

柱状纤维上超薄液膜的线性稳定性分析*

赵陆海波, 胡国辉, 周哲玮

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

(本刊编委周哲玮来稿)

摘要: 运用线性理论分析了粘性超薄液膜沿柱状纤维垂直下落的稳定性特征, 研究了厚度低于 100 nm 的薄膜在外力驱动下的流动以及 van der Waals 力的影响. 结果表明随着薄膜相对厚度的下降, 纤维表面的曲率将使得线性扰动的发展得到抑制, 而 van der Waals 力促进扰动的增长, 这一竞争机制导致了增长率随薄膜相对厚度非单调的变化. 还得到了流动的绝对和对流不稳定分区. 结果表明 van der Waals 力扩大绝对不稳定流动区域, 表面张力也会有利于绝对不稳定的发展, 而外驱动力正好起到相反的作用.

关键词: 柱状纤维; 超薄液膜; van der Waals 力; 稳定性

中图分类号: O317+.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.001

引 言

薄膜流动是一种典型的、基于简单几何结构的低速开式流动, 它蕴含着丰富的动力学行为, 诸如界面不稳定性、薄膜破裂、接触线的运动等. 目前已有大量基于润滑近似的理论对固体基板上液体薄膜流动的流动机理进行了研究^[1].

当流体表面是圆柱曲面时, 如自由射流等问题得到了广泛的关注, 根据 Rayleigh 发现的机制, 可知表面张力会引起界面的失稳^[2], 导致液滴或水珠的形成. 曲面上的薄膜流动是与之相关的一类有趣的流体力学问题. 以往的文献关注和研究了柱状纤维上的涂布流动在外力(如重力、静电力等)作用下下落的过程, 以及表面活性剂的影响. Kapitza 父子^[3]最先探讨了包裹在静止的垂直圆柱固体上液体薄膜的动力学过程. 通过人为对来流速度施加扰动, 实验可以观察到两种类型的波, 即所谓“周期波”和“孤立波”. 流体射流和细流破碎的动力学性质和尺度的研究不断地引起人们的兴趣, Eggers 给出了近来文献的综述^[4]. Kliakhandler 等人通过把高分辨率的 Kodak MegaPlus 1.6 数码相机放置在适合的位置, 研究了厚度至少是纤维半径 2 倍的薄膜沿细线下落的流动. 他们的研究揭示了在低惯性力作用下流动丰富的动力学行为, 并描述了当流量改变时 3 种不同的界面失稳模式形成的液滴流动^[5]. 最近, Duprat 等人发现了一个

* 收稿日期: 2010-10-06; 修订日期: 2010-12-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772107; 10872122); 上海市教委科研创新资助项目(08YZ10); 上海高校创新团队资助项目

作者简介: 赵陆海波(1986—), 男, 上海人, 硕士生(联系人. Tel: +86-21-56332557; E-mail: zhaoluhaibo@163.com).

重要的现象,即假如纤维半径足够小,对于较大或较小的薄膜厚度产生对流不稳定,然而对于中间范围的薄膜厚度可以观察到绝对不稳定^[6]。

目前大量的研究对液体薄膜沿纤维垂直下落的过程进行了理论探讨,其中大部分的工作重点关注对 Navier-Stokes 方程进行简化得到的数学模型。这些模型大致可以被归类为几种。第 1 种情况假设薄膜厚度远小于纤维半径。此时,可以采用在平板上的薄膜流动中被广泛应用的润滑近似来简化流体力学方程^[5-11]。Craster 和 Matar 对这些模型的结果进行了详细的综述^[12]。当薄膜厚度与纤维半径相当时,Kliakhandler 等^[5]假设薄膜厚度远小于特征毛细长度而不是纤维半径,提出了另一种模型。然而,他们的模型未能很好地预测液滴间距较远时的动力学行为。为了克服这个缺陷,Craster 和 Matar 推导了一个改进的模型,获得的数值结果与已有的实验符合得更好^[12]。Ruyer-Ouil 等^[13]重新研究这个问题,并给出了两个耦合方程的推广模型,并通过实验对其时空动力学行为进行了更准确的预测。

van der Waals 力对于厚度低于 100 nm 的超薄膜的作用是至关重要的。对于固体平板上的超薄液膜流动,以前的研究表明 van der Waals 力加强了线性扰动的发展,薄膜厚度在有限的时间内减小到 0,最终导致了薄膜的破裂形成洞^[1]。然而,目前对于曲面上薄膜流动的相关研究相对还较少。本文的研究目的是将 Craster 和 Matar^[12]的工作加以推广,在方程中引入 van der Waals 力,探讨其对液体超薄膜在圆柱状纤维上涂布过程的影响。

