

强迫对流管道内壁结垢层 几何形状的逆运算估计*

陳文立, 楊俞青, 李浩榕, J·L·萨拉萨尔

(昆山科技大学 机械工程系, 台南 永康, 中国 台湾)

摘要: 利用逆运算法中的共轭梯度法与差异原理, 通过测量管壁内的温度, 来估算一管流系统内壁结垢层厚度的几何形状. 过程中未预先设定结垢层厚度的函数形式. 因此, 可将这类逆运算问题归类为“函数预测”. 逆运算过程的管壁温度测量值, 可由直接解法所求得温度数值来仿真实际的测量温度. 并用测量误差来检验逆运算分析的正确性. 数值实验结果显示, 管内壁结垢层厚度的几何形状可获得极佳的估算值. 所提出的技术可用作管路维修的预警系统, 当管壁结垢层厚度超出某预先设定值时可适时发出维修警示.

关键词: 逆运算问题; 结垢层; 管流系统; 共轭梯度法

中图分类号: O369 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.006

符 号 说 明

h	对流传热系数 ($W/(m^2 \cdot K)$)	J	泛函
k	热传导系数 ($W/(m \cdot K)$)	j'	泛函梯度
L	管道长度 (m)	u_x	流体轴向速度 (m/s)
M	总测量点数	x	轴向坐标 (m)
p	递减方向	Δ	小变量
R_1	管道内径 (m)	α	热传导系数 (m^2/s)
R_2	管道外径 (m)	β	步长
r	径向坐标 (m)	γ	共轭系数
T	温度 (K)	η	指定的小量
T_{in}	入口温度 (K)	λ	用于伴随问题的变量
T_∞	环境温度 (K)	σ	标准差
Y	测量温度 (K)	ω	随机变量

上角

* 收稿日期: 2010-08-25; 修订日期: 2010-11-04

基金项目: 中国台湾国家科学委员会资助项目 (NSC 97-2221-E-168-039)

作者简介: 陳文立 (E-mail: wlchen@mail.ksu.edu.tw);

楊俞青, 教授 (联系人, E-mail: ycyang@mail.ksu.edu.tw).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

K 迭代次数

下角

f 流体

s 固体

引 言

工业应用中出现传热过程的定量研究,常常需要正确知道边界条件,如材料的热通量和热学性能.这些重要的物理量通常要由昂贵而精密的实验测得.然而,近年来,热传导逆运算问题的研究,有了方便的可供选择的办法,这在很多热传导问题中^[1-3],可以大大减少实验工作,从而得到准确的物理量,如热源、材料的热学性能、边界温度或热通量的分布等.在这些情况下,当初始边界条件、热发生和材料性能为特定值时,热传导直接问题是关于区域内部点温度的确定;而由物理问题已知几何区域的表面或内部测量得到的温度值可知,热传导逆运算问题涉及到表面条件、能量传递和热性能等的确定.然而,当几何形状本身发生变化并成为未知时,一个求解形状识别问题(或逆几何问题)的技术是,可用未知区域形状的估算来实现.形状识别问题技术广泛地应用于,例如,制冷系统中对霜层厚度的预测、高炉内壁中对几何形状的预测、炉壁裂缝及凹坑的预测以及几何形状的最优化^[4].对于形状识别问题,几何边界未知,故无法确定计算区域,导致边界条件未知.因此,逆运算问题变得特别复杂.过去有很多学者致力于利用各种数值方法,来进行逆几何问题的研究.Huang 和 Chen^[5]提出了一种修正的模型,当搜索方向没有限制时,用来估算多个区域的外部边界形状.Park 和 Shin 利用坐标转换技术和伴随变量方法,进行形状识别,确定热传导系统^[6]和自然对流系统^[7]未知边界的几何形状.Divo 等^[8]在一个 3D 的逆几何问题中,利用遗传算法和奇异叠加技术,来探测球形凹洞.Kwag 等^[9]采用一种新的算法,用来估算蓄热系统中冰块的相前运动.近来,Su 和 Chen^[10]在形状识别问题中,利用逆矩阵法,并结合线性最小二乘误差法和虚拟区域概念,来确定炉内壁的几何形状.我们注意到,以上形状识别问题的研究中,极少结合热的传导,而这个问题在一般的热交换问题中经常遇到.

热交换器的性能通常随时间下降,这是由于热传导表面上沉积物的累积所造成的.沉积层(结垢层)相当于热传导中额外的热阻,它会导致热交换器传热率的下降.另外,结垢层可以使流动管道变窄,导致泵功率的增加.由于结垢层一般是在换热器管道的内壁形成,要得到结垢层确切的几何形状是有难度的,特别是当管道很长时.本文研究逆几何问题的目的是,通过管壁内部温度测量的仿真,估算一管流系统(包括共轭热传递)管内壁结垢层的未知不规则几何形状.该系统包括一完全发展的管流、固体管壁以及管内壁形状未知的结垢层.本研究所提出的技术可用作管道维修的预警系统,当管壁结垢层厚度超出某预先设定值时可适时发出维修警示.文中我们给出了,求解逆几何问题的共轭梯度法(CGM)^[11-15]和差异性原理^[16],来确定管流系统中结垢层的几何形状.共轭梯度法及其伴随方程,也称为 Alifanov 迭代规则化法,属于迭代规则化技术一类,这意味着规则化过程是在迭代过程中进行的,也就没必要确定最优规则化条件.基于摄动原则导出的共轭梯度法,收敛很快,且对测量误差不是很敏感,并将该逆运算问题转化 3 个问题的求解,即,直接问题、敏感度问题和伴随问题,这将在下面几节进行详细讨论.另一方面,在共轭梯度法中,是根据差异性原理来终止迭代过程.

