所有 $\tau \in \mathbf{R}$，$t \geqslant 0$，映射 $\phi(t, \tau, \cdot)$：$H_g \to H_g$ 是连续的，且 ϕ 在 H_g 上是连续的 θ-共圈. 下面我们将证明映射 ϕ 的弱连续性.

引理 1　设 $\{\boldsymbol{u}_{0n}\}_n$ 是 H_g 中弱收敛于 $\boldsymbol{u}_0 \in H_g$ 的序列，则

1) 对任意的 $\tau \geqslant 0$，$t \in \mathbf{R}$，

$$\phi(\tau, t - \tau, \boldsymbol{u}_{0n}) \text{ 在 } H_g \text{ 中弱收敛于 } \phi(\tau, t - \tau, \boldsymbol{u}_0); \tag{12}$$

2) 对任意的 $\tau < T$，

$$\phi(\cdot, -\tau, \tau, \boldsymbol{u}_{0n}) \text{ 在 } L^2(\tau, T; V_g) \text{ 中弱收敛于 } \phi(\cdot, -\tau, \tau, \boldsymbol{u}_0). \tag{13}$$

证明　设 $\phi(\tau, t - \tau, \boldsymbol{u}_{0n}) = \boldsymbol{u}_n(t)$，可知

$$\text{对任意的 } T \geqslant \tau, \boldsymbol{u}_n \text{ 在 } L^\infty(\tau, T, H_g) \cap L^2(\tau, T; V_g) \text{ 中是有界的，} \tag{14}$$

由于

$$\boldsymbol{u}_n' = \boldsymbol{f} - \nu A_g \boldsymbol{u}_n - \alpha \boldsymbol{u}_n - B(\boldsymbol{u}_n) - \nu R \boldsymbol{u}_n. \tag{15}$$

因为 A_g：$V_g \to V_g'$ 是有界线性算子，且

$$\| B(\boldsymbol{u}) \|_{V_g'} \leqslant c | \boldsymbol{u} | \| \boldsymbol{u} \|, \quad \| R\boldsymbol{u} \|_{V_g'} \leqslant \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} \| \boldsymbol{u} \|.$$

可得对任意的 $t \geqslant \tau$，$\{\boldsymbol{u}_n'\}$ 在 $L^2(\tau,T;V_g')$ 中有界.

由式(14)可知 $\forall\ T \geqslant \tau$，

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_n \xrightarrow{w^*} \boldsymbol{u}, & \text{在 } L^\infty(\tau,T;\ H_g) \text{ 中}, \\ \boldsymbol{u}_n \xrightarrow{w} \boldsymbol{u}, & \text{在 } L^2(\tau,T;V_g) \text{ 中}, \end{cases} \tag{16}$$

则 $\forall \boldsymbol{v} \in \aleph$ 和 $\tau < t \leqslant t + a \leqslant T, T > \tau$. 有

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v}) = \\ &\quad \int_t^{t+a} \langle \boldsymbol{u}_n'(s), \boldsymbol{v} \rangle \mathrm{d}s \leqslant \| \boldsymbol{v} \| a^{1/2} \| \boldsymbol{u}_n' \|_{L^2(\tau,T;V_g)} \leqslant c_T \| \boldsymbol{v} \| a^{1/2}, \end{aligned} \tag{17}$$

这里 c_T 是与 n 无关的正数. 那么，对 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t)$，有

$$\begin{aligned} &| \boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t) |^2 \leqslant c_T a^{1/2} \| \boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t) \|, \\ &\int_\tau^{T-a} | \boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t) |^2 \mathrm{d}t \leqslant c_T a^{1/2} \int_\tau^{T-a} \| \boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t) \| \mathrm{d}t \leqslant \\ &\quad 2c_T T^{1/2} a^{1/2} \left(\int_\tau^T \| \boldsymbol{u}_n(t) \|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2} \leqslant \tilde{c}_T a^{1/2}, \end{aligned}$$

这里 $\left(\int_\tau^T \| \boldsymbol{u}_n(t) \|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}$ 是有界的且正数 $\tilde{c}_T$ 独立于 n. 于是

$$\lim_{a\to 0} \sup_n \int_\tau^{T-a} | \boldsymbol{u}_n(t+a) - \boldsymbol{u}_n(t) |^2_{L^2(\Omega_r)} \mathrm{d}t = 0, \tag{18}$$

这里 $\Omega_r = \Omega \cap \{x \in R^2, |x| \leqslant r\}$. 此外由式(16)可知 $\boldsymbol{u}_n|_{\Omega_r}$ 在

$$L^\infty(\tau, T; L_g^2(\Omega_r)) \cap L^2(\tau, T; H_g^1(\Omega_r))$$

中有界，则可得子序列 $\boldsymbol{u}_{n'}$，使得

$$\forall T \geqslant \tau, \forall r > 0, \quad \boldsymbol{u}_{n'} \text{ 在 } L^2(\tau, T, H_g(\Omega_r)) \text{ 中强收敛于 } \boldsymbol{u}. \tag{19}$$

由此我们可以在式(9)中对 $\boldsymbol{u}_{n'}$ 取极限，这表明 $\boldsymbol{u}$ 是式(9)的满足初值条件 u_0 的解，由唯一性推出式(16)和式(19)对整个序列成立，故式(13)得证.

