

# 用守恒型间断跟踪法数值模拟 Richtmyer-Meshkov 不稳定性现象\*

M·A·乌拉<sup>1,2</sup>, 高文斌<sup>1</sup>, 茅德康<sup>1</sup>

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;  
2. 吉大港大学 数学系, 吉大港 4331, 孟加拉共和国)

**摘要:** 使用茅德康所建立的守恒型间断跟踪法 [Mao D. J Comput Phys, 2007, **226**(2): 1550-1588], 数值模拟了两个关于 Richtmyer-Meshkov 不稳定性现象的物理实验, 并且将数值模拟结果与 Holmes 等人在文 [Holmes R L, Grove J W, Sharp D H. J Fluid Mech, 1995, **301**: 51-64] 中所获得的结果进行了比较, 该文的结果与 Holmes 等人所得到的结果在总体上有较好的一致性. 该文的数值模拟也捕捉到了非线性的压缩现象, 即穿越波和反射波相互作用所产生的现象, Holmes 等人指出其是导致介质界面减速的原因. 但是所得到的扰动振幅和扰动增长率比 Holmes 等人所得到的结果略大一些.

**关键词:** Richtmyer-Meshkov 不稳定性现象; 守恒型跟踪法; 扰动振幅; 扰动增长率  
**中图分类号:** O242.1; O35      **文献标志码:** A  
**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.012

## 引 言

自 1960 年 Richtmyer 第 1 次在理论上研究 Richtmyer-Meshkov (RM) 不稳定性现象<sup>[1]</sup>之后, 1970 年 Meshkov 通过物理实验首次给予了证实<sup>[2]</sup>, 对 RM 不稳定性现象的定量研究已经成为计算流体力学领域中的重要挑战. 其中人们主要关心的一个问题是理论预测、物理实验和数值模拟之间的一致性. 早期的理论模型包括 Richtmyer 的线性模型和脉冲模型 (参见文献 [1]), 早期的数值模拟包括 Benjamin 等的结果<sup>[3]</sup>、Cloutman 和 Wehner 的结果<sup>[4]</sup>, 以及 Meyer 和 Blewett 的结果<sup>[5]</sup>. 他们所得到的扰动振幅和扰动增长率具有较好的一致性. 然而, 与物理实验结果之间却存在很大的差异 (参见文献 [6-7]).

在 1995 年, Holmes 等<sup>[7]</sup>使用 Glimm 等人所建立的间断跟踪法<sup>[8-10]</sup>数值模拟了两个关于 RM 不稳定性现象的物理实验, 分别为 Benjamin 的空气-六氟化硫实验和 Meshkov 的空气-氦气实验, 具体参见文献 [7]. 此种间断跟踪法的主要优势在于其具有高阶精度以及消除了数值耗

\* 收稿日期: 2010-08-17; 修订日期: 2010-12-06  
**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (10971132); 上海浦江计划基金资助项目 ([2006] 118)  
**作者简介:** M. A. Ullah (1975—), 男, 讲师, 博士 (E-mail: amancubd@yahoo.com);  
高文斌 (1984—), 男, 硕士生 (E-mail: gusker@hotmail.com);  
茅德康 (1946—), 男, 教授 (联系人. Tel: +86-21-66134464; E-mail: dkmao@staff.shu.edu.cn).

散. Holmes 等人的结果显著地改善了数值模拟与物理实验之间的一致性. 在文献[7]中, Holmes 等人指出, 介质界面的增长率会下降, 这种现象是由二次激波的作用引起的, 由于在边界上产生了穿越波和反射波, 它们的相互作用导致了非线性的压缩现象, 且此现象是无法被线性理论和脉冲模型所捕捉到的. 他们通过在几个关键时点上捕捉到此非线性压缩现象的压力图证明了此现象的存在. 自此以后, 多个关于 RM 不稳定现象的数值模拟, 或是使用间断跟踪法或是使用别的数值模拟方法, 都很好地改善了数值模拟与物理实验结果之间的一致性, 参见文献[11-13].

本文中, 我们使用 Mao (茅德康) 的守恒型间断跟踪法<sup>[14-15]</sup>, 数值模拟了 Benjamin 和 Meshkov 关于 RM 不稳定性现象的物理实验. Mao 的算法虽然也是跟踪算法, 但是与 Glimm 等人的算法相比较, 在思想和实现方式上有较大的差异. 因此本文中对于数值模拟结果间的比较是有意义的. 我们的数值模拟结果在质上表现出与 Holmes 等人的结果具有较好的一致性, 同时也很好地改善了其与物理实验结果之间的一致性. 用我们的守恒型间断跟踪法所得到的扰动增长率曲线在结构上与 Holmes 等人在文献[6-7]中所得到的结果非常相似. 我们的方法同样很好地捕捉到了造成介质界面增长率下降的非线性压缩现象. 然而我们所得到的介质界面的扰动和增长率都大于 Holmes 等人获得的结果, 尤其是关于 Meshkov 的空气-氦气实验.

本文的结构如下: 第1节, 我们简单地描述了茅德康的守恒型间断跟踪法; 第2节, 关于两个数值模拟的设置; 第3节, 展示了我们的数值结果, 并且将其与 Holmes 等人的结果进行了比较; 第4节, 进行讨论和总结.

## 1 守恒型间断跟踪法

我们用二维无粘可压流体的 Euler 方程组作为模型方程,

$$\begin{aligned} U_t + f(U)_x + g(U)_y &= \mathbf{0}, \\ U &= (\rho, m^x, m^y, E)^T, \\ f(U) &= uU + (0, p, 0, up)^T, \\ g(U) &= vU + (0, 0, p, vp)^T, \\ p &= (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right), \end{aligned}$$

其中,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$  和  $E$  分别是密度、 $x$  方向的速度分量和  $y$  方向的速度分量、压力及总能量,  $m^x = \rho u$  是  $x$  方向的动量分量,  $m^y = \rho v$  是  $y$  方向的动量分量, 及  $\gamma$  是流体的比热容. 如果有两种流体, 且有界面将他们分开, 那么在界面的两侧  $\gamma$  是不一样的.

本文中, 我们所用到的二维 Euler 方程组的守恒型间断跟踪法是由 Mao 所建立的, 请参阅文献[14-15]. 其早期工作可以追述到上世纪 90 年代, 参见上述文章中所引的参考文献. 下面我们将简单地描述如何用此方法跟踪界面, 有关具体描述可以参阅上述引用的文献.

1) 如果我们局部地将介质界面的一段描述为  $y = s(x, t)$  或  $x = w(y, t)$ , 于是此段介质界面的运动过程可以通过一个一维的偏微分方程组局部地来描述, 其中  $s$  是未知量,  $x$  和  $t$  是独立变量, 或者  $w$  是未知量,  $y$  和  $t$  是独立变量. 这些一维偏微分方程组可以通过对二维 Euler 方程组在  $x$  或  $y$  方向上积分获得. 它们具有守恒形式, 其中  $s$  和  $w$  出现在一些关于质量、动能和能量的非线性函数中. 跨过介质界面时, 流体的质量、动能和能量满足 Hugoniot 条件, 上述的一维偏微分方程组与此条件是等价的; 但 Hugoniot 条件不是守恒形式. 我们的守恒型跟踪算法正是通过在  $x$  或  $y$  方向的次网格上解这些一维守恒型偏微分方程组来实现的.