1 分 析

1.1 直接(正)问题

在一完全发展的管流内壁,出现几何形状 $f(x)$ 未知的不规则结垢层,为了阐明确定其几何形状的方法,考虑以下稳态的传热问题.图 1 给出了所考虑的完全发展管流的示意图.管道的长度为 L ,内径为 R_1 ,外径为 R_2 .假设进口处的流体温度为 $T_{in}(r)$.使用一段时期后,假设管道内壁出现了结垢层,且假设结垢层的几何形状 $f(x)$ 未知.则该稳态传热问题的数学方程,包括流体区域、结垢区域和管壁区域,可分别表示为^[17]:

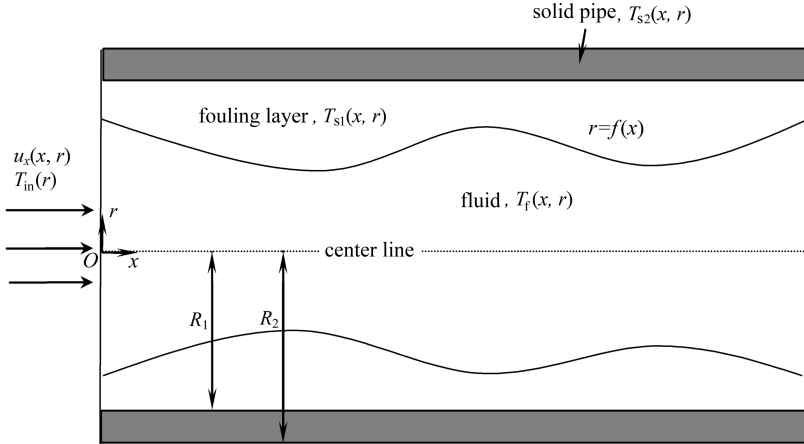


图 1 圆柱形管流系统的几何图形

Fig. 1 Schematic of a cylindrical configuration of the pipe system

在流体区域,

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} = u_x(x, r) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial x}, \quad (1a)$$

$$T_f = T_{in}(r), \quad x = 0, 0 \leq r \leq f(x), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial x} = 0, \quad x = L, 0 \leq r \leq f(x), \quad (1c)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial r} = 0, \quad r = 0, 0 \leq x \leq L; \quad (1d)$$

在结垢区域,

$$\frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{s1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial x^2} = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial T_{s1}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, f(x) \leq r \leq R_1, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial T_{s1}}{\partial x} = 0, \quad x = L, f(x) \leq r \leq R_1; \quad (2c)$$

在管壁区域,

$$\frac{\partial^2 T_{s2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{s2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{s2}}{\partial x^2} = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial T_{s2}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, R_1 \leq r \leq R_2, \quad (3b)$$

$$\frac{\partial T_{s2}}{\partial x} = 0, \quad x = L, R_1 \leq r \leq R_2, \quad (3c)$$

$$-k_{s2} \frac{\partial T_{s2}}{\partial r} = h(T_{s2} - T_\infty), \quad r = R_2, 0 \leq x \leq L; \quad (3d)$$

在流体与结垢层之间的界面上,

$$T_f = T_{s1}, \quad r = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (4a)$$

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = k_{s1} \frac{\partial T_{s1}}{\partial n}, \quad r = f(x), 0 \leq x \leq L; \quad (4b)$$

在结垢层与管壁之间的界面上,

$$T_{s1} = T_{s2}, \quad r = R_1, 0 \leq x \leq L, \quad (5a)$$

$$k_{s1} \frac{\partial T_{s1}}{\partial r} = k_{s2} \frac{\partial T_{s2}}{\partial r}, \quad r = R_1, 0 \leq x \leq L, \quad (5b)$$

其中 k 为热传导系数, 而 $u_x(x, r) = 2u_{av}(x)[1 - (r/R)^2]$, 这里, $u_{av}(x)$ 为平均速度. 作为直接问题, 当不规则结垢层的几何形状 $f(x)$ 、热学性能和边界条件已知时, 相关的介质温度就确定.

1.2 逆问题

作为逆问题, 方程(1)~(5)中其他各项已知时, 所关注的结垢层不规则几何形状 $f(x)$ 是未知的. 另外, 假定在管壁某些适当位置读取的温度值是可(测量)得到的. 参看图1, 我们假设沿 $r = r_m$ 设置 M 个传感器, 用来记录温度信息, 识别逆运算中结垢层的几何形状. 逆运算分析的目的在于, 从这些已知的温度读数, 来预测未知的不规则的结垢层分布 $f(x)$. 设测点温度为 $Y(x_i, r_m)$, $i = 1 \sim M$, 其中 M 代表温差电偶数. 那么, 逆问题可以表述如下: 利用上述的温度测量数据 $Y(x_i, r_m)$, 对特定的区域估算出结垢层的未知几何形状 $f(x)$.

本研究中, 逆问题的解是通过使以下泛函的最小化来得到:

$$J[f(x)] = \sum_{i=1}^M [T_{s2}(x_i, r_m) - Y(x_i, r_m)]^2, \quad (6)$$

其中 $T_{s2}(x_i, r_m)$ 为测点 $(x, r) = (x_i, r_m)$ 处的估计(或计算)温度. 用精确值 $f(x)$ 的一个估算值 $f^K(x)$, 求解前面给出的直接问题, 来确定这些量. 这里, $f^K(x)$ 表示 $f(x)$ 在第 K 次迭代后的估算值. 另外, 为了充分确定未知的 $f(x)$ 表达式, 下面构造出“敏感度问题”和“伴随问题”.

1.3 敏感度问题

可以通过下面的方式, 由方程(1)~(5)定义的原直接问题, 得到敏感度问题: 假设 $f(x)$ 出现 $-\Delta f(x)$ 的变化, $T(x, r)$ 出现摄动, 用 $T + \Delta T$ 表示; 然后, 直接问题中的 f 用 $f + \Delta f$ 替代, T 用 $T + \Delta T$ 替代, 从所得到的结果表达式中减去直接问题, 并忽略二阶项, 得到敏感度函数为 ΔT 的下列敏感度问题.