由式(19)可得，$(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v}) \to (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})$ 在 $t \in \mathbf{R}^+$ 和 $\boldsymbol{v} \in \aleph$ 时几乎处处成立，下面我们将证明对所有的 $t \in \mathbf{R}^+$，收敛性都成立.

由式(14)和式(17)可知，$(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v})$ 在 $[\tau, T]$ 上对所有的 $T \geqslant \tau$ 是等度有界和等度连续的，因此 $\forall t \in \mathbf{R}^+, \boldsymbol{v} \in \aleph$，且 $\aleph$ 在 H_g 中稠密，有 $(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v}) \to (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})$ 和 $(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v}) \to (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})$，$\forall t \in \mathbf{R}^+, \boldsymbol{v} \in \aleph$ 成立. 从而 $\boldsymbol{u}_n(t)$ 在 H_g 中弱收敛于 $\boldsymbol{u}(t)$. □

以后我们记 $\sigma = \nu\lambda_1$. 设 r: $\mathbf{R} \to (0, \infty)$ 满足

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{(m-\sigma)t} r^2(t) = 0, \tag{20}$$

对充分小的 $|\nabla g|_\infty$，$m = 2\alpha + \sigma + 2\sigma(|\nabla g|_\infty / (m_0 \lambda_1^{1/2}))$，我们用 $\sigma = \nu\lambda_1$ 表示所有 r 函数之集. 对 $r_{\tilde{D}} \in \mathscr{R}_\sigma$，使得 $D(t) \subset \bar{B}(0, r_{\tilde{D}}(t))$，用 $\mathscr{D}_\sigma$ 表示所有的集族 $\tilde{D} = \{D(t); t \in \mathbf{R}\} \subset \mathscr{P}(H_g)$ 构成的类，这里 $\bar{B}(0, r_{\tilde{D}}(t))$ 表示中心在 0，半径为 $r_{\tilde{D}}(t)$ 的 H_g 中的闭球.

引理 2　对所有 $t \in \mathbf{R}$，设 $\boldsymbol{f} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; V_g')$ 满足

$$\mathrm{e}^{m\tau - \sigma t} \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\sigma s} \| \boldsymbol{f}(s) \|_*^2 \mathrm{d}s < +\infty,$$

对充分小的 $|\nabla g|_\infty$，有 $m = 2\alpha + \sigma + 2\sigma(|\nabla g|_\infty / (m_0\ \lambda_1^{1/2}))$. 则由式(11)所对应的共圈 ϕ

在 $\mathscr{D}_\sigma$ 中存在一族拉回吸收集，这里 $\|\cdot\|_*$ 表示 V_g' 中的范数.

证明　设 $t\in\mathbf{R}$，$\tau\geqslant 0$，$\boldsymbol{u}_0\in H_g$. 记 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(t;t-\tau,\boldsymbol{u}_0)=\phi(\tau,t-\tau,\boldsymbol{u}_0)$. 由于

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^2=\langle\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\rangle=\langle\boldsymbol{f}-\nu A_g\boldsymbol{u}-\alpha\boldsymbol{u}-B\boldsymbol{u}-\nu R\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle=$$

$$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}\rangle-\nu\|\boldsymbol{u}\|^2-\alpha|\boldsymbol{u}|^2-b_g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})-\nu\left(\left(\frac{1}{g}\nabla g\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right),\boldsymbol{u}\right),$$

考虑到 $b_g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^2+2\nu\|\boldsymbol{u}\|^2=2\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}\rangle-2\alpha|\boldsymbol{u}|^2-2\nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right),$$

则在 $(C_0^\infty(t-\tau,+\infty))'$ 中，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2)+2\nu\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2=$$

$$\sigma\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2+2\mathrm{e}^{\sigma t}\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle-$$

$$2\alpha|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{e}^{\sigma t}-2\nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)\right)\mathrm{e}^{\sigma t}\leqslant$$

$$\sigma\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2+\nu\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{u}\|^2+\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{f}\|_*^2+$$

$$2\alpha|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{e}^{\sigma t}+\frac{2\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|\boldsymbol{u}\|^2\mathrm{e}^{\sigma t}.$$

由式(3)可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2)+\lambda_1\mathrm{e}^{\sigma t}\left(-\frac{2\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)|\boldsymbol{u}|^2-\sigma\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}|^2-2\alpha|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{e}^{\sigma t}\leqslant$$

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{f}\|_*^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2)+\mathrm{e}^{\sigma t}\left(-2\alpha-\sigma-\lambda_1\frac{2\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)|\boldsymbol{u}|^2\leqslant\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{f}\|_*^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2)+\mathrm{e}^{\sigma t}\left(-2\alpha-\sigma-2\sigma\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)|\boldsymbol{u}|^2\leqslant\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{f}\|_*^2.$$

设 $m=2\alpha+\sigma+2\sigma(|\nabla g|_\infty/(m_0\lambda_1^{1/2}))$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2)\leqslant m\,\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}|^2+\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{\sigma t}\|\boldsymbol{f}\|_*^2.$$