1 数学模型

考虑一种粘性为 μ , 密度为 ρ 的 Newton 流体,沿半径 $r = a$ 的圆柱状纤维在某种体力 f 驱动下沿 z 方向流动(见图 1)。假设周围气体的影响可以忽略。从纤维的中心处开始计算,初始状态的薄膜半径为 h 。

液膜的流动过程可以由轴对称的 Navier-Stokes 方程来描述:

$$u_t + uu_r + ww_z = -\frac{1}{\rho}(p + \phi)_r + \frac{\mu}{\rho}\left(u_{rr} + u_{zz} + \frac{1}{r}u_r - \frac{u}{r^2}\right), \quad (1)$$

$$w_t + uw_r + ww_z = f - \frac{1}{\rho}(p + \phi)_z + \frac{\mu}{\rho}\left(w_{rr} + w_{zz} + \frac{1}{r}w_r\right), \quad (2)$$

这里, t 表示时间, u 和 w 分别是径向和轴向的速度分量, p 是压力, f 是轴向的外力,可以是重力、静电力等。方程中的下标代表偏导。

方程(2)中 ϕ 表示液体和固体互相作用势。对于无限长柱状结构,文献[14-15]中推导了分子间作用势的解析表达式:

$$\phi(s) = -\frac{\pi}{6}\varepsilon_{\text{ls}}\sigma_{\text{ls}}^6\rho_s\frac{1}{(s-\alpha)^3} = \frac{A}{(s-\alpha)^3}, \quad (3)$$

这里, $\sigma_{\text{ls}} > 0$ 和 $\varepsilon_{\text{ls}} > 0$ 分别表示排斥核以及液固分子间作用常数, ρ_s 表示纤维的密度, A 表示分子间作用力的强弱,通常被称为 Hamaker 常数。由于相互作用势 ϕ 仅是薄膜厚度 $s(z, t)$ 的函数,它在方程(1)中对于径向坐标 r 的梯度为 0。

柱坐标下的连续性方程为

$$\frac{1}{r}(ru)_r + w_z = 0. \quad (4)$$

在纤维表面 $r = \alpha$ 处的无滑移条件为 $u = w = 0$, 这里 $\alpha = a/h < 1$ 也是纤维半径与薄膜厚度的比值。

在自由界面 $r = s(z, t)$ 处, 法向应力平衡条件是

$$p - \frac{2\mu}{(1 + s_z^2)} (s_z^2 w_z - s_z (u_z + w_r) + u_r) = \gamma \left(\frac{1}{s(1 + s_z^2)^{1/2}} - \frac{s_{zz}}{(1 + s_z^2)^{3/2}} \right); \quad (5)$$

切向应力平衡条件是

$$(1 - s_z^2)(u_z + w_r) + 2s_z(u_r - w_z) = 0, \quad (6)$$

其中 γ 为表面张力系数。

自由界面处的运动学边界条件是

$$s_t + ws_z = u. \quad (7)$$

为了简化控制方程, 考虑薄膜厚度 h 远小于特征毛细长度 $L = \gamma/(\rho fh)$, 即 $\varepsilon = h/L \ll 1$. 采用以下无量纲化:

$$r = h\bar{r}, \quad z = L\bar{z}, \quad p = \rho g L \bar{p}, \quad t = L\bar{t}/V, \quad w = V\bar{w},$$

$$u = \varepsilon V \bar{u}, \quad s = h\bar{s}, \quad \phi = \rho g L \bar{\phi},$$