在流体区域,

$$\frac{\partial^2 \Delta T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T_f}{\partial x^2} = u_x(x, r) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial \Delta T_f}{\partial x}, \quad (7a)$$

$$\Delta T_f = 0, \quad x = 0, 0 \leq r \leq f(x), \quad (7b)$$

$$\frac{\partial \Delta T_f}{\partial x} = 0, \quad x = L, 0 \leq r \leq f(x), \quad (7c)$$

$$\frac{\partial \Delta T_f}{\partial r} = 0, \quad r = 0, 0 \leq x \leq L; \quad (7d)$$

在结垢区域,

$$\frac{\partial^2 \Delta T_{s1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_{s1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T_{s1}}{\partial x^2} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \Delta T_{s1}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, f(x) \leq r \leq R_1, \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \Delta T_{s1}}{\partial x} = 0, \quad x = L, f(x) \leq r \leq R_1; \quad (8c)$$

在管壁区域,

$$\frac{\partial^2 \Delta T_{s2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_{s2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T_{s2}}{\partial x^2} = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \Delta T_{s2}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, R_1 \leq r \leq R_2, \quad (9b)$$

$$\frac{\partial \Delta T_{s2}}{\partial x} = 0, \quad x = L, R_1 \leq r \leq R_2, \quad (9c)$$

$$-k_{s2} \frac{\partial \Delta T_{s2}}{\partial r} = h \Delta T_{s2}, \quad r = R_2, 0 \leq x \leq L; \quad (9d)$$

在流体和结垢层之间的界面上,

$$\Delta T_f = \Delta T_{s1}, \quad r = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (10a)$$

$$k_f \frac{\partial \Delta T_f}{\partial n} = k_{s1} \frac{\partial \Delta T_{s1}}{\partial n}, \quad r = f(x), 0 \leq x \leq L; \quad (10b)$$

在结垢层与管壁之间的界面上,

$$\Delta T_{s1} = \Delta T_{s2}, \quad r = R_1, 0 \leq x \leq L, \quad (11a)$$

$$k_{s1} \frac{\partial \Delta T_{s1}}{\partial r} = k_{s2} \frac{\partial \Delta T_{s2}}{\partial r}, \quad r = R_1, 0 \leq x \leq L. \quad (11b)$$

敏感度问题(7)~(11),可以采用直接问题(1)~(5)相同的方法求解.

1.4 伴随问题和梯度方程

为了得到伴随问题,首先将方程(1a)、(2a)和(3a)分别乘以 Lagrange 乘子(或称伴随函数) $\lambda_f(x, r)$, $\lambda_{s1}(x, r)$ 和 $\lambda_{s2}(x, r)$,并对所得到的表达式在相应的空间区域积分.再将所得到的结果加到方程(6)的右边,得到泛函 $J[f(x)]$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned} J[f(x)] = & \sum_{i=1}^M [T_{s2}(x_i, r_m) - Y(x_i, r_m)]^2 + \\ & \int_{r=0}^{f(x)} \int_{x=0}^L r \cdot \lambda_f \cdot \left[\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} - u_x(x, r) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right] dx dr + \\ & \int_{r=f(x)}^{R_1} \int_{x=0}^L r \cdot \lambda_{s1} \cdot \left[\frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{s1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial x^2} \right] dx dr + \\ & \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{x=0}^L r \cdot \lambda_{s2} \cdot \left[\frac{\partial^2 T_{s2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{s2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{s2}}{\partial x^2} \right] dx dr. \end{aligned} \quad (12)$$

在方程(12)中,将 f 加上 Δf , T 加上 ΔT 的扰动,再将得到的式子减去原方程(12),并略去二阶项,可得到变量 ΔJ , 则

$$\begin{aligned} \Delta J[f(x)] = & \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{x=0}^L 2[T_{s2}(x, r) - Y(x, r)] \Delta T_{s2} \cdot \delta(x - x_i) \cdot \delta(r - r_m) dx dr + \\ & \int_{r=0}^{f(x)} \int_{x=0}^L r \cdot \lambda_f \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T_f}{\partial x^2} - u_x(x, r) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial \Delta T_f}{\partial x} \right] dx dr + \end{aligned}$$

$$\int_{r=f(x)}^{R_1} \int_{x=0}^L r \cdot \lambda_{s1} \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta T_{s1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_{s1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T_{s1}}{\partial x^2} \right] dx dr + \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{x=0}^L r \cdot \lambda_{s2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta T_{s2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_{s2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta T_{s2}}{\partial x^2} \right] dx dr, \quad (13)$$

其中 δ 为 Dirac 函数. 对方程(13)右边第2项~第4项的二重积分进行分部积分. 利用敏感度问题的边界条件, 则允许 ΔJ 趋于0. 通过消去包含 ΔT 的积分项, 可得到决定伴随函数 $\lambda_f(x, r), \lambda_{s1}(x, r), \lambda_{s2}(x, r)$ 的以下伴随问题.

在流体区域,

$$\frac{\partial^2 \lambda_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 \lambda_f}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial}{\partial x} [u_x(x, r) \lambda_f] = 0, \quad (14a)$$

$$\lambda_f = 0, \quad x = 0, 0 \leq r \leq f(x), \quad (14b)$$

$$\frac{\partial \lambda_f}{\partial x} + \frac{u_x(x, r)}{\alpha_f} \cdot \lambda_f = 0, \quad x = L, 0 \leq r \leq f(x), \quad (14c)$$

$$\frac{\partial \lambda_f}{\partial r} = 0, \quad r = 0, 0 \leq x \leq L; \quad (14d)$$

在结垢区域,

$$\frac{\partial^2 \lambda_{s1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \lambda_{s1}}{\partial x^2} = 0, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, f(x) \leq r \leq R_1, \quad (15b)$$

$$\frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial x} = 0, \quad x = L, f(x) \leq r \leq R_1; \quad (15c)$$