2) 我们的数值解是定义在二维直角坐标上的, 介质界面通过一系列被介质界面曲线穿过的网格来描述。我们将被介质界面曲线穿过的网格称为间断网格, 将其余网格称为光滑网格。在一个光滑网格上, 数值解是对真解的网格平均的近似, 然而在间断网格上, 数值解包含 3 个网格平均的近似, 1 个是在一般意义下对普通网格平均的近似, 另外两个分别是对介质界面两侧真解在间断网格上的网格平均的近似, 我们称其为左网格平均和右网格平均。在上述定义下, 我们对于数值解的描述不包含任何非正规网格。间断网格上的左、右网格平均是两种虚拟状态, 我们的守恒型间断跟踪法保持光滑网格上的网格平均和间断网格上的普通网格平均守恒。

3) 取一有限体积格式作为算法的基本格式。在当前算法中, 我们采用 5 阶 WENO 格式作为算法的基本格式, 有关此格式的相关内容参见文献[16]。光滑网格上的网格平均和间断网格上的左右网格平均都是根据此格式进行计算的。当基本格式的模板跨过介质界面曲线时, 我们需要使用向外插值数据来替代介质界面曲线另一侧的数据。

4) 间断网格上的普通网格平均通过守恒地离散 1) 中的一维守恒型偏微分方程组来算得。在当前的计算格式中, 我们采用的是 Lax-Wendroff 格式。由间断网格附近界面曲线的几何形态来决定是解  $x$  方向还是  $y$  方向的一维守恒型偏微分方程组。然而最重要的间断网格上普通网格平均的计算必须与其相邻的光滑网格上网格平均的计算相容, 使得 2) 中所提及的算法守恒性得以保证。在解一维偏微分方程组时所需要的数值流是通过介质界面两侧的光滑解来计算的, 因此保证了光滑区域和间断网格间流的平衡。一旦得到了普通网格平均, 间断网格上的介质界面曲线段的位置就通过强制网格上的质量守恒性来确定。

5) 当我们跟踪介质界面曲线时, 来自不同特征域的波可以穿过介质界面曲线。这一点可以通过修正间断网格上的左、右网格平均, 使其拥有一致的速度和压强, 从而满足上述要求。这个一致的速度和压强通过左、右速度和压强的体积平均计算得到。至此我们完成了一步计算。

二维守恒型间断跟踪法已经由文献[14-15]中的数值算例证实了其有效性, 并且显示了其在计算 Euler 方程组的间断解时的高效性。这里我们要指出算法在跟踪介质界面时所具有的两个优点。

首先, 此方法通过局部离散描述介质界面运动的一维守恒型偏微分方程组来实现, 跟踪过程转化为在介质界面曲线上解这个偏微分方程组。当前的算法采用 Lax-Wendroff 格式。该格式的稳定机制, 即二阶的数值散射(参见文献[17-18]), 在被跟踪介质界面上起到了数值表面张力的作用, 从而阻止小尺度的数值不稳定性发生。上述的数值表面张力比文献[6, 12]中所设计的数值表面张力更为自然。数值实验证实了我们所跟踪的介质界面保持了局部光滑性。

其次, 理论上来说, 我们算法是完全守恒的。网格中的介质界面曲线位置通过保持质量守恒确定, 参见 4)。通过此方法, 本算法中的守恒性不仅是需要保证的重要性质, 它更是跟踪机制本身。众所周知保证守恒性对于取得介质界面的正确位置至关重要, 这在著名的 Lax-Wendroff 定理中已有阐述, 可以参见文献[19]。因此, 我们的算法在消除了小尺度的数值不稳定性的干扰同时, 更能捕捉到介质界面的大尺度结构。

然而, 由于算法在实施上的简化, 某些操作并非严格地保证守恒性。不过, 下面对守恒性误差的检测表明它们是很小的, 比算法的精度小得多。

## 2 数值模拟的设置

本文中我们要数值模拟的第 1 个问题来自 Benjamin 的实验: 空气中一个 Mach 数为 1.2

的激波与正弦型介质界面相互作用,界面另一侧充满了六氟化硫( $\text{SF}_6$ )气体,有关参数如表 1 所示.

表 1 空气-六氟化硫例子的参数

Table 1 Air- $\text{SF}_6$  parameters

quantity	value
perturbation wavelength $\lambda/\text{cm}$	3.75
perturbation amplitude $a(0^-)/\text{cm}$	0.24
wave number $k/\text{cm}$	1.675
$ka(0^-)$	0.4
initial density $\rho_{\text{air}}/(\text{g/L})$	0.95
initial density $\rho_{\text{SF}_6}/(\text{g/L})$	4.84
initial pressure $P/\text{bar}$	0.8
shock strength $Ma$	1.2
ratio of specific heats $\gamma_{\text{air}}$	1.4
ratio of specific heats $\gamma_{\text{SF}_6}$	1.09

表 2 空气-氦气例子的参数

Table 2 Air-helium parameters

quantity	value
perturbation wavelength $\lambda/\text{cm}$	4.0
perturbation amplitude $a(0^-)/\text{cm}$	0.2
wave number $k/\text{cm}$	1.57
$ka(0^-)$	0.314
initial density $\rho_{\text{air}}/(\text{g/L})$	1.2
initial density $\rho_{\text{helium}}/(\text{g/L})$	0.167
initial pressure $P/\text{bar}$	1.013
shock strength $Ma$	1.52
ratio of specific heats $\gamma_{\text{air}}$	1.4
ratio of specific heats $\gamma_{\text{helium}}$	1.63

注 1 bar =  $10^5$  Pa

注 1 bar =  $10^5$  Pa

激波穿越介质界面时发生折射,与此同时会产生反射激波,参见文献[6].图 1 展示的是在不同时刻数值模拟所获得的介质界面图,其中六氟化硫在左侧,空气在右侧,六氟化硫的钉状结构楔入空气中.