这里, 特征速度 $V = \rho h^2 f / \mu$, 上划线表示无量纲数(为简便起见后面省略了). 径向速度等于径向长度除以时间, 径向尺度比轴向尺度小一个量级, 因此径向速度是一阶小量. ε 是一个很小的参数, 它的增加可以解释为外驱动力相对于表面张力的增加. Reynolds 数为 $Re = \rho LV / \mu$, Bond 数为 $Bo = \rho h^2 f / \gamma = \varepsilon$. 根据 Craster 和 Matar^[12] 的数学推导, 可以得到考虑了 van der Waals 力对薄膜沿纤维垂直下落影响的方程组:

$$p = \frac{1}{s} - \varepsilon^2 s_{zz}, \quad (8)$$

$$8(s^2)_t = \frac{\partial}{\partial z} \left([p_z + \phi_z - 1] \left[2s^2 \left(\alpha^2 - s^2 + 2s^2 \ln \frac{s}{\alpha} \right) - (\alpha^2 - s^2)^2 \right] \right). \quad (9)$$

2 稳定性分析

基于基本流 $\bar{s} = 1, \bar{p} = 1$, 对方程(8)和(9)进行线性稳定性分析. 引入正则模式

$$s = \bar{s} + \hat{s} \exp(ikz + \lambda t), \quad p = \bar{p} + \hat{p} \exp(ikz + \lambda t),$$

这里, \hat{s} 和 \hat{p} 是线性扰动的振幅, k 的实部和虚部分别是对应的空间波数和空间增长率, λ 的实部和虚部则对应于时间增长率和频率. 对于小扰动, 可以给出关于 λ 和 k 的色散关系:

$$\lambda = \frac{k^2}{16} \left(\varepsilon^2 k^2 - \left(1 + \frac{3A}{(1-\alpha)^4} \right) \right) \left((\alpha^2 - 1)^2 - 2(\alpha^2 - 1 - 2 \ln \alpha) \right) - \frac{ik}{2} (\alpha^2 - 1 - 2 \ln \alpha). \quad (10)$$

众所周知, 对于时间模式, 流动稳定性取决于时间增长率是否大于 0. 在这个表达式中, 含 Hamaker 常数 A 的这一项代表 van der Waals 力的影响.

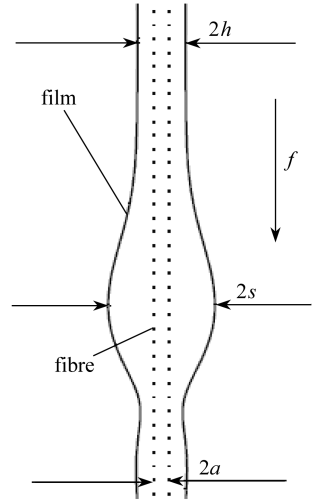
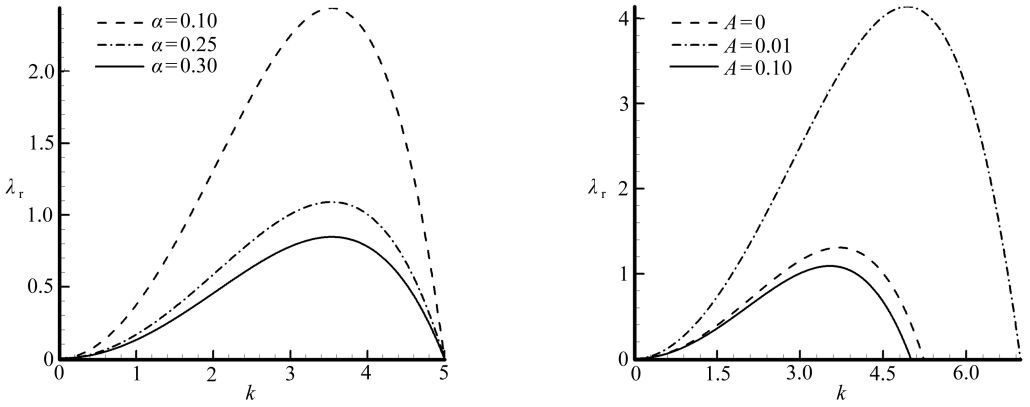


图 1 流动的几何形态示意图
Fig. 1 Schematic representation of the flow geometry

2.1 时间模式

图 2(a) 是不考虑 van der Waals 力影响时薄膜流动稳定性的特征. 当 α 增大, 即薄膜相对厚度下降时, 增长率发生了下降, 同时最不稳定波的波数基本上保持为常数, 薄膜流动更为稳定. 这些结果与以前的研究结果是一致的^[12].