应用 Gronwall 引理，可得

$$\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2\leqslant\mathrm{e}^{\sigma(t-\tau)}|\boldsymbol{u}(t-\tau)|^2\mathrm{e}^{m\tau}+\frac{1}{\nu}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{m\tau}\mathrm{e}^{\sigma s}\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s,\tag{21}$$

$$\mathrm{e}^{\sigma t}|\boldsymbol{u}(t)|^2\leqslant\mathrm{e}^{\sigma(t-\tau)}|\boldsymbol{u}(t-\tau)|^2\mathrm{e}^{m\tau}+\frac{\mathrm{e}^{m\tau}}{\nu}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma s}\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s,\tag{22}$$

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2\leqslant\mathrm{e}^{(m-\sigma)\tau}|\boldsymbol{u}(t-\tau)|^2+\frac{\mathrm{e}^{m\tau-\sigma t}}{\nu}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma s}\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s.\tag{23}$$

设 $\tilde{D}\in\mathscr{D}_\sigma$，对所有的 $\boldsymbol{u}_0\in D(t-\tau)$，$t\in\mathbf{R}$，$\tau\geqslant 0$. 由式(23)可知

$$|\phi(\tau,t-\tau,\boldsymbol{u}_0)|^2\leqslant\mathrm{e}^{(m-\sigma)\tau}r_{\tilde{D}}^2(t-\tau)+\frac{\mathrm{e}^{m\tau-\sigma t}}{\nu}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma s}\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s.\tag{24}$$

记

$$(R_\sigma(t))^2 = \frac{2e^{m\tau-\sigma t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t} e^{\sigma s}\|f(s)\|_*^2 ds.$$

假设 H_g 中的一族闭球记为 $\tilde{B}_\sigma$，且

$$B_\sigma(t) = \{v \in H_g; |v| \leqslant R_\sigma(t)\}.$$

直接可得 $\tilde{B}_\sigma \in \mathscr{D}_\sigma$，由式(20)和式(24)可知，$\tilde{B}_\sigma$ 是共圈 ϕ 的拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 吸收集. □

引理 3 假设 $f(t)$ 满足引理 2 条件且对 $T^* \in \mathbf{R}$，$f \in L^\infty(-\infty, T^*; V_g')$，对充分小的 $|\nabla g|_\infty$，由式(11)定义的共圈 ϕ 是拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 渐近紧的.

证明 设 $\tilde{D} \in \mathscr{D}_\sigma$，$t \in \mathbf{R}$. 序列 $\tau_n \to \infty$，$u_{0n} \in D(t-\tau_n)$. 我们需要证明从序列 $\{\phi(\tau_n, t-\tau_n, u_{0n})\}$ 中可以抽取一个子列使得其在 H_g 中收敛. 由于集族 $\tilde{B}_\sigma$ 是拉回 $\mathscr{D}_\sigma$-吸收的，对每个 $k \geqslant 0$，存在 $\tau_{\tilde{D}}(k) \geqslant 0$，对所有的 $\tau \geqslant \tau_{\tilde{D}}(k)$，使得

$$\phi(\tau, t-\tau-k, D(t-\tau-k)) \subset B_\sigma(\tau-k), \tag{25}$$

对 $\tau \geqslant \tau_{\tilde{D}}(k) + k$，由式(25)可得

$$\phi(\tau-k, t-\tau, D(t-\tau)) \subset B_\sigma(\tau-k). \tag{26}$$

通过对角化过程，由式(26)不难得出，存在一个子列 $\{(\tau_{n'}, u_{0n'})\} \subset \{(\tau_n, u_{0n})\}$ 和子列 $\{w_k; k \geqslant 0\} \subset H_g$，使得对所有 $k \geqslant 0$ 和 $w_k \in B_\sigma(\tau-k)$，有 $\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{0n'})$ 在 H_g 中弱收敛于 w_k. 由引理 1 可知(这里 weak-lim 表示弱极限)，

$$\begin{aligned}
w_0 &= \text{weak-}\lim_{n'\to\infty}\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'}) = \\
&\text{weak-}\lim_{n'\to\infty}\phi(k, t-k, \phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'})) = \\
&\phi(k, t-k, \text{weak-}\lim_{n'\to\infty}\phi(k, t-k, \phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'})))
\end{aligned}$$

使得

$$\phi(k, t-k, w_k) = w_0, \quad \forall k \geqslant 0. \tag{27}$$

那么，由范数的下半连续性可得 $|w_0| \leqslant \lim_{n'\to\infty}\inf|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'})|$. 若能证明

$$\lim_{n'\to\infty} sup|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'})| \leqslant |w_0|, \tag{28}$$

则可得 $\lim_{n'\to\infty}|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'})| = |w_0|$. 由弱收敛性暗含 H_g 中从 $\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{0n'})$ 到 w_0 的强收敛性. 为了证明式(28)，我们考虑在 V_g 中构造 Hilbert 范数如下:

$$\begin{aligned}
[u, v] &= \frac{\alpha(u, v)}{2} + \nu((u, v)) + \frac{\nu}{2}\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)u, v\right) + \\
&\frac{\nu}{2}\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)v, u\right) - \frac{\nu\lambda_1}{4}(u, v).
\end{aligned}$$