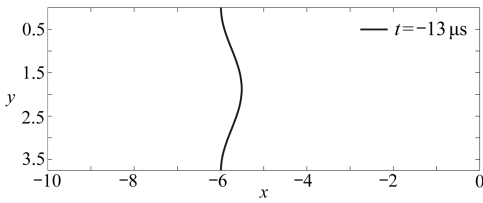
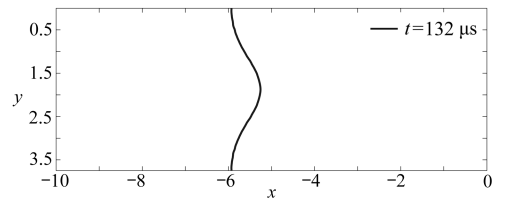
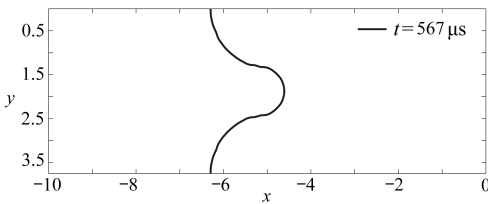
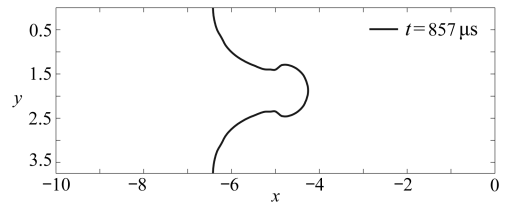
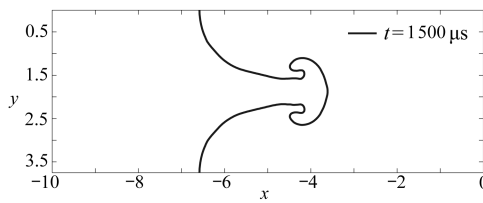
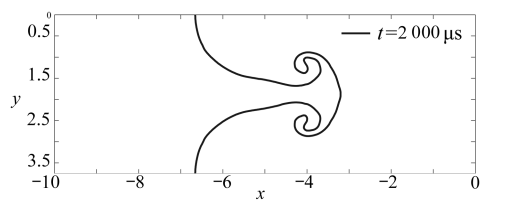
(a)  $t = -13 \mu\text{s}$ (b)  $t = 132 \mu\text{s}$ (c)  $t = 567 \mu\text{s}$ (d)  $t = 857 \mu\text{s}$ (e)  $t = 1500 \mu\text{s}$ (f)  $t = 2000 \mu\text{s}$ 

图 1 介质界面图

Fig. 1 Interfaces of mediums

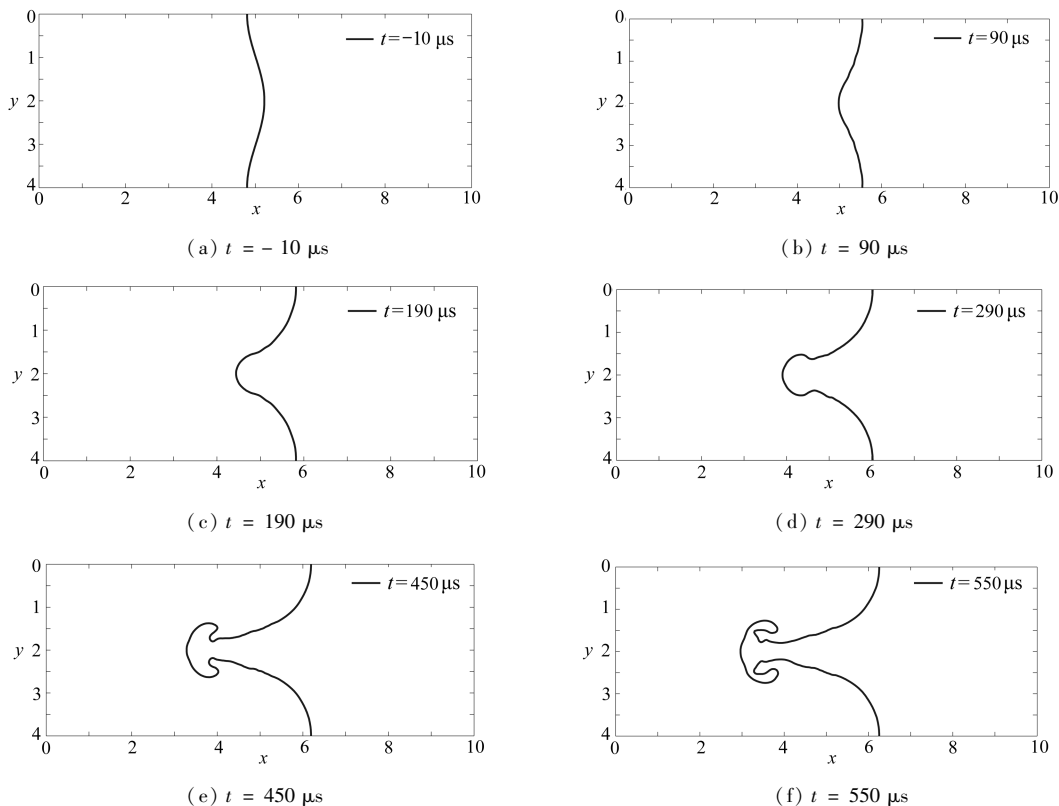


图2 介质界面图

Fig. 2 Interfaces of mediums

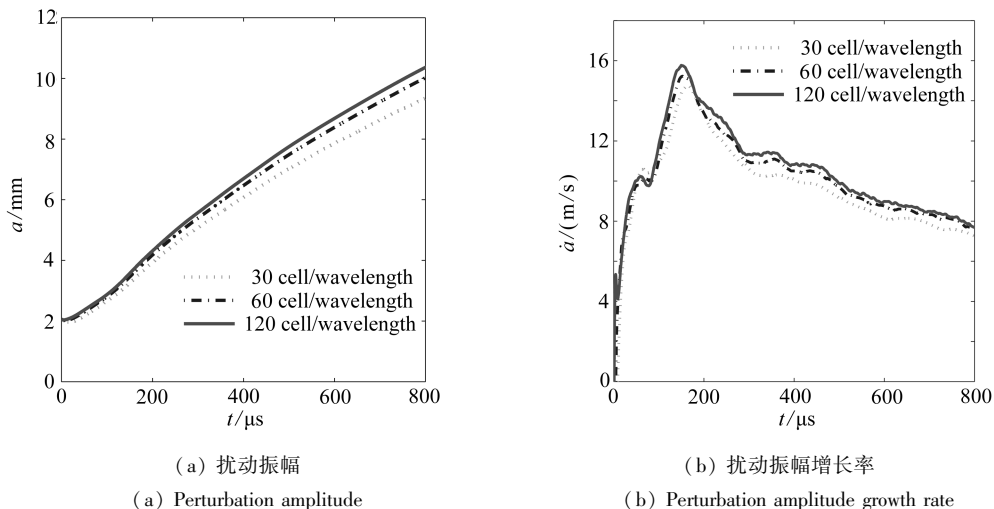


图3 对空气-六氟化硫例子作网格细分的收敛性测试

Fig. 3 Convergence investigation with mesh refinements for air-SF<sub>6</sub> case

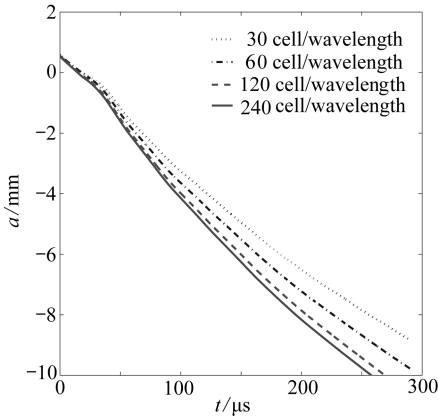
我们要模拟的第2问题是 Meshkov 的实验:空气中一个 Mach 数为 1.52 的激波与正弦型介质界面相互作用,界面的另一侧充满了氦气(Helium),有关参数如表2所示。