(a) $0.1 \leq \alpha \leq 0.3$, $Bo = 0.2$, $A = 0$

(b) $0 \leq A \leq 0.1$, $Bo = 0.2$, $\alpha = 0.25$

图 2 对于不同的 α 和 A , λ_r 随着 k 的变化情况

Fig. 2 Variation of λ_r with k for the different α and A

图 2(b) 显示了当 α 固定时, 对于不同的 Hamaker 常数, van der Waals 力对于薄膜流动产生的影响. 随着 Hamaker 常数的增加, 扰动增长率迅速增加, 最不稳定模态对应波数和截断波数也增加, 表明 van der Waals 力有助于薄膜的破裂. 这和平板上的液体超薄膜流动情况是定性一致的. 由式 (10), 可以得到截断波数:

$$k_c = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{3A}{(1-\alpha)^4}},$$

如图 2(b) 所示, 其随 van der Waals 力的增加而增大.

对式 (10) 进行的解析分析可以得到进一步的结果. 由 $d\lambda_r/(dk) = 0$ 可以得出最不稳定模态的波数:

$$k_m = \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon^2} \left(1 + \frac{3A}{(1-\alpha)^4} \right)}, \quad (11)$$

则最大增长率为

$$\lambda_{r,\max} = \frac{(1 + 3A/(1-\alpha)^4)^2}{64\varepsilon^2} (2(\alpha^2 - 1 - 2 \ln \alpha) - (\alpha^2 - 1)^2). \quad (12)$$

这表明对于任意的物理参数, 都有 $\lambda_{r,\max} > 0$, 因此系统是线性不稳定的 (见图 3). 对于不考虑 van der Waals 力影响的薄膜流动, 即 $A = 0$ 时, 以往的研究显示, 最不稳定模态的增长率 $\lambda_{r,\max}$ 随着薄膜相对厚度的下降而下降. 然而, 如果 $A \neq 0$ 时, 薄膜相对厚度的下降加强了 van der Waals 力的作用, 并且使线性增长率上升了.

因此, 正如图 3 所示, 这个竞争机制导致增长率关于 α 的变化是非单调的. 例如, 当 $A = 0.001$ 时, 在 $\alpha < 0.75$ 的情况下, 薄膜相对厚度较大时, 流动的不稳定性主要受表面张力影响, $\lambda_{r,\max}$ 随着 α 的增加而下降. 如果 α 增大, 即薄膜相对厚度较小时, van der Waals 力引起的不稳

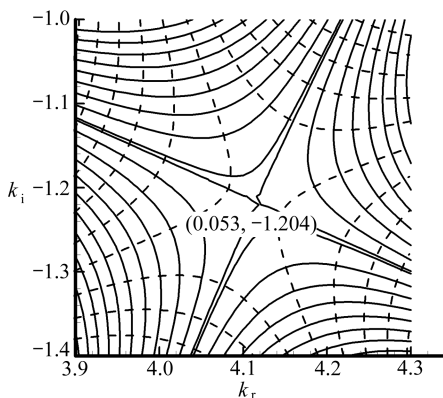
定性会占主导作用,最不稳定波的增长率随着薄膜相对厚度的下降有显著的上升,最终导致了薄膜在非线形阶段发生了破裂。