进一步，只须 $|\nabla g|_\infty$ 充分小以使 $|\nabla g|_\infty/(m_0\lambda_1^{1/2}) < 1/4$，则由式(3)可得

$$\begin{aligned}
[u]^2 &= [u, u] = \frac{\alpha|u|^2}{2} + \nu\|u\|^2 + \nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)u, u\right) - \frac{\nu\lambda_1}{4}|u|^2 \geqslant \\
&\frac{\alpha|u|^2}{2} + \nu\|u\|^2 + \nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)u, u\right) - \frac{\nu}{4}\|u\|^2 \geqslant \\
&\frac{\alpha|u|^2}{2} + \nu\|u\|^2 - \nu\left(\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}} + \frac{1}{4}\right)\|u\|^2 \geqslant \\
&\frac{\alpha}{2}|u|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 \geqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2,
\end{aligned}$$

$$[u]^2 = [u, u] \leqslant \frac{\alpha|u|^2}{2} + \nu\|u\|^2 + \nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)u, u\right) \leqslant$$

$$\frac{\alpha|\boldsymbol{u}|^2}{2}+\nu\|\boldsymbol{u}\|^2+\frac{\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|\boldsymbol{u}\|^2=\left(\frac{\alpha}{2\lambda_1}+\nu+\frac{\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)\|\boldsymbol{u}\|^2.$$

因此对充分小的 $|\nabla g|_\infty$，有

$$\frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2\leqslant[\boldsymbol{u}]^2\leqslant\left(\frac{\alpha}{2\lambda_1}+\nu+\frac{\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)\|\boldsymbol{u}\|^2,\qquad\forall\boldsymbol{u}\in V_g.$$

则 $[\cdot,\cdot]$ 是 V_g 上的内积，其范数为 $[\cdot]=[\cdot,\cdot]^{1/2}$，与 V_g 中的范数 $\|\boldsymbol{u}\|$ 等价.

由引理 2 可得，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^2+2\nu\|\boldsymbol{u}\|^2=2\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}\rangle-2\alpha|\boldsymbol{u}|^2-2\nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right),$$

$$2[\boldsymbol{u}]^2=\alpha|\boldsymbol{u}|^2+2\nu\|\boldsymbol{u}\|^2+2\nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g},\nabla\right)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right)-\frac{\nu\lambda_1}{2}|\boldsymbol{u}|^2.$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^2+\left(\alpha+\frac{\nu\lambda_1}{2}\right)|\boldsymbol{u}|^2=2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})-2[\boldsymbol{u}]^2.$$

由常数变易公式可得

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2=|\boldsymbol{u}_0|^2\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)\tau}+2\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}((\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}(\xi))-[\boldsymbol{u}(\xi)]^2)\mathrm{d}\xi.$$

令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)=\phi(\tau,t-\tau,\boldsymbol{u}_0)$，则对所有的 $t\in\mathbf{R}$，$\tau\geqslant0$ 和 $\boldsymbol{u}_0\in H_g$，

$$\begin{aligned}&|\phi(\tau,t-\tau,\boldsymbol{u}_0)|^2=\\&\quad|\boldsymbol{u}_0|^2\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)\tau}+2\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}(\langle\boldsymbol{f}(\xi),\phi(t-\xi+\tau,t-\tau,\boldsymbol{u}_0)\rangle-\\&\quad[\phi(t-\xi+\tau,t-\tau,\boldsymbol{u}_0)]^2)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

于是，对所有的 $k\geqslant0$ 和 $\tau_{n'}\geqslant k$，

$$\begin{aligned}&|\phi(\tau_{n'},t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'})|^2=|\phi(k,t-k,\phi(\tau_{n'},t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'}))|^2=\\&\quad\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)k}|\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'})|^2+\\&\quad2\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}\langle\boldsymbol{f}(\xi),\phi(t-\xi+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'}))\rangle\mathrm{d}\xi-\\&\quad2\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}[\phi(t-\xi+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'}))]^2\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{29}$$

对所有的 $\tau_{n'}\geqslant\tau_{\tilde{D}}(k)+k,k\geqslant0$，由式(26)可得 $\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'})\in B_\sigma(t-k)$. 则

$$\begin{aligned}&\limsup_{n'\to\infty}(\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)k}|\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'})|^2)\leqslant\\&\quad\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)k}R_\sigma^2(t-k),\qquad k\geqslant0.\end{aligned}\tag{30}$$

另一方面，由于 $\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'})$ 在 H_g 中弱收敛于 w_k，由引理 1 可得

$$\phi(\cdot-t+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'}))\to\phi(\cdot-t+k,t-k,\boldsymbol{w}_k).\tag{31}$$

在 $L^2(t-k,t;V_g)$ 中弱收敛. 由于 $\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}\boldsymbol{f}(\xi)\in L^2(t-k,t;V_g')$，由式(31)可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}\langle\boldsymbol{f}(\xi),\phi(t-\xi+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},\boldsymbol{u}_{0n'}))\rangle\mathrm{d}\xi=\\&\quad\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}\langle\boldsymbol{f}(\xi),\phi(t-\xi+k,t-k,\boldsymbol{w}_k)\rangle\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{32}$$