激波穿越介质界面时发生折射,与此同时会产生反射激波,参见文献[6]。图2展示的是在不同时刻数值模拟所获得的介质界面图,其中氦气在左侧,空气在右侧,空气的钉状结构

入氦气中。

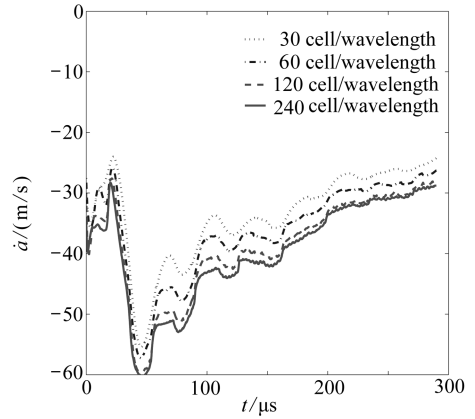
我们的数值模拟在矩形区域上进行,在左、右边界上采用自由边界条件,在上、下边界上采用周期边界条件。由于在垂直方向上流体运动的对称性,上、下边界上的周期边界条件模拟了反射边界条件。在两个数值模拟算例中,我们选取计算区域在水平方向上足够长,以保证两端的边界不会对介质界面运动过程的模拟产生影响。在第1个算例中,我们的计算区域被设定为  $[-30 \text{ cm}, 30 \text{ cm}] \times [0 \text{ cm}, 3.75 \text{ cm}]$ ,其中入射激波和介质界面的初始位置被设定在  $x = -5.5 \text{ cm}$  和  $x = -5.75 \text{ cm}$  的位置上。在第2个算例中,我们的计算区域被设定为  $[-15 \text{ cm}, 15 \text{ cm}] \times [0 \text{ cm}, 40 \text{ cm}]$ ,其中入射激波和介质界面的初始位置被设定在  $x = 5.5 \text{ cm}$  和  $x = 4.9 \text{ cm}$  的位置上。

在两个算例中,只有介质界面被跟踪,激波通过基本格式捕捉。类似文献[6-7]中所介绍的,我们在流体上加了一个平移速度,从而保证在整个数值模拟过程中介质界面始终处于观察区域中。这相当于一在以该平移速度运动的参照系中来观察数值模拟。平移速度是通过解激波和非扰动界面作用的一维 Riemann 问题得到的,取为所得到的界面运动速度。在第1个问题中,所加的平移速度为  $0.00692 \text{ cm}/\mu\text{s}$ ,而在第2个问题中它为  $0.0352 \text{ cm}/\mu\text{s}$ 。



(a) 扰动振幅

(a) Perturbation amplitude

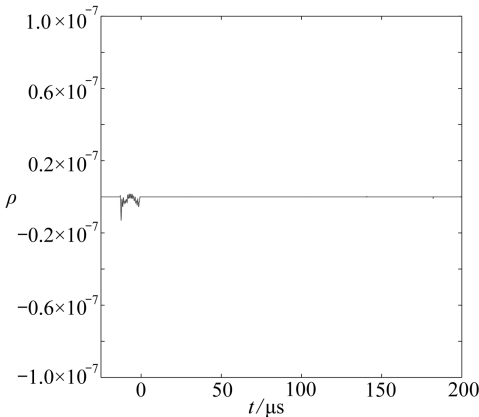


(b) 扰动振幅增长率

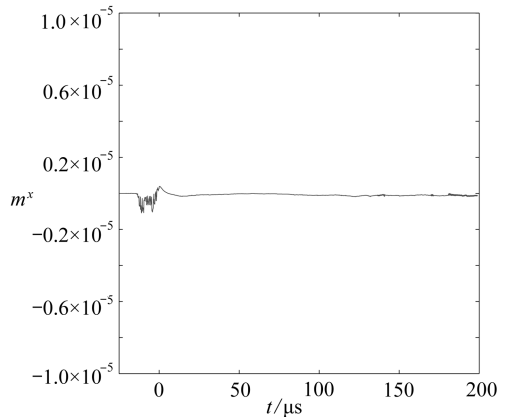
(b) Perturbation amplitude growth rate

图4 对空气-氦子例子作网格细分的收敛性测试

Fig. 4 Convergence investigation with mesh refinements for air-He case



(a)  $\rho$



(b)  $m^x$

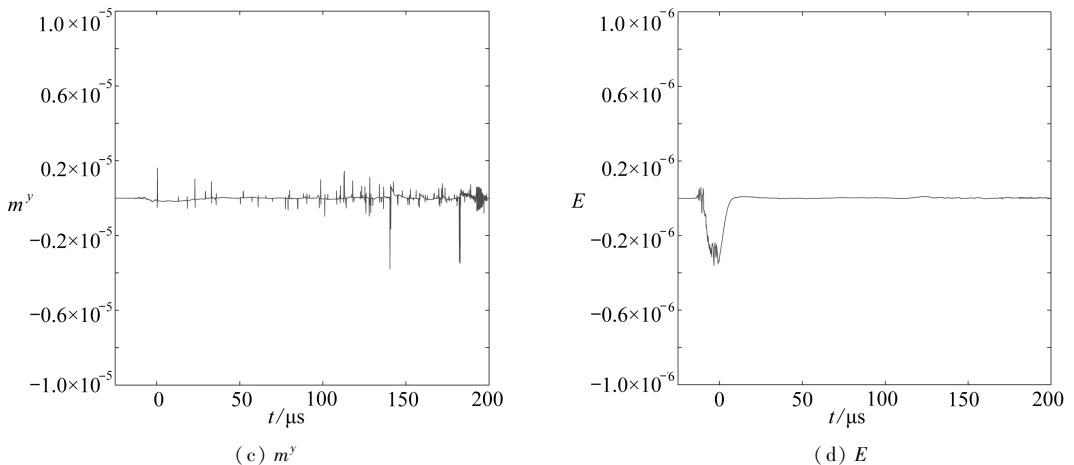
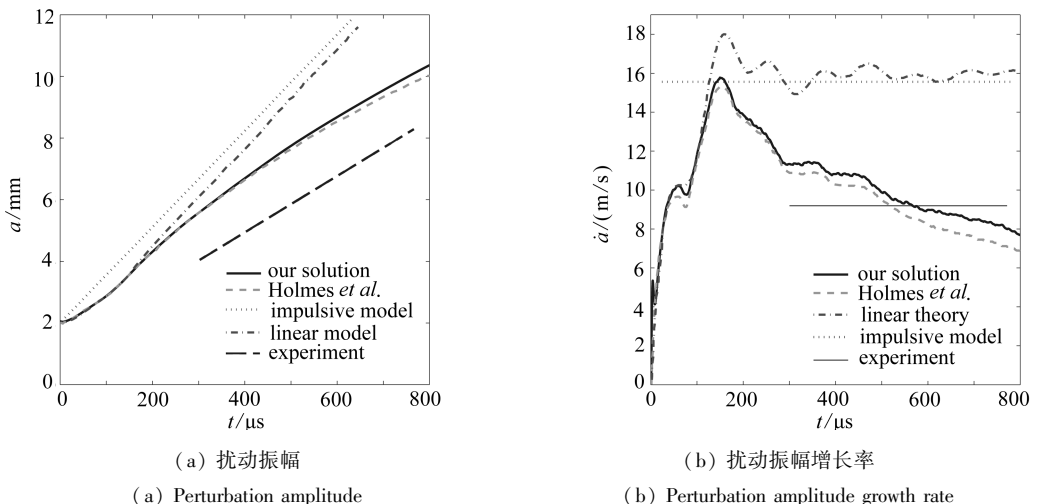