在管壁区域,

$$\frac{\partial^2 \lambda_{s2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_{s2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \lambda_{s2}}{\partial x^2} + \frac{2[T_{s2}(x, r) - Y(x, r)]}{r} \cdot \delta(x - x_i) \cdot \delta(r - r_m) = 0, \quad (16a)$$

$$\frac{\partial \lambda_{s2}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, R_1 \leq r \leq R_2, \quad (16b)$$

$$\frac{\partial \lambda_{s2}}{\partial x} = 0, \quad x = L, R_1 \leq r \leq R_2, \quad (16c)$$

$$-k_{s2} \frac{\partial \lambda_{s2}}{\partial r} = h \lambda_{s2}, \quad r = R_2, 0 \leq x \leq L; \quad (16d)$$

在流体和结垢层之间的界面上,

$$k_{s1} \lambda_f = k_f \lambda_{s1}, \quad r = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (17a)$$

$$k_{s1} \frac{\partial \lambda_f}{\partial n} = k_f \frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial n}, \quad r = f(x), 0 \leq x \leq L; \quad (17b)$$

在结垢层与管壁之间的界面上,

$$k_{s2} \lambda_{s1} = k_{s1} \lambda_{s2}, \quad r = R_1, 0 \leq x \leq L, \quad (18a)$$

$$\frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial r} = \frac{\partial \lambda_{s2}}{\partial r}, \quad r = R_1, 0 \leq x \leq L. \quad (18b)$$

那么, 伴随问题可以采用直接问题同样的方法求解.

最后,归结为如下的积分条件:

$$\Delta J = \int_{x=0}^L - \left[r \frac{\partial T_{s1}}{\partial n} \frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial n} \right]_{r=f(x)} \cdot \Delta f(x) dx. \quad (19)$$

采用文献[18]的定义,有

$$\Delta J = \int_{x=0}^L J'(x) \Delta f(x) dx, \quad (20)$$

其中 $J'(x)$ 为泛函 $J[f(x)]$ 的梯度.比较方程(19)与(20),得到

$$J'(x) = - \left[r \frac{\partial T_{s1}}{\partial n} \frac{\partial \lambda_{s1}}{\partial n} \right]_{r=f(x)}. \quad (21)$$

1.5 最小化共轭梯度法

假设函数 $T(x, r)$, $\Delta T(x, r)$, $\lambda(x, r)$ 和 $J'(x)$ 的第 K 次迭代存在,利用基于共轭梯度法的迭代过程来估算 $f(x)$.通过使泛函 $J[f(x)]$ 最小化,函数 $f(x)$ 的第 $K+1$ 次迭代可由下式进行估算:

$$f^{K+1}(x) = f^K(x) - \beta^K p^K(x), \quad K = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

其中 β^K 为从第 K 次到第 $K+1$ 次迭代的搜索步长; p^K 为递减方向(即搜索方向),给出如下:

$$p^K(x) = J'^K(x) + \gamma^K p^{K-1}(x), \quad (23)$$

方程(23)为第 K 次迭代的梯度方向 $J'^K(x)$ 和第 $K-1$ 次迭代的递减方向 $p^{K-1}(x)$ 共轭.共轭系数 γ^K 确定如下:

$$\gamma^K = \frac{\sum_{i=1}^M [J'^K(x) \delta(x - x_i)]^2}{\sum_{i=1}^M [J'^{K-1}(x) \delta(x - x_i)]^2}, \quad \gamma^0 = 0. \quad (24)$$

泛函 J 最小化在上述迭代过程中收敛性的证明参见文献[18].最后完成方程(22)的迭代,需要计算步长 β^K 和泛函梯度 $J'^K(x)$.

泛函 $J[f^{K+1}(x)]$ 的第 $K+1$ 次迭代可由改写方程(6)得到

$$J[f^{K+1}(x)] = \sum_{i=1}^M [T_{s2}(f^K - \beta^K p^K) - Y(x_i, r_m)]^2, \quad (25)$$

这里, f^{K+1} 用方程(22)的表达式替代.如果温度 $T_{s2}(f^K - \beta^K p^K)$ 按 Taylor 公式线性展开,方程(25)成为

$$J[f^{K+1}(x)] = \sum_{i=1}^M [T_{s2}(f^K) - \beta^K \Delta T_{s2}(p^K) - Y(x_i, r_m)]^2, \quad (26)$$

这里 $T_{s2}(f^K)$ 为利用估算的 $f^K(x)$ 代替实际的 $f(x)$ 之后,直接问题在 $(x, r) = (x_i, r_m)$ 处的解.令 $\Delta f(x) = p^K(x)$ ^[18], 敏感度函数 $\Delta T_{s2}(p^K)$ 可作为方程(7)~(11)在测量点 $(x, r) = (x_i, r_m)$ 处的解.通过方程(26)给出的与 β^K 相关的泛函最小化,可以确定搜索步长 β^K .重新整理后,可得如下的表达式:

$$\beta^K = \frac{\sum_{i=1}^M \Delta T_{s2}(p^K) [T_{s2}(f^K) - Y(x_i, r_m)]}{\sum_{i=1}^M [\Delta T_{s2}(p^K)]^2}. \quad (27)$$

1.6 停止准则

如果问题不包含测量误差,最小化准则的收敛条件为

$$J(f^{K+1}) < \eta, \quad (28)$$

其中 η 为一特定的小量,可用于停止准则.然而,观测到的温度数据包含了测量误差;因此,逆算解易于趋向扰动的输入数据,随着迭代次数的增加,其解将呈现震荡性^[19].计算经验表明,在共轭梯度法中,用差异性原理^[14]作为停止迭代过程是合理的.假设 $T_{s2}(x_i, r_m) - Y(x_i, r_m) \approx$

σ , 根据差异性原理, 停止准则 η 可由方程(6)得到:

$$\eta = M\sigma^2, \quad (29)$$

其中 σ 为测量误差的标准差. 则方程(28) 给出的停止准则 η , 由方程(29)确定.