2.2 绝对和对流不稳定

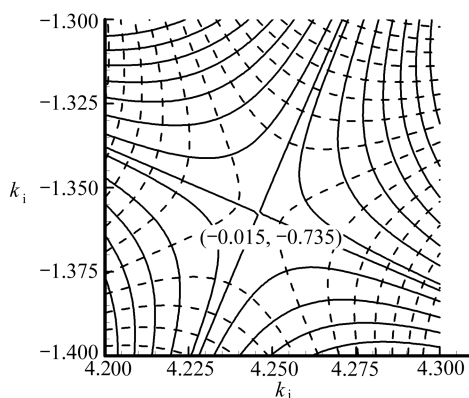
流动不稳定存在两种模式,对流不稳定(扰动随着流动离开原有位置并随时间增长)或者绝对不稳定(扰动在任意固定位置随时间增长)^[16]。粘性液膜沿倾斜平板下落是一种对流不稳定的开式流动的例子^[17-18]。然而,如果流动表面为曲面,例如自由射流,流动可能表现为绝对不稳定^[19]。这里,我们拟通过进一步的分析来研究沿柱状纤维下落的薄膜流动,表明其不稳定性可以是对流或绝对的。

通常地,在局部区域给定一个无穷小的扰动,薄膜流动是绝对或对流不稳定依赖于群速度 $v_g = d\lambda/(dk)$ 等于0的模式。在 k 的复平面中,观察增长率 $\lambda(k)$ 的变化,当 $v_g = 0$ 时会会出现一个鞍点。在满足 Briggs-Bers 准则(参见文献[20])的鞍点处 λ_0 和 k_0 分别是绝对增长率和绝对波数。对于线性不稳定的流动,当 $\lambda_{0r} > 0$ 时为绝对不稳定流动, $\lambda_{0r} < 0$ 则为对流不稳定。

图4显示了对于 $A = 0, Bo = 0.2$, λ 的实部 λ_r 和虚部 λ_i 在 k 复平面上的等值线。对于 $\alpha = 0.5$ 时,鞍点出现在 $k_r = 4.12$ 和 $k_i = -1.22$ 处,此时 $\lambda_{0r} = 0.053$, 表现为绝对不稳定的流动模式。对于 $\alpha = 0.6$ 时,鞍点出现在 $k_r = 4.245$ 和 $k_i = -1.36$ 处,此时 $\lambda_{0r} = -0.015$, 表明流动是对流不稳定的。



(a) $A = 0, Bo = 0.2, \alpha = 0.5$



(b) $A = 0, Bo = 0.2, \alpha = 0.6$

图4 在波数 k 复平面 λ 实部和虚部的等值线(实线表示实部,虚线表示虚部,鞍点表示群速度等于0的模式)

Fig. 4 Contours of real and imaginary parts of λ in the complex k plane (solid lines represent the real parts while the dashed lines for the imaginary parts, the saddle points stands for the modes with zero group velocity)

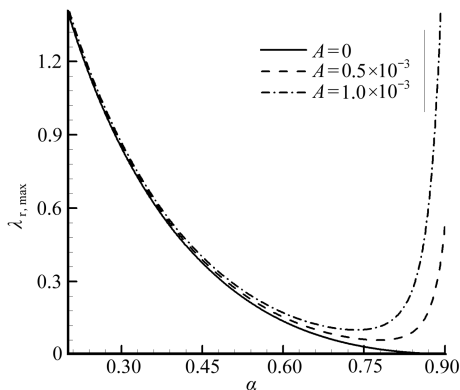


图3 当 $Bo = 0.2$ 时,最不稳定模式的增长率的最大值对于不同的 A 随着 α 的变化情况

Fig. 3 Maxima of the growth rate of the least stable mode varying with α for different A when $Bo = 0.2$

在图5中,绝对增长率和薄膜厚度、Hamaker 常数的依赖关系表明,当不考虑分子间作用

力时,在 $0 < \alpha < 0.565$ 的范围内存在绝对不稳定区域;而对于 $0.565 < \alpha < 1$ 时,流动为对流不稳定. 在临界值 $\alpha = 0.565$ 处,随着薄膜的相对厚度变小,流动从绝对不稳定过渡到对流不稳定,如果考虑 van der Waals 力的影响,绝对增长率的实部 λ_{or} 会随着 Hamaker 常数的增大而上升,尤其是对于 α 较大时的薄膜. 对于 $A > 6.5 \times 10^{-4}$ 时,流动对于任意的 α 都为绝对不稳定. 如果 $0 < A < 6.5 \times 10^{-4}$,可以发现两个 α 的临界值,这意味着对于一定范围内的 α 值,薄膜流动存在对流不稳定,即如果给定 Hamaker 常数,则只有中间厚度的薄膜才是对流不稳定的. 较厚薄膜的绝对不稳定是由于表面张力引起的,而 van der Waals 力使得较薄的液膜产生绝对不稳定性.