而且 $\left(\int_{t-k}^{t}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)}[\boldsymbol{v}(\xi)]^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}$ 定义了在 $L^2(t-k,t;V_g)$ 中的范数，其等价于通常的范数，故由式(31)可得

$$\int_{t-k}^{t} e^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)} [\phi(t-\xi+k,t-k,w_k)]^2 d\xi \leqslant$$

$$\liminf_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t} e^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)} [\phi(t-\xi+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{0n'}))]^2 d\xi. \tag{33}$$

则由式(29)、(30)、(32)和(33)可知

$$\limsup_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'},t-\tau_{n'},u_{0n'})|^2 \leqslant$$

$$e^{-(\alpha+\sigma/2)k} R_\sigma^2(t-k) + 2\int_{t-k}^{t} e^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)} (\langle f(\xi),\phi(t-\xi+k,t-k,w_k)\rangle -$$

$$[\phi(t-\xi+k,t-k,w_k)]^2) d\xi. \tag{34}$$

于是由式(27)和(29),可得

$$|w_0|^2 = |\phi(k,t-k,w_k)|^2 =$$

$$|w_k|^2 e^{-(\alpha+\sigma/2)k} + 2\int_{t-k}^{t} e^{-(\alpha+\sigma/2)(t-\xi)} (\langle f(\xi),\phi(t-\xi+k,t-k,w_k)\rangle -$$

$$[\phi(t-\xi+k,t-k,w_k)]^2) d\xi. \tag{35}$$

由式(34)和(35)可知,

$$\limsup_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'},t-\tau_{n'},u_{0n'})|^2 \leqslant$$

$$e^{-(\alpha+\sigma/2)k} R_\sigma^2(t-k) + |w_0|^2 + |w_k|^2 e^{-(\alpha+\sigma/2)k} \leqslant$$

$$e^{-(\alpha+\sigma/2)k} R_\sigma^2(t-k) + |w_0|^2.$$

由于

$$e^{-(\alpha+\sigma/2)k} R_\sigma^2(t-k) = \frac{2e^{(-\sigma/2+\alpha)k+m\tau-\sigma t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t-k} e^{\sigma\xi} \|f(\xi)\|_*^2 d\xi \to 0, \qquad k\to+\infty,$$

由最后一个不等式易得式(28).则共圈 ϕ 在 H_g 中强收敛于 w_0,所以 ϕ 在 H_g 中是拉回渐近紧的. □

由于 ϕ 在 H_g 中有有界的拉回 $\mathscr{D}_\sigma$-吸收集,由定理 1 可得拉回吸引子的存在性.

定理 2 设 $f(t)$ 满足引理 2 的条件且对 $T^* \in \mathbf{R}$ 和充分小的 $|\nabla g|_\infty$,$f \in L^\infty(-\infty,T^*;V_g')$.则对式(11)所定义的共圈 ϕ,存在唯一的属于 $\mathscr{D}_\sigma$ 的拉回吸引子. □

3 含线性阻尼的 2D g-N-S 方程的拉回吸引子的 Fractal 维数

设 $F: V_g\ \mathbf{R}\to V_g'$ 是一族给定的非线性算子,使得对所有的 $\tau\in\mathbf{R}$ 和 $u_0\in H_g$,总有唯一的函数 $u(t) = u(t;\tau,u_0)$ 满足

$$u\in L^2(\tau,T;V_g)\cap C([\tau,T];H_g),\ F(u(t),t)\in L'(\tau,T;V_g'), \qquad \forall T>\tau,$$

$$\frac{du}{dt} = F(u(t),\tau), \qquad t>\tau, \tag{36}$$

$$u(\tau) = u_0. \tag{37}$$

定义 $U(t,\tau)u_0 = u(t;\tau,u_0)$,$\tau\leqslant t$,$u_0\in H_g$.设 $T^*\in\mathbf{R}$,假设存在 H_g 中一族非空的紧子集 $\{K(t): t\leqslant T^*\}$ 且满足不变性:$U(t,\tau)K(\tau) = K(t)$,$\forall \tau\leqslant t\leqslant T^*$.则有

引理 4(参见文献[23]) 设

$$\bigcup_{\tau\leqslant T^*} K(\tau)$$

在 H_g 中相对紧,则存在 q_j,$j=1,2,\cdots$,使得 $\tilde{q}_j\leqslant q_j$,$\forall j\geqslant 1$,

$$q_{n_0}\geqslant 0,\ q_{n_0+1}<0, \qquad n_0\geqslant 1,$$

$$q_j \leqslant q_{n_0} + (q_{n_0} - q_{n_0+1})(n_0 - j), \qquad \forall j = 1, 2, \cdots,$$

则

$$d_F(K(\tau)) \leqslant d_0 := n_0 + \frac{q_{n_0}}{q_{n_0} - q_{n_0+1}}, \qquad \forall \tau \leqslant T^*.$$

这里

$$\tilde{q}_j = \lim_{T\to+\infty}\sup \sup_{\tau\leqslant T^*} \sup_{u_0\in K(\tau-T)} \left(\frac{1}{T}\int_{\tau-T}^{\tau} Tr_j(F'(U(s,\tau-T)\boldsymbol{u}_0, s))\,\mathrm{d}s\right),$$

$$F': (\boldsymbol{u}, t) \in V_g(-\infty, T^*] \to F'(\boldsymbol{u}, t) \in \mathscr{L}(V_g, V_g').$$ □

下面我们给出主要结果.