1.7 计算步骤

逆问题解的计算步骤可以归结如下:

假设 $f^K(x)$ 为 K 次迭代后的值.

步骤1 分别对 $T_f(x, r), T_{s1}(x, r), T_{s2}(x, r)$ 求解方程(1) ~ (5) 给出的直接问题;

步骤2 检查由方程(29) 给出的 η , 方程(28) 给出的停止迭代条件, 若不满足则继续;

步骤3 分别对 $\lambda_f(x, r), \lambda_{s1}(x, r), \lambda_{s2}(x, r)$ 求解方程(14) ~ (18) 给出的伴随问题;

步骤4 计算方程(21) 的泛函梯度 $J'(x)$;

步骤5 分别由方程(24) 和(23) 计算共轭系数 γ^K 和递减方向 $p^K(x)$;

步骤6 令 $\Delta f(x) = -p^K(x)$, 分别对 $\Delta T_f(x, r), \Delta T_{s1}(x, r), \Delta T_{s2}(x, r)$ 求解方程(7) ~ (11) 给出的敏感度问题;

步骤7 由方程(27) 计算搜索步长 β^k ;

步骤8 由方程(22) 计算新的估算值 $f^{K+1}(x)$, 再回到步骤1.

2 结果和讨论

本文的目的是在事先不知道几何形状函数的分布形式时, 证明本文用来估算管内壁结垢层不规则边界几何形状方法(即“函数预测”)的有效性. 为了阐明本文反向分析的准确性, 将结垢层仿真的精确边界层几何形状 $f(x)$ 写为

$$f(x) = 0.24 + 0.04\sin\left(\pi + \frac{x}{L}\pi\right). \quad (30)$$

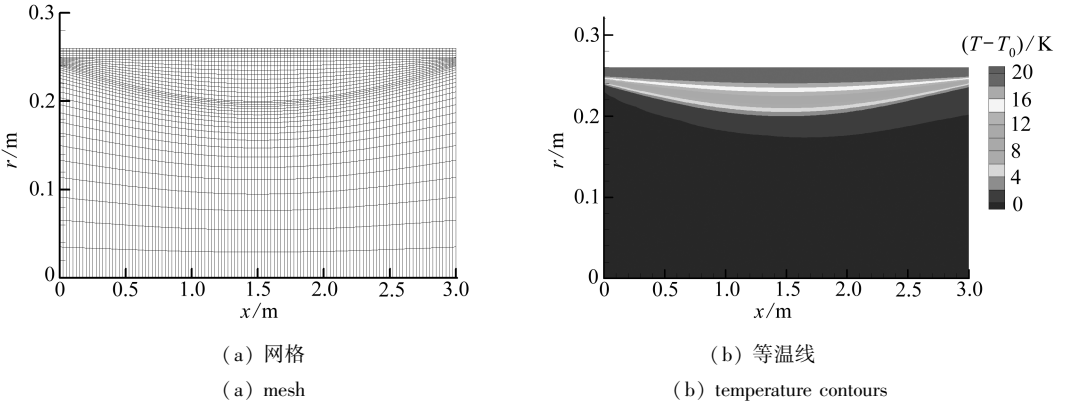


图2 直接问题的计算网格和等温线

Fig.2 The computational mesh and the temperature contours of the direct problem

式(30) 的单位为:m. 上述公式表明, 正如图2(a) 给出的网格所看到的, 最厚的部分出现在管道中部, 并朝两端逐渐变薄. 本研究中, 假设管壁的材料为钢材, 内部流体为冷却液流体 HFC-134a. 则系统的材料性能、几何参数和热学参数列出如下:

$$k_f = 0.12 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}), k_{s1} = 2.0 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}), k_{s2} = 42.0 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}),$$

$$R_1 = 0.25 \text{ m}, R_2 = 0.26 \text{ m}, L = 3.0 \text{ m}, T_{in}(r) = T_0 = \text{const},$$

$$T_\infty - T_0 = 20 \text{ K}, h = 100 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}).$$

由于结垢层厚度是轴向距离的一个函数, 管流的横截面沿着管道而变化, 导致管流呈收缩和扩

大的影响。因此,管流从来没有得到充分发展。然而,如果假设结垢层厚度的变化远小于管道的长度,或者结垢层几何形状曲线的斜率非常平缓,那么速度曲线相对于完全发展的速度曲线的偏离并不严重,用一个特定的完全发展速度曲线来近似实际的流动是可取的。该假设使得 Navier-Stokes 方程,从这个已经变得复杂的逆问题中分离出来。从而,在本研究中,假设管流为完全发展的层流,速度曲线可写为

$$u_x(x, r) = 2u_{av}(x) \left[1 - \left(\frac{r}{f(x)} \right)^2 \right], \quad (31)$$

其中 $u_{av}(x)$ 为管流的体平均速度。由于管流的横截面沿着管道轴向变化,体平均速度也将跟着变化,来满足质量流量的连续性。为此,体平均速度可表示为

$$u_{av}(x) = u_{av0} \left[\frac{f(0)}{f(x)} \right]^2, \quad (32)$$

其中 u_{av0} 为管道入口处(即 $x = 0$) 的体平均速度,并设定为 0.2 m/s 。

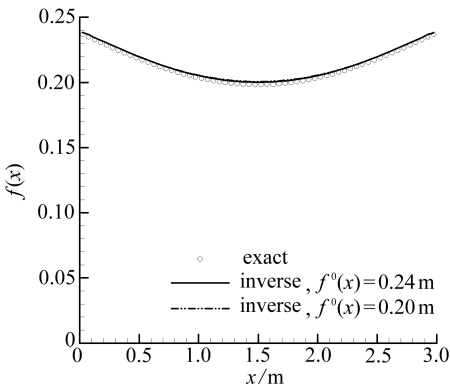


图3 不同初始估算值 $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$ 和 $f^0(x) = 0.20 \text{ m}$ 及 $\sigma = 0.0$ 时,精确结垢层和逆运算结垢层的几何形状