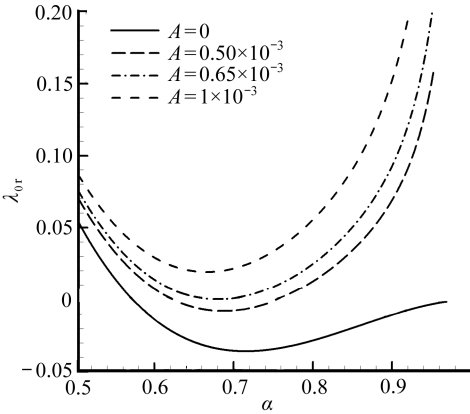


图5 当 $Bo = 0.2$ 时对于不同的 Hamaker 常数绝对增长率随着 α 的变化

Fig.5 Variation of absolute growth rate with α for different Hamaker constant when $Bo = 0.2$

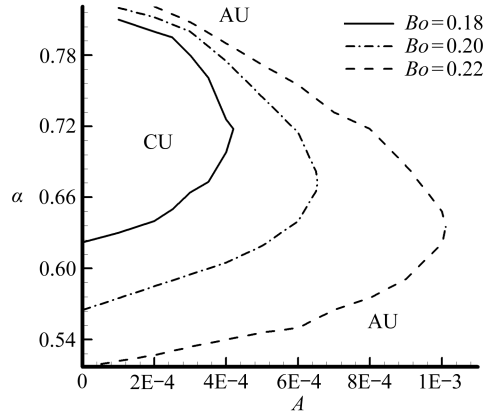


图6 不同 Bond 数 Bo 和 α 时绝对和对流不稳定区域的过渡曲线

Fig.6 Transitional curves of absolutely and convectively unstable region dependent on the Bond number Bo and α

图6显示了不同 Bond 数 Bo 和 Hamaker 常数 A 下,绝对与对流不稳定的过渡曲线. 这些曲线是利用色散关系式(10)确定鞍点,然后利用延拓方法来得到的. 如前面所述, van der Waals 力会促使流动变为绝对不稳定. 随着 Bond 数的增加,即表面张力的影响相对外力显著的变小会缩小绝对不稳定区域,这表明表面张力会促进绝对不稳定的发展,而外力会起到相反的作用.

3 结 论

本文将前人关于薄膜沿柱状纤维下落的理论模型推广到考虑分子间作用的情况,并对时间模式和绝对/对流不稳定性进行了研究. 本文采用的数学简化模型主要的假设是基于薄膜厚度远小于特征毛细长度. 通过分析色散关系来阐述薄膜相对厚度、圆柱面曲率、van der Waals 力、表面张力等因素对流动的影响. 结果发现随着薄膜相对厚度的减小,纤维表面曲率的影响将导致线性增长率下降,而同时 van der Waals 力却使最不稳定模态的增长率和波数增大了,这两者之间的竞争使得增长率随薄膜相对厚度的变化是非单调的.

为了考察流动的时空稳定性,我们在波数的复平面内,通过寻找鞍点来确定绝对增长率. 对于不同物理参数的流动情况,通过确定绝对增长率的临界值,利用延拓方法绘制了不同参数

下流动绝对或对流不稳定的区域。结果表明,外驱动力倾向于产生对流不稳定的流动,而 van der Waals 力和表面张力有助于加强流动的绝对不稳定性。实际上,表面张力在液膜较厚时作用明显,而 van der Waals 力在很薄的液膜中占主导地位。当 Hamaker 常数较小时,对于中间厚度的液膜可以存在对流不稳定区域。

参考文献:

- [1] Oron A, Davis S H, Bankoff S G. Long-scale evolution of thin liquid films[J]. *Review Modern Physics*, 1997, **69**(3):931-980.
- [2] Rayleigh Lord. On the stability of liquid jets[J]. *Proc Lond Math Soc*, 1878, **10**:4-18.
- [3] Kapitza P L, Kapitza S P. Wave flow of thin layers of a viscous fluid[J]. *Zh Eksp Teor Fiz*, 1949, **19**: 105.
- [4] Eggers J. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows[J]. *Rev Mod Phys*, 1997, **69**(3): 865.
- [5] Kliakhandler I L, Davis S H, Bankoff S G. Viscous beads on vertical fibre[J]. *J Fluid Mech*, 2001, **429**:381-390.
- [6] Duprat C, Ruyer-Quil C, Kalliadasis S, Giorgiutti-Dauphine F. Absolute and convective instabilities of a viscous film flowing down a vertical fiber[J]. *Physical Review Letters*, 2007, **98**(24): 244502.
- [7] Frenkel A L. Nonlinear theory of strongly undulating thin films flowing down vertical cylinders[J]. *Europhys Lett*, 1992, **18**(7): 583-588.
- [8] Kalliadasis S, Chang H C. Drop formation during coating of vertical fibres[J]. *J Fluid Mech*, 1994, **261**:135-168.
- [9] Chang H C, Demekhin E A. Mechanism for drop formation on a coated vertical fibre[J]. *J Fluid Mech*, 1999, **380**:233-255.
- [10] Lin S P, Lin W C. Instability of film coating of wires and tubes[J]. *AIChE J*, 1975, **21**(4): 775-782.
- [11] Tougou H. Long waves on a film flow of a viscous fluid down the surface of a vertical cylinder [J]. *J Phys Soc Jpn*, 1977, **43**(1): 318-325 .
- [12] Craster R V, Matar O K. On viscous beads flowing down a vertical fibre[J]. *J Fluid Mech*, 2006, **553**: 85-105.
- [13] Ruyer-Quil C, Treveleyan P, Giorgiutti-Dauphine F, Kalliadasis S. Modelling film flows down a fibre[J]. *J Fluid Mech*, 2008, **603**: 431-462.
- [14] Berim G O, Ruckenstein E. Microscopic treatment of a barrel drop on fibers and nanofibers [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2005, **286**(2): 681-695.
- [15] Berim G O, Ruckenstein E. Cylindrical droplet on nanofibers: a step toward the clam-shell drop description[J]. *J Phys Chem B*, 2005, **109**(46):12515-12524.
- [16] Huerre P, Monkewitz P A. Local and global instabilities in spatially developing flows[J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 1990, **22**:473-537.
- [17] Brevdo L, Dias F, Bridges T J, Laure P. Linear pulse structure and signalling in a film flow on an inclined plane[J]. *J Fluid Mech*, 1999, **396**: 37-71.
- [18] Chang H-C, Demekhin E A. *Complex Wave Dynamics on Thin Films* [M]. Amsterdam:

Elsevier, 2002: 412.

- [19] Leib S J, Goldstein M E. The generation of capillary instabilities on a liquid jet[J]. *J Fluid Mech*, 1986, **168**: 479-500.
- [20] 尹协远, 孙德军. 旋涡流动的稳定性[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003. (YIN Xie-yuan, SUN De-jun. *Vortex Stability* [M]. Beijing: National Defensive Industry Press, 2003. (in Chinese))

Linear Instability of Ultra-Thin Liquid Films Flowing Down a Cylindrical Fibre

ZHAO Lu-hai-bo, HU Guo-hui, ZHOU Zhe-wei

(*Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China*)

Abstract: The stability characteristics of an ultra-thin layer of viscous liquid flowing down a cylindrical fibre were investigated by linear theory. The film with a thickness less than 100 nm was driven by an external force, and under the influence of van der Waals forces. Results show that when the relative film thickness decreases, the curvature of the fibre depresses the development of the linear perturbations, whereas the van der Waals forces promote instabilities. This competition results in a non-monotonous dependence of the growth rate on the relative film thickness. The critical curves are also obtained to describe the transition from absolute to convective instability, which demonstrates that the van der Waals forces have the role of enlarging the absolutely unstable region. Furthermore, the surface tension is beneficial for the development of the absolute instability, whereas the external force plays an opposite effect.

Key words: cylindrical fibre; ultra-thin films; van der Waals force; stability