定理 3 设 $\boldsymbol{f} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; V_g')$ 满足

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\sigma s} \|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s < +\infty, \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

则拉回吸引子的维数满足

$$d_F(A(\tau)) \leqslant \max\left(1, \frac{c}{\lambda_1 \nu^4 \tilde{m} m_1} \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^\infty(-\infty, T^*; V_g')}\right), \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}.$$

对充分小的

$$|\nabla g|_\infty, \tilde{m} = 1 - \frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} \text{ 和 } m_1 = 1 - \frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}} + \frac{2\alpha}{\sigma}.$$

证明 由于式(6)和(7)可以写成式(36)和(37)的形式,对每一个 $t \leqslant T^*$,设

$$F(\boldsymbol{u}, t) = -\nu A_g \boldsymbol{u} - \alpha \boldsymbol{u} - B(\boldsymbol{u}) - \nu R\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t).$$

映射 $F(\cdot, t)$ 在 V_g 中 Fréchet 可微且

$$F'(\boldsymbol{u}, t)\boldsymbol{v} = -\nu A_g \boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{v} - B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \nu(R\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_g \tag{38}$$

是连续的. 设 $\boldsymbol{u}_0, v_0^1, \cdots, v_0^j \in H_g$ 且 $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_j(s), s \geqslant \tau$ 是 H_g 中的一组正交基,由式(36)的一组解 $\boldsymbol{v}(s; \tau, \boldsymbol{u}_0, v_0^1), \cdots, \boldsymbol{v}(s; \tau, \boldsymbol{u}_0, v_0^j)$ 可生成 H_g 的相应子空间. 设 $\varphi_i(s) \in V_g$ 在 $s \geqslant \tau$ 时几乎处处成立. 下面定义(参见文献[22])

$$Tr_j(F'(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0, s)) = \sup_{\substack{v_0^i \in H_g, \\ |v_0^i| \leqslant 1,\, i\leqslant j}} \left(\sum_{i=1}^{j} (F'(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0, s)\varphi_i, \varphi_i)\right).$$

由于

$$\sum_{i=1}^{j} (F'(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0, s)\varphi_i, \varphi_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{j} (-\nu A_g \varphi_i - \alpha(\varphi_i, \varphi_i) - B(\varphi_i, U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0, \phi_i) - \nu R(\varphi_i, \varphi_i)).$$

由 Schwarz 不等式,

$$\left|\sum_{i=1}^{j} B(\varphi_i, U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0, \varphi_i)\right| =$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{j} \sum_{k,l=1}^{2} \varphi_{ik} D_k(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0)_l(x)\varphi_{il}(x) g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\int_\Omega |\operatorname{grad}(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0)(x)\rho(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|U(s,\tau)\|\,|\rho|,$$

这里,$\rho(x) = \sum_{i=1}^{j} |\sqrt{g}\varphi_i(x)|^2$. 根据 Lieb-Thirring 不等式,

$$|\rho(\tau)|^2=\int_\Omega\rho^2(x,\tau)g(x)\mathrm{d}x\leqslant c\sum_{i=1}^{j}\|\varphi_i\|^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{j}\nu(R\varphi_i,\varphi_i)\right|=\left|\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{\nu}{g}(\nabla g\cdot\nabla\varphi_i)\varphi_i\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{j}\frac{\nu|\nabla g|_\infty}{m_0}\|\varphi_i\||\varphi_i|.$$

由 Schwarz 不等式和式(3)可得

$$\sum_{i=1}^{j}(F'(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0,s)\varphi_i,\varphi_i)\leqslant$$

$$-\nu\sum_{i=1}^{j}\|\varphi_i\|^2-\sum_{i=1}^{j}\alpha|\varphi_i|^2+\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|\rho+\sum_{i=1}^{j}\nu\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\|\varphi_i\||\varphi_i|\leqslant$$

$$-\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{j}\|\varphi_i\|^2-\alpha j+\frac{c}{2\nu}\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2+\sum_{i=1}^{j}\nu\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|\varphi_i\|^2\leqslant$$

$$-\frac{\nu\lambda_1}{2}\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)\sum_{i=1}^{j}|\varphi_i|^2-\alpha j+\frac{c}{2\nu}\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2=$$

$$-\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}+\frac{2\alpha}{\sigma}\right)j+\frac{c}{2\nu}\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2.$$

所以

$$Tr_j(F'(U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0,s))\leqslant-\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}+\frac{2\alpha}{\sigma}\right)j+\frac{c}{2\nu}\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2.$$