Fig. 3 Profiles of the exact fouling layer and inverse fouling layers with different initial guesses ($f^0(x) = 0.24 \text{ m}$, $f^0(x) = 0.20 \text{ m}$) and $\sigma = 0.0$

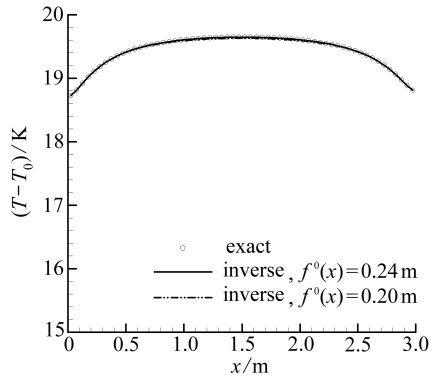


图4 不同初始估算值 $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$ 和 $f^0(x) = 0.20 \text{ m}$ 及 $\sigma = 0.0$ 时,测量位置的精确温度和逆运算温度的分布

Fig. 4 Distributions of exact and inverse temperatures at the measurement locations with different initial guesses ($f^0(x) = 0.24 \text{ m}$, $f^0(x) = 0.20 \text{ m}$) and $\sigma = 0.0$

本文的数值计算程序“USTREAM”,是由相关学者开发,以无结构网格、充分配置的有限卷代码为基础,是“STREAM”的结构网格、多分组代码所派生^[20]。由于计算区域以管道中心线对称,只需要对上半部区域求解逆问题。当前问题数值计算的挑战之一是结垢层的几何形状,即固体/流体的界面随着一次次迭代而变化。它使结垢层和管流区域的边界形状都受到影响。结果使得两个区域的网格,在每次反迭代期间都需要再造。因此,网格重建算法合并了再造覆盖结垢层和管流部分的代码(未涉及固体管道的网格)。直接问题的完整网格由图 2(a) 给出,其中 r -坐标放大了 6 倍,使结垢层的几何形状可以看得更清晰。该网格包括了 4 200 个单元,其中 x 方向 120 个, r 方向 35 个。还可以发现,网格向结垢层/流体界面收缩,提高了界面邻接区域的数值分辨率。所选用的网格,其单元密度足够密集,足以经网格密度试验后得到网格独立解。图 2(b) 给出了直接问题的等温线。结垢层对热传导率出现明显的削弱作用,在结垢层变厚的地方,等温线更为稀松,温度梯度更小,热传导率更低。

本研究中,假设温差电偶设置在固体管道的内表面上,即 $r_m = 0.25 \text{ m}$ 。这里,对方程(6)所设立的测量温度 $Y(x_i, r_m)$,并没有作真实的测量。相反,假设一个实际的结垢层(方程(30))

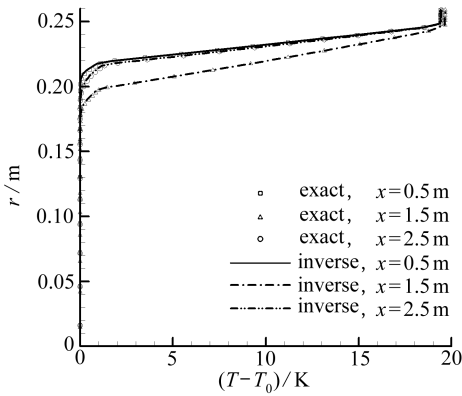


图5 初始估算值 $f^0(x) = 0.24$ m 及 $\sigma = 0.0$ 时, 在 3 个不同位置 $x = 0.5$ m, 1.5 m, 2.5 m 处, 沿径向的精确温度和逆运算温度的分布

Fig. 5 Distributions of exact and inverse temperatures along radial direction at three different locations, $x = 0.5$ m, 1.5 m, 2.5 m, with initial guesses $f^0(x) = 0.24$ m and $\sigma = 0.0$

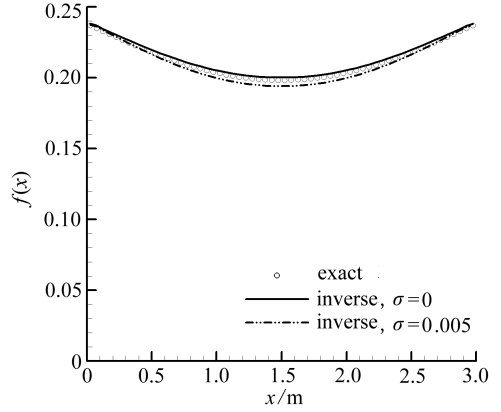


图6 初始估算值 $f^0(x) = 0.24$ m 及 $\sigma = 0.005$ 时, 精确结垢层和逆运算结垢层的几何形状

Fig. 6 Profiles of the exact fouling layer and inverse fouling layers with initial guesses $f^0(x) = 0.24$ m and $\sigma = 0.005$

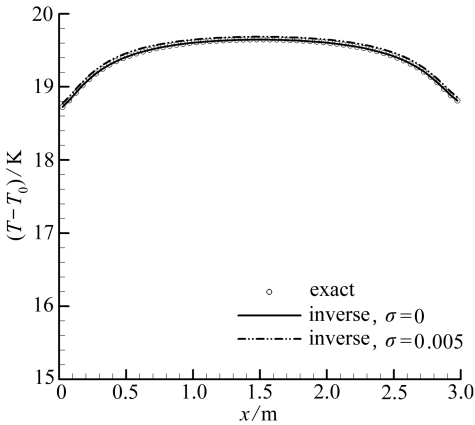


图7 初始估算值 $f^0(x) = 0.24$ m 及 $\sigma = 0.005$ 时, 测量位置的精确温度和逆运算温度的分布

Fig. 7 Distributions of exact and inverse temperatures at the measurement locations with initial guesses $f^0(x) = 0.24$ m and $\sigma = 0.005$