图5 密度和  $x$  方向动量的相对守恒误差,  $y$  方向动量的守恒误差, 和总能量的相对守恒误差

Fig. 5 Relative conservation error of density and  $x$  momentum, conservation error of the  $y$  momentum and relative conservation error of total energy



(a) Perturbation amplitude

(b) Perturbation amplitude growth rate

图6 空气-六氟化硫例子的扰动振幅、扰动振幅增长率, 以及它们和 Holmes 等人的, 线性理论的, 脉冲模型的, 以及实验的结果的比较

Fig. 6 Perturbation amplitude and amplitude growth rate for air-SF<sub>6</sub> interface, they are compared with the results of Holmes *et al.*, linear theory, impulsive model and experiment

如上面所描述的, 激波初始时并不处于和界面相切的位置, 而是和界面的最近点之间有一距离. 然而数值实验开始观察的时间 ( $t = 0$ ) 是激波恰好完成其与界面作用的时间, 这段时间近似地计算为激波以其初始速度运动到界面的最远点的时间.

由于计算资源有限, 我们无法使用非常细的网格来进行数值模拟. 我们通过不断加细网格来作收敛性的测试, 以决定在计算区域上需划分多少网格以得到可信的数值结果. 我们以界面的扰动振幅图和扰动增长率为度量来测试收敛性. 图 3 和图 4 是在一波长的网格数分别为 30, 60, 120 和 240 (只是空气-氦气算例) 的网格上所计算的扰动振幅图和扰动增长率. 图 3 显示出在一个波长上划分 120 个网格所得到的空气-SF<sub>6</sub> 例子结果已可以接受. 然而在图 4 中我们看到, 即使在一个波长上划分 240 个网格, 空气-氦气算例的数值解在某些区间上的收敛性仍然不十分理想. 然而, 这已是我们在现有计算资源允许范围内所能划分的最细的情况了, 因

此我们就选用这一网格。

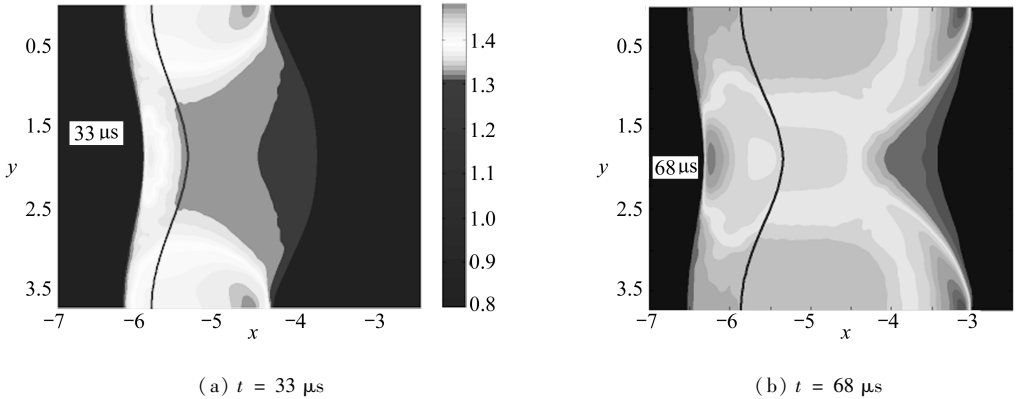


图7 空气-六氟化硫例子的压力场图

Fig. 7 Pressure plots for air-SF<sub>6</sub> experiment

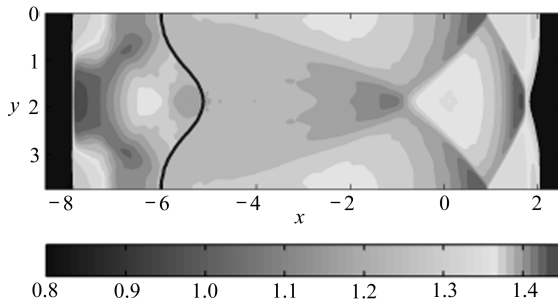


图8 空气-六氟化硫例子在  $t = 207 \mu\text{s}$  时刻的的压力场图

Fig. 8 Pressure plot for air-SF<sub>6</sub> experiment at  $t = 207 \mu\text{s}$

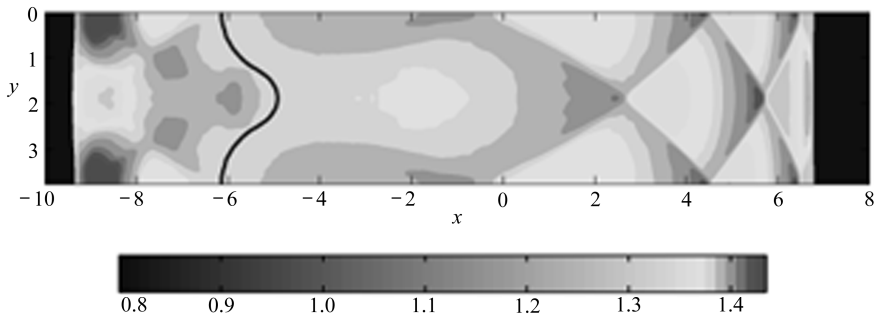


图9 空气-六氟化硫例子在  $t = 344 \mu\text{s}$  时刻的的压力场图

Fig. 9 Pressure plot for air-SF<sub>6</sub> experiment at  $t = 344 \mu\text{s}$

如上一节中所指出的,由于算法实施上的误差,解的守恒性质并没有被严格地保证.因此在进行数值模拟之前我们需数值地检测一下方法的守恒误差.我们用第1个例子来做检测,设置一矩形区域 $[-22.5 \text{ cm}, 15.0 \text{ cm}]$ ,观察其上的守恒误差直至  $200 \mu\text{s}$ .在一步计算中守恒量  $Q$  的守恒误差  $E_c$  估算为

$$E_c = Q^{n+1} \text{ 的总量} - Q^n \text{ 的总量} + \Delta t \{ \text{流量} f(Q)_{x=-22.5} - \text{流量} f(Q)_{x=15.0} \}.$$

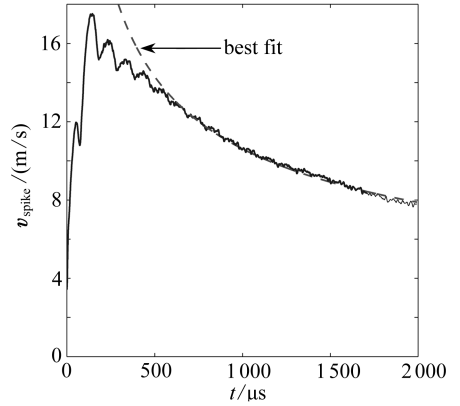
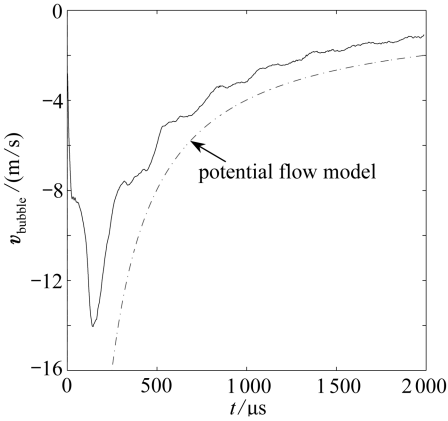
这里,我们假设通过上下固壁  $Q$  没有流进和流出.守恒量  $Q$  可为密度、 $x$  方向的动量、 $y$  方向的动量和总能量.对于密度、 $x$  方向的动量和总能量,我们计算它们的相对守恒误差  $E_{RC}$  如下:



$E_{RC} = E_c/Q^{n+1}$  的总量.

在所观察的时间段内,密度、 $x$  方向的动量和总能量在该区域的总量分别平均为 480, 59 和 860. 密度、 $x$  方向的动量和总能量的相对守恒误差分别显示在图 5(a), 图 5(b) 和图 5(d) 中. 然而  $y$  方向的动量在观察区域几乎为 0, 因为几乎没有  $y$  方向的流动, 因此我们在图 5(c) 只是显示了  $y$  方向动量的守恒误差.

显然从图 5 中可以看出,所有的守恒误差和相对守恒误差都低于  $10^{-6}$ , 比方法的精度量级要小. 事实上大的守恒误差只是发生在流动的早期, 当激波和界面作用时, 守恒误差变得非常小, 因此格式几乎是守恒的.



(a) 泡状结构顶点速度和势流模型的比较

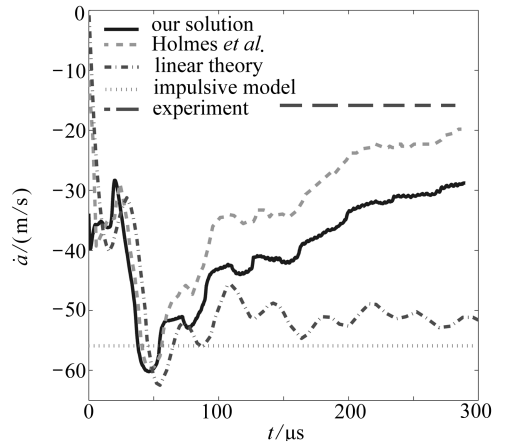
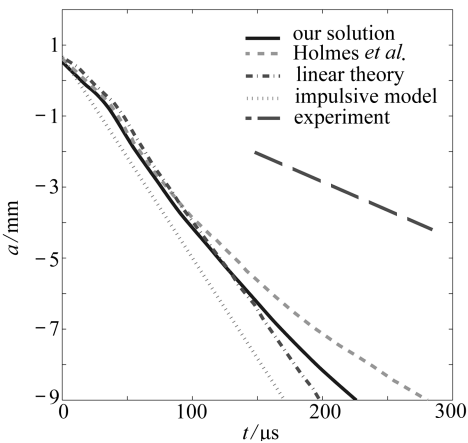
(b) 钉状结构顶点速度和最佳拟合曲线的比较

(a) Bubble velocity is compared with potential model

(b) Spike velocity is compared with the best fitting curve

图 10 空气-六氟化硫例子的泡状结构顶点和钉状结构顶点的速度

Fig. 10 Bubble and spike velocities up to very late time for air-SF<sub>6</sub> case



(a) 扰动振幅

(b) 扰动振幅增长率

(a) Perturbation amplitude

(b) Perturbation amplitude growth rate

图 11 空气-氦气例子的扰动振幅, 扰动振幅增长率, 以及它们和 Holmes 等人的, 线性理论的, 脉冲模型的, 以及实验的结果的比较

Fig. 11 Air-He case; amplitude and growth rate. they are compared with the results of Holmes *et al.*, linear theory, impulsive model and experiment

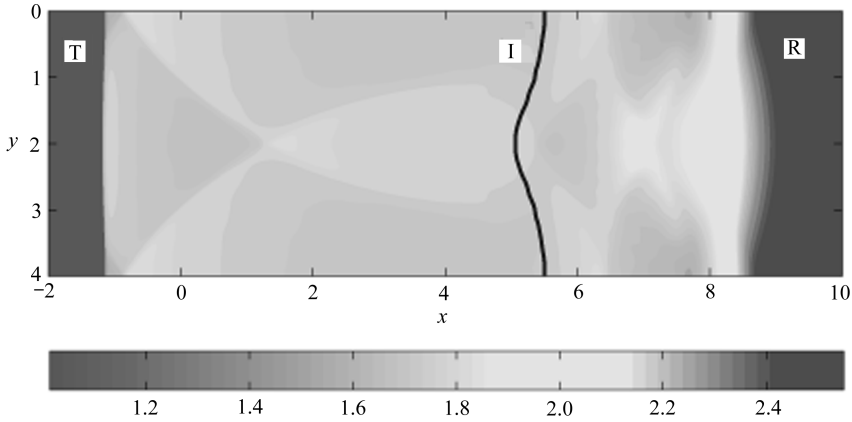


图 12 空气-氦气例子在  $t = 65 \mu\text{s}$  时刻的的压力场图

Fig. 12 Pressure plot for air-He experiment at  $t = 65 \mu\text{s}$

### 3 数值结果及其与 Holmes 等人结果的比较

#### 3.1 Benjamin 的空气-六氟化硫实验

如文献[7]中那样,我们在图6中展示的扰动振幅和扰动振幅增长率分别来自脉冲模型、由线性理论所导出的数值解、Holmes 等人在文献[6-7]中所得到的数值解、使用我们的守恒型跟踪算法所得到的数值解及物理实验结果。我们定义扰动振幅  $a(t)$  是钉状结构顶点到泡状结构顶点间垂直距离的一半,扰动增长率的定义如下式所示:

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2}(v_{\text{spike}} - v_{\text{bubble}}), \quad (1)$$

其中,  $v_{\text{spike}}$  和  $v_{\text{bubble}}$  分别为钉状结构顶点速度和泡状结构顶点速度。脉冲模型、线性理论、Holmes 等人的结果以及物理实验结果均来自文献[6]。从图6中我们可以看到,用我们的守恒型跟踪法所得到的扰动振幅和扰动增长率与 Holmes 等人的结果具有很好的一致性。两条增长率曲线在结构上相似度极高。以上两个结果都与线性理论存在两个主要的差异,并且几乎发生在同一时间区域。第1个差异点大约发生在  $70 \mu\text{s}$  时刻,增长率发生了逆转,并且随之而来的是第2段快速增长。第2个差异点出现在增长率峰值点后,大约  $200 \mu\text{s}$  时刻,随之而来的是增长率减速下降,此后两条曲线都保持下降趋势,变得较为光滑,并且经历了相同的上下起伏。

然而用我们的守恒型跟踪法所得到的扰动振幅和扰动增长率相较于 Holmes 等人的结果更大一些。两条曲线间存在3个主要的差异点。第1个差异点大约发生在  $70 \mu\text{s}$  时刻,两条增长率曲线都出现了一次震荡,随后增加的情况,我们的增长率与 Holmes 等人的结果相比相对较大,也更接近由线性理论所导出的结果。第2个差异点发生在大约  $200 \mu\text{s}$  时刻,两条扰动增长率曲线都已经达到了峰值。但是我们所得到的峰值要大于 Holmes 等人所获得的峰值。第3个差异点发生在大约  $285 \mu\text{s}$  时刻,此时强波的运动已经离开了介质界面所在的区域,扰动增长率开始变得光滑。此时,两条扰动增长率曲线产生偏离。

在接近0时刻,我们的扰动增长率曲线出现一次震荡,一次剧烈逆转后紧随而来的是快速

上升.我们确信这次震荡是由 5 阶的 WENO 基本格式的数值耗散所引起的.在我们的模拟过程中,激波是通过基本格式来捕捉的,因此激波会出现耗散.在震荡发生的过程中,出现耗散的激波仍在与被跟踪的介质界面相互作用.

如文献[6]中所做的,我们使用最小二乘法计算了在时间区间(300  $\mu\text{s}$ , 770  $\mu\text{s}$ )上的平均扰动增长率.这一值为 9.69 m/s,比 Benjamin 的物理实验结果 9.18 m/s 大出了 5.5%,比 Holmes 等人的结构 9.2 m/s 大出了 5.3%.

Holmes 等人将激波的减速解释为非线性压缩现象,这是由于反射激波和折射激波相互作用产生的次波所导致.图 6(b)中可以看到,我们的扰动增长率曲线和 Holmes 等人的结果在结构上具有相似性,因此上述非线性压缩现象也在我们的模拟过程中被很好地捕捉到了.为了更好地展示这一现象,我们给出在  $t = 33 \mu\text{s}$ , 68  $\mu\text{s}$ , 207  $\mu\text{s}$ , 344  $\mu\text{s}$  时刻的压力场图.与文献[7]中类似,图 7(a) ( $t = 33 \mu\text{s}$ )显示了在反射激波和折射激波相互作用下产生的二次波;图 7(b) ( $t = 68 \mu\text{s}$ )显示了在二次激波和介质界面作用下所产生的高压区域;图 8 ( $t = 207 \mu\text{s}$ )显示了一个很强的高压区域出现在介质界面所在位置,导致泡状结构顶点速度急剧下降;图 9 ( $t = 344 \mu\text{s}$ )显示了强波的作用已经离开了介质界面所在区域,及在计算区域的右侧的远处出现的两个三重态.

在文献[20]中 Hecht 等人所建立的势能流模型预测了气泡结构顶点速度会在之后的时间里出现下降,

$$v_{\text{bubble}} = \frac{1}{3kt/2}, \quad (2)$$

其中,  $k$  是扰动的波数,  $t$  是时间. Holmes 等人将他们用跟踪法所得到的泡状结构顶点速度与式(2)进行比较,参见文献[7]中的图 7(a).本文中,我们将用我们的守恒型间断跟踪法所得到的泡状结构顶点速度与式(2)进行比较,见图 10(a).可见我们的泡状结构增长率曲线在质上和量上与 Holmes 等人的结果非常相近.

Holmes 等人显示了用他们的跟踪法所得到的钉状结构顶点速度在后期可以通过一个指数函数  $v_{\text{spike}} = 510t^{-0.58}$  来拟合,参见文献[7]中图 7(b).我们发现,我们的守恒型间断跟踪法所得到的钉状结构顶点速度在后期也可以通过一个指数函数  $v_{\text{spike}} = 207t^{-0.43}$  来拟合,只是参数略有不同,参见图 10(b).

### 3.2 Meshkov 的空气-氦气实验

与文献[6]中所述相似,图 11 中所显示的是扰动振幅和扰动增长率,数据分别来自脉冲模型、由线性理论导出的数值解、Holmes 等在文献[6-7]中所得到的结果、运用我们的守恒型间断跟踪法所得到的结果以及物理实验结果.其中脉冲模型、线性理论、Holmes 等人的结果以及物理实验数据都来自于文献[6].

总体来说,我们所得到的结果在结构上与 Holmes 等人的结果具有较好的一致性,因此仍然改进了与物理实验结果的吻合性.然而,我们在本算例上获得的结果与 Holmes 等人的结果相比较,差距要大于空气-六氟化硫算例中所得到的结果.在模拟过程的初期阶段,我们可以将线性理论看作是正确,此时两个结果几乎完全相同,并且它们与线性模拟结果间具有很好的 consistency.差异开始于大约 60  $\mu\text{s}$  时刻,并且一直持续到模拟的后期.尽管如此,这两条曲线在结

构上仍具有很好的相似性,一同上、下变化.这表明在两种不同的数值模拟过程中均能很好地从质上捕捉引起介质界面减速运动的非线性压缩现象,尽管在量上存在一定的差异.

在数值模拟的初始阶段,我们的扰动增长率出现了一次震荡现象,我们认为这一现象是由于使用 WENO 格式作为基本格式产生了数值耗散而导致的,这与上一节空气-六氟化硫算例中的情况类似.

和文献[7]中一样,我们绘制了  $t = 65 \mu\text{s}$  时刻的压力图,参见图 12. 此时线性与非线性模拟结果产生了差异,并且我们的结果与 Holmes 等人的结果也产生了差异. 由于折射和反射激波相互作用产生了二次波并且在泡状结构的顶点位置产生了高压区域,这种非线性现象可以清晰地图中看到. 但是有关非线性现象发生的位置在我们的结果和 Holmes 等人的结果中略有不同.

最后我们运用最小二乘法在时间区域 ( $150 \mu\text{s}$ ,  $280 \mu\text{s}$ ) 上计算了平均扰动增长率. 我们的结果为  $33.98 \text{ m/s}$ , 这一结果比 Meshkov 的物理实验结果  $16 \text{ m/s}$  大了  $112\%$ , 比 Holmes 等人的结果  $25 \text{ m/s}$  大了  $36\%$ .

## 4 讨论和结论

我们使用茅德康的守恒型间断跟踪法数值模拟了有关 RM 不稳定性现象的 Benjamin 空气-六氟化硫实验和 Meshkov 空气-氦气实验,并且将所得到的结果与 Holmes 等人的结果进行了比较,其中介质界面的扰动振幅和扰动增长率为主要的观察量. 将我们的结果与 Holmes 等人的结果进行比较后可以看到两者具有很好的一致性. 这两种数值模拟都显示了介质界面在非线性压缩现象的影响下出现减速运动的情况,这在线性模拟和脉冲模型中是无法观察到的. 两个数值模拟都在所显示的压力图中捕捉到的了非线性压缩现象. 两者都显示了介质界面在压缩影响消除后的运动状态与 Hecht 等人所建立的势能模型在质上相吻合.

但是我们所得到的扰动振幅和扰动增长率大于 Holmes 等人的结果,尤其是 Meshkov 的空气-氦气算例. 正如我们在引言介绍中所说的,用来做数值模拟的两种跟踪法是完全不同的,两者都既有优点也有缺点. 首先,茅德康的跟踪法在理论来说是完全守恒的,尽管在实施上有很小的守恒误差,而 Holmes 等人所用的跟踪法并不守恒. 其次, Holmes 等人所做的数值模拟不仅跟踪了介质界面,而且也跟踪了激波,可以说是完全地跟踪,而我们的跟踪法只跟踪了介质界面,激波是通过基本格式来计算的. 最后,我们所使用的数值表面张力也与 Holmes 等人的也不相同. 以上这些差异可能对数值模拟很敏感,因为我们所跟踪的介质界面本身就非常不稳定.

对于 Benjamin 的空气-六氟化硫实验,有许多运用别的数值方法模拟的结果,参见文献 [12]. 与这些模拟结果进行比较发现,我们的结果与 Holmes 等人的结果还都是在误差范围之内. 但是我们无法找到别的关于 Meshkov 空气-氦气实验的,因此我们现在无法说我们和 Holmes 等人的结果谁在物理上更可靠.

**致谢** 作者感谢审稿者所提出的宝贵意见和建议,它们对修改本文很有帮助.

## 参考文献:

- [1] Richtmyer R D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids[J]. *Comm Pure Appl Math*, 1960, **13**(2): 297-319.
- [2] Meshkov E E. Instability of a shock wave accelerated interface between two gases[J]. *NASA Tech Trans*, 1970, F-13: 074.
- [3] Benjamin R, Besnard D, Haas J. Shock and reshock of an unstable interface[R]. LANL Rep Los Alamos National Laboratory, 1993, LA-UR 92-1185.
- [4] Cloutman L D, Wehner M F. Numerical simulation of Richtmyer-Meshkov instabilities[J]. *Phys Fluids A*, 1992, **4**(8): 1821-1830.
- [5] Meyer K A, Blewett P J. Numerical investigation of the stability of a shock-accelerated interface between two fluids[J]. *Phys Fluids*, 1972, **15**(5): 753-759.
- [6] Holmes R L. A numerical investigation of the Richtmyer-Meshkov instability using front-tracking[D]. Ph D Thesis. Stony Broke, USA: State University of New York, 1994.
- [7] Holmes R L, Grove J W, Sharp D H. Numerical investigation of Richtmyer-Meshkov instability using front-tracking[J]. *J Fluid Mech*, 1995, **301**: 51-64.
- [8] Chern I-L, Glimm J, McBryan O, Plohr B, Yaniv S. Front tracking for gas dynamics[J]. *J Comput Phys*, 1998, **62**(1): 83-110.
- [9] Glimm J, Li X L, Liu Y J, Xu Z L, Zhao N. Conservative front-tracking with improved accuracy[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2003, **41**(5): 1926-1947.
- [10] Glimm J, Graham M J, Grove J, Li X L, Smith T M, Tan D, Tangerman F, Zhang Q. Front tracking in two and three dimensions[J]. *Comput Math Appl*, 1998, **35**(7): 1-11.
- [11] Holmes R L, Dimonte G, Fryxell B, Gittings M L, Grove J W, Schneider M, Sharp D H, Velikovich A L, Weaver R P, Zhang Q. Richtmyer-Meshkov instability growth: experiment, simulation and theory[J]. *J Fluid Mech*, 1999, **389**: 55-79.
- [12] Howell B P, Ball G J. Damping of mesh-induced errors in free-Lagrange simulations of Richtmyer-Meshkov instability[J]. *Shock Waves*, 2000, **10**(4): 253-264.
- [13] Li X L, Zhang Q. A comparative numerical study of the Richtmyer-Meshkov instability with nonlinear analysis in two and three dimensions[J]. *Phys Fluids*, 1997, **9**(10): 3069-3077.
- [14] MAO De-kang. Towards front-tracking based on conservation in two space dimensions II, tracking discontinuities in capturing fashion[J]. *J Comput Phys*, 2007, **226**(2): 1550-1588.
- [15] MAO De-kang. Towards front tracking based on conservation in two space dimensions[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2000, **22**(1): 113-151.
- [16] JIANG Guang-shan, SHU Chi-wang. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *J Comput Phys*, 1996, **126**(1): 202-228.
- [17] LeVeque R J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*[M]. Britain: Press Syndicate of the University of Cambridge, 2002.
- [18] LeVeque R J. *Numerical Methods for Conservation Laws*[M]. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser-Verlag, 1990.
- [19] Lax P D, Wendroff B. Systems of conservation laws[J]. *Comm Pure Appl Math*, 1960, **13**:

217-237.

- [20] Hecht J, Alon U, Shvarts D. Potential flow model of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov bubble fronts[J]. *Phys Fluids*, 1994, **6**(12): 4019-4030.

## Numerical Simulations of Richtmyer-Meshkov Instability Using Conservative Front-Tracking Method

M. A. Ullah<sup>1,2</sup>, GAO Wen-bin<sup>1</sup>, MAO De-kang<sup>1</sup>

(1. *Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;*

2. *Department of Mathematics, University of Chittagong, Chittagong-4331, Bangladesh*)

**Abstract:** Numerical simulations of two Richtmyer-Meshkov(RM) instability experiments were presented using the conservative front tracking method developed in [Mao D. *J Comput Phys*, 2007, **226**(2): 1550-1588], and compare them with that obtained in [Holmes R L, *et al.* *J Fluid Mech*, 1995, **301**: 51-64]. The simulations are generally in good agreement with that of Holmes *et al.* The simulations also captured the nonlinear and compressive phenomena, the self-interactions of the transmitted and reflected wave edges, which was pointed out in Holmes *et al.*'s work as the cause of the deceleration of the interfaces. However, the perturbation amplitudes and amplitude growth rates of the interfaces obtained with our conservative front-tracking method are a bit larger than that obtained by Holmes *et al.*

**Key words:** Richtmyer-Meshkov instability; conservative front-tracking; perturbation amplitude; amplitude growth rate