另一方面，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^2+2\nu\|\boldsymbol{u}\|^2+2\alpha|\boldsymbol{u}|^2=2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})-2\nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|^2+2\nu\|\boldsymbol{u}\|^2\leqslant2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})-2\nu\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right),$$

$$|U(t,\tau)\boldsymbol{u}_0|^2+2\nu\int_\tau^t\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$|\boldsymbol{u}_0|^2+2\int_\tau^t(\boldsymbol{f}(s),U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0)\mathrm{d}s-$$

$$2\nu\int_\tau^t\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0,U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\right)\mathrm{d}s.$$

由于

$$2\int_\tau^t(\boldsymbol{f}(s),U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\nu\int_\tau^t\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\nu}\int_\tau^t\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\mathrm{d}s.$$

则

$$\nu\int_\tau^t\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2\mathrm{d}s\leqslant|\boldsymbol{u}_0|^2+\frac{1}{\nu}\int_\tau^t\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\mathrm{d}s-$$

$$2\nu\int_\tau^t\left(\left(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla\right)U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0,U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$|\boldsymbol{u}_0|^2+\frac{1}{\nu}\int_\tau^t\|\boldsymbol{f}(s)\|_*^2\mathrm{d}s+\frac{2\nu|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\int_\tau^t\|U(s,\tau)\boldsymbol{u}_0\|^2\mathrm{d}s.$$

可得

$$\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)\nu\int_\tau^t \|U(s,\tau)u_0\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$|u_0|^2+\frac{1}{\nu}\int_\tau^t\|f(s)\|_*^2\mathrm{d}s.$$

设 $\tilde{m}=1-2|\nabla g|_\infty/(m_0\lambda_1^{1/2})$，则

$$\int_\tau^t\|U(s,\tau)u_0\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{|u_0|^2}{\tilde{m}\nu}+\frac{1}{\tilde{m}\nu^2}\int_\tau^t\|f(s)\|_*^2\mathrm{d}s.$$

设 $M=\|f\|^2_{L^\infty(-\infty,T^*;V_g')}$ 且 $m_1=1-2|\nabla g|_\infty/(m_0\lambda_1^{1/2})+2\alpha/\sigma$，从而有

$$\tilde{q}_j=-\frac{\sigma m_1}{2}j+\frac{c}{2\tilde{m}\nu^3}\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau-T}^\tau\|f(s)\|_*^2\mathrm{d}s\leqslant-\frac{\sigma m_1}{2}j+\frac{cM}{2\tilde{m}\nu^3}.$$

若 $M<\sigma\tilde{m}m_1\nu^3/c$，则取

$$q_j=-\frac{\sigma m_1}{2}(j-1),\qquad j=1,2,\cdots;n_0=1.$$

可得

$$d_F(A_\sigma(t))\leqslant 1,\qquad\forall\tau\leqslant T^*.\tag{39}$$

若 $M>\sigma\tilde{m}m_1\nu^3/c$，则取

$$q_j=-\frac{\sigma m_1}{2}j+\frac{cM}{2\tilde{m}\nu^3},\qquad j=1,2,\cdots;n_0=1+\left[\frac{cM}{\sigma\tilde{m}m_1\nu^3}-1\right],$$

$[\cdot]$ 在这里表示取整. 由于

$$\bigcup_{t\leqslant T^*}A(\tau)$$

在 H_g 中相对紧，其证明过程与文献[23]的定理3.6相似，故在此略去. 由引理4可得，

$$d_F(A_\sigma(t))\leqslant\frac{cM}{\sigma\tilde{m}m_1\nu^3}=$$
$$\frac{cM}{\lambda_1\nu^4(1-(2|\nabla g|_\infty)/(m_0\lambda_1^{1/2}))(1-(2|\nabla g|_\infty)/(m_0\lambda_1^{1/2})+2\alpha/\sigma)},$$
$$\forall\tau\leqslant T^*.\tag{40}$$

由式(39)和(40)可得

$$d_F(A(\tau))\leqslant\max\left(1,\frac{c}{\lambda_1\nu^4\tilde{m}m_1}\|f\|^2_{L^\infty(-\infty,T^*;V_g')}\right),\qquad\forall\tau\in\mathbf{R}.\qquad\square$$

4　结　　论

在本文的第2节，我们证明了无界区域上具有齐次Dirichlet边界条件且含线性阻尼的非自治2D g-Navier-Stokes方程在相空间 H_g 上由其对应的共圈所生成的拉回吸引子的存在性(参见定理2.4)，这一结论的创新之处在于由引理2所给的假设相对较弱，即非自治外力项所满足的条件较弱. 我们避免了对无界区域的非紧性的讨论，而证明有限维的拉回吸引子的存在性的关键是如何获取过程的拉回渐近紧性.

在本文的第3节，我们估计了非自治2D g-Navier-Stokes方程的拉回吸引子的维数. 当 $g=1$ 时，2D g-Navier-Stokes方程就是通常的2D Navier-Stokes方程，当 $g=1$ 且 $\alpha=0$ 时，我们在本文中得到的维数与在文献[23]的结果一致，这表明我们的结果是文献[23]的相应结果的推广.

致谢 作者衷心感谢编辑和审稿人提出的宝贵意见和建议及西安交通大学专项基金(2009xjtujc30)的资助.