的 $f(x)$), 替代直接问题(1) ~ (5) 中精确的 $f(x)$, 计算温差电偶设置位置的温度, 得到计算温度 $Y_{\text{exact}}(x_i, r_m)$. 同时, 考虑到测量误差, 在上述计算温度 $Y_{\text{exact}}(x_i, r_m)$ 上加一个随机的误差, 得到测量温度 $Y(x_i, r_m)$. 从而, 测量温度 $Y(x_i, r_m)$ 可表示为

$$Y(x_i, r_m) = Y_{\text{exact}}(x_i, r_m) + \omega\sigma, \quad (33)$$

其中 ω 为在 $-2.576 \sim 2.576$ 之间的一个随机变量, 置信度达 99%, σ 为测量的标准差. 这种方法得到的测量温度 $Y(x_i, r_m)$, 称谓仿真的测量温度, 相应的温度测量, 称谓仿真的温度测量.

图3 给出了不计测量误差, 且初始估算曲线为 $f^0(x) = 0.24$ m 和 $f^0(x) = 0.20$ m 时, 由数值实验得到的逆运算解. 由图3 可以看出, $f(x)$ 的估计值几乎与精确值相等, 且与初始估算值无关. 图4 描述了测量点估计的和精确的温度曲线. 由图4 可以看出, 预测温度与精确温度有极好的一致性,

且与初始估算值无关. 一旦正确地估计出结垢层的边界曲线, 可以得到整个区域里准确的温度分布. 图5 描述了3 个不同位置的径向温度场, 即 $x = 0.5$ m, 1.5 m, 2.5 m. 可以看出, 预测温度分布与精确值在所有测点上几乎是一致的.

图6 给出了当初始估算值 $f^0(x) = 0.24$ m, 测量标准差 $\sigma = 0.005$ 时, $f(x)$ 的逆运算解. 99% 置信度的温度单位, 标准差 $\sigma = 0.005$, 相应的测量误差为 1.28%. 由图6 可以看出, 对本研究所考虑的情况, 测量误差的增加, 对逆运算解的准确性并不产生明显的削弱. 图7 给出了

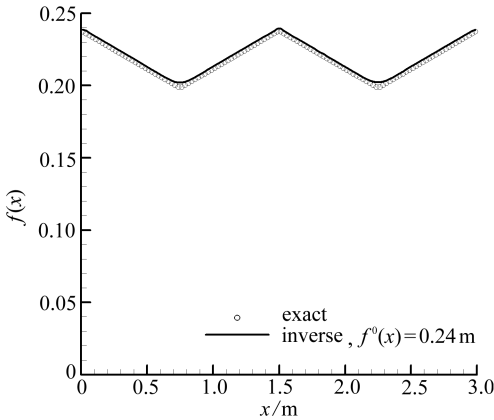


图8 初始估算值 $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$, $\sigma = 0.0$ 和精确曲线为方程(34)时,精确结垢层与逆运算结垢层的几何形状

Fig. 8 Profiles of the exact frost layer and inverse fouling layers with initial guesses $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$, $\sigma = 0.0$, and the exact profile of equation (34)

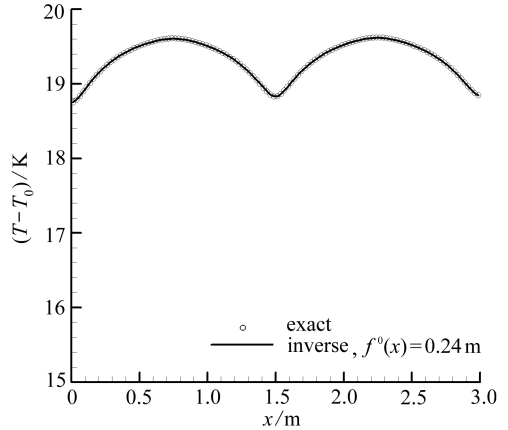


图9 初始估算值 $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$, $\sigma = 0.0$ 和精确曲线为方程(34)时,测量位置的精确温度和逆运算温度的分布

Fig. 9 Distributions of exact and inverse temperatures at the measurement locations with initial guesses $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$, $\sigma = 0.0$, and the exact profile of equation (34)

测量点的预测温度分布,同时还证明了,即使存在测量误差 ($\sigma = 0.005$), 本文所提出的逆运算算法仍可以得到满意的结果。

为了阐述当前的方法,对预测所有的结垢层形状的函数形式能力,再考察一个曲线如下:

$$\begin{cases} f(x) = 0.24 - 0.053 \ 3x, & 0 \leq x < 0.75; \\ f(x) = 0.20 + 0.053 \ 3(x - 0.75), & 0.75 \leq x < 1.5; \\ f(x) = 0.24 - 0.053 \ 3(x - 1.5), & 1.5 \leq x < 2.25; \\ f(x) = 0.20 + 0.053 \ 3(x - 2.25), & 2.25 \leq x \leq 3.0; \end{cases} \quad (34)$$

上式单位为 m. 可见,方程(34)为分段线性函数,定义了一个 W-型曲线,如图 8 所示. 该线性函数有 3 个拐点,分别为 $x = 0.75 \text{ m}$, 1.5 m , 2.25 m ,这可能使得逆运算的近似变得困难. 图 8 是在初始估算值 $f^0(x) = 0.24 \text{ m}$ 和 $\sigma = 0.0$ 时,得到的预测几何形状. 可以看到,拐点是人为设置的,在自然形成的结垢层中不大可能出现,尽管角尖处不尽如人意,方程(34)很好地由本方法所得到. 另外,图 9 给出了测量点的精确温度和预测温度的比较,表明计算值与精确值几乎相同. 因此,本方法具备了得到任意函数形式的结垢层几何形状的能力。

3 结 论

共轭梯度法已成功地应用于求解逆几何问题,通过管壁内部的温度测量,来估算管流系统管内壁结垢层未知的不规则边界的几何形状. 随后,计算系统的温度分布. 数值结果显示,即使考虑了不可避免的测量误差,本研究所提出的方法,仍可以正确地估算出结垢层边界的几何形状与系统的温度分布. 本研究所提出的技术,可用于管路维修的预警系统,当管壁结垢层厚度超出某预先设定值时,可适时发出维修警示. 然而,目前的研究乃假设管流的流场为完全发展流,因此管流流场非经由 Navier-Stokes 方程求得. 该条件使本方法的应用局限于几何形状变化平缓的结垢层. 对于结垢层几何形状变化剧烈的情况,逆运算过程需要同时应用 Navier-Stokes 方程求解流场,这将使逆运算程序变得极为复杂. 该课题有待将来加以克服。

参考文献:

- [1] Jarny Y, Ozisik M N, Bardon J B. A general optimization method using an adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1991, **34**(11): 2911-2919.
- [2] Yang Y C, Chu S S, Chang W J. Thermally-induced optical effects in optical fibers by inverse methodology[J]. *J Appl Phys*, 2004, **95**(9): 5159-5165.
- [3] Chen W L, Yang Y C, Lee H L. Inverse problem in determining convection heat transfer coefficient of an annular fin[J]. *Energy Conv Manag*, 2007, **48**(4): 1081-1088.
- [4] Chiang C C, Chou S K. Inverse geometry design problem in optimizing hull surfaces[J]. *J Ship Res*, 1998, **42**(2): 79-85.
- [5] Huang C H, Chen H M. An inverse geometry problem of identifying growth of boundary shapes in a multiple region domain[J]. *Numer Heat Transfer A*, 1999, **35**(4): 435-450.
- [6] Park H M, Shin H J. Empirical reduction of modes for the shape identification problems of heat conduction systems[J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2003, **192**(15): 1893-1908.
- [7] Park H M, Shin H J. Shape identification for natural convection problems using the adjoint variable method[J]. *J Comput Phys*, 2003, **186**(1): 198-211.
- [8] Divo E, Kassab A J, Rodriguez F. An efficient singular superposition technique for cavity detection and shape optimization[J]. *Numer Heat Transfer B*, 2004, **46**(1): 1-30.
- [9] Kwag D S, Park I S, Kim W S. Inverse geometry problem of estimating the phase front motion of ice in a thermal storage system[J]. *Inverse Problems in Eng*, 2004, **12**(1): 1-15.
- [10] Su C R, Chen C K. Geometry estimation of the furnace inner wall by an inverse approach[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, **50**(19/20): 3767-3773.
- [11] 杨旭东, 乔志德. 基于共轭方程法的跨音速机翼气动优化设计[J]. 航空学报, 2003, **24**(1): 1-5. (YANG Xu-dong, QIAO Zhi-de. Optimum aerodynamic design of transonic wing based on adjoint equations method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2003, **24**(1): 1-5. (in Chinese))
- [12] (杨旭东, 乔志德, 朱兵. 基于控制理论和NS方程的气动设计方法研究[J]. 空气动力学学报, 2005, **23**(1): 46-51. (YANG Xu-dong, QIAO Zhi-de, ZHU Bing. Aerodynamic design method based on control theory and Navier-Stokes equations[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2005, **23**(1): 46-51. (in Chinese))
- [13] Yang Y C, Chang W J. Simultaneous inverse estimation for boundary heat and moisture fluxes of a double-layer annular cylinder with interface resistance[J]. *Appl Math Comput*, 2006, **176**(2): 594-608.
- [14] Chen W L, Yang Y C, Lee H L. Estimating the absorptivity in laser processing by inverse methodology[J]. *Appl Math Comput*, 2007, **190**(1): 712-721.
- [15] Lee H L, Yang Y C, Chang W J, Wu T S. Estimation of heat flux and thermal stresses in multilayer gun barrel with thermal contact resistance[J]. *Appl Math Comput*, 2009, **209**(2): 211-221.
- [16] Alifanov O M, Artyukhin E A. Regularized numerical solution of nonlinear inverse heat-conduction problem[J]. *J Eng Phys*, 1975, **29**(1): 934-938.
- [17] Zueco J, Alhama F. Simultaneous inverse determination of temperature-dependent thermo-physical properties in fluids using the network simulation method[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, **50**(15/16): 3234-3243.

- [18] Alifanov O M. *Inverse Heat Transfer Problems*[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [19] Alifanov O M. Application of the regularization principle to the formulation of approximate solution of inverse heat conduction problem[J]. *J Eng Phys*, 1972, **23**(6): 1566-1571.
- [20] Lien F S, Chen W L, Leschziner M A. A multiblock implementation of a non-orthogonal, collocated finite volume algorithm for complex turbulent flows[J]. *Int J Numer Methods Fluids*, 1996, **23**(6): 567-588.

Inverse Estimation for the Unknown Fouling Geometry on the Inner Wall of a Forced-Convection Pipe

CHEN Wen-lih, YANG Yu-ching, LEE Haw-long, Jose Leon Salazar
(Clean Energy Center, Department of Mechanical Engineering, Kun Shan University,
Yung-Kang City, Tainan 710-03, Taiwan, China)

Abstract: A conjugate gradient method based inverse algorithm was applied to estimate the unknown fouling-layer profile on the inner wall of a pipe system using simulated temperature measurements taken within the pipe wall. It was assumed that no prior information was available on the functional form of the unknown profile; hence the procedure was classified as the function estimation in inverse calculation. The temperature data obtained from the direct problem were used to simulate the temperature measurements. The accuracy of the inverse analysis is examined by using simulated exact and inexact temperature measurements. Results show that an excellent estimation on the fouling-layer profile can be obtained for the test case considered. The technique presented can be used in a warning system to call for pipe maintenance when the thickness of fouling exceeds a pre-defined criterion.

Key words: inverse problem; fouling layer