参考文献:

[1] Roh J. g-Navier-Stokes equations[D]. Ph D Dissertation. Minnesota: University of Minnesota, 2001.

[2] Roh J. Dynamics of the g-Navier-Stokes equations[J]. *J Differential Equations*, 2005, **211**(2): 452-484.

[3] JIANG Jin-ping, HOU Yan-ren. The global attractor of g-Navier-Stokes equations with linear dampness on R^2[J]. *Appl Math Comput*, 2009, **215**(3): 1068-1076.

[4] 姜金平, 侯延仁. 有界区域上 2D 非自治 g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(6): 670-680. (JIANG Jin-ping, HOU Yan-ren. Pullback attractor of 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations on some bounded domains[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2010, **31**(6): 697-708.)

[5] Kwak M, Kwean H, Roh J. The dimension of attractor of the 2D g-Navier-Stokes equations[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **315**(2): 436-461.

[6] Babin A V, Vishik M I. Attractors of partial differential equations in an unbounded domain[J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1990, **116**: 221-243.

[7] Constantin P, Foiaş C, Temam R. *Attractor Representing Turbulent Flows*[M]. Mem Amer Math Soc, 1985, **53**(314): 1-67.

[8] Rosa R. The global attractor for the 2D-Navier-Stokes flow in some unbounded domain[J]. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1998, **32**(1): 71-85.

[9] Cheban D N, Duan J. Almost periodic solutions and global attractors of nonautonomous Navier-Stokes equation[J]. *J Dyn Differ Equation*, 2004, **16**(1): 1-34.

[10] Cheban D N. *Global Attractors of Non-Autonomous Dissipative Dynamical Systems*[M]. Singapore: World Scientific, 2004.

[11] Zhong C K, Yang M H, Sun C Y. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations[J]. *J Diff Eqns*, 2006, **223**(2): 367-399.

[12] Raugel G, Sell G R. Navier-Stokes equations on thin 3D domains—Ⅰ: global attractors and global regularity of solutions[J]. *J Amer Math Soc*, 1993, **6**(3): 503-568.

[13] Hou Y R, Li K T. The uniform attractor for the 2D non-autonomous Navier-Stokes flow in some unbounded domain[J]. *Nonlinear Analysis*, 2004, **58**(5/6): 609-630.

[14] Caraballo T, Kloeden P E, Real J. Pullback and forward attractors for a damped wave equation with delays[J]. *Stochastics and Dynamics*, 2004, **4**(3): 405-423.

[15] Caraballo T, Real J. Attractors for 2D Navier-Stokes models with delays[J]. *J Differ Equation*, 2004, **205**(2): 271-297.

[16] Caraballo T, Kloden P E, Marin-Rubio P. Global and pullback attractor of set-valued skew product flows[J]. *Ann Mat*, 2006, **185**(20): S23-S45.

[17] Caraballo T, Lukaszewicz G, Real J. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems[J]. *Nonlinear Anal*, 2006, **64**(3): 484-498.

[18] Caraballo T, Real J, Chueshov I D. Pullback attractors for stochastic heat equations in materials with memory[J]. *Discrote Contin Dyn Syst Ser B*, 2008, **9**(3): 525-539.

[19] Kloeden P E. Pullback attractors in nonautonomous difference equations[J]. *J Differ Equations Appl*,

2006, **6**(1): 33-52.

[20] Kloeden P E. Pullback attractors of nonautonomous semidynamical systems [J]. *Stoch Dyn*, 2003, **3**(1): 101-112.

[21] Song H T, Wu H Q. Pullback attractor of nonautonomous reaction-diffusion equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **325**(2): 1200-1215.

[22] Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics* [M]. Vol **68**. Appl Math Sci. New York: Springer-Verlag, 1988.

[23] Langa J A, Lukaszewicz G, Real J. Finite fractal dimension of pullback attractor for non-autonomous 2D Navier-Stokes equations in some unbounded domains [J]. *Nonlinear Anal*, 2007, **66**(3): 735-749.

[24] Sell G R, You Y. *Dynamics of Evolutionary Equations* [M]. Applied Mathematical Sciences. Vol **143**. New York: Springer, 2002.

[25] Bae H, Roh J. Existence of solutions of the g-Navier-Stokes equations [J]. *Taiwanese J Math*, 2004, **8**(1): 85-102.

[26] Temam R. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis* [M]. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2001.

Pullback Attractor of 2D Nonautonomous g-Navier-Stokes Equations With Linear Dampness

JIANG Jin-ping[1,2], HOU Yan-ren[1], WANG Xiao-xia[2]

(1. *School of Science, Centre of Computational Geoscience, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *P. R. China*;

2. *College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an, Shaanxi* 716000, *P. R. China*)

Abstract: The pullback attractors for the 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations with linear dampness on some unbounded domains were investigated. The existence of the pullback attractors was proved by verifying the existence of pullback $\mathscr{D}$-absorbing sets with cocycle and obtaining the pullback $\mathscr{D}$-asymptotic compactness. Furthermore, the estimation of the fractal dimensions for the 2D g-Navier-Stokes equations was given.

Key words: pullback attractor; g-Navier-Stokes equation; pullback asymptotic compactness; fractal dimensions; linear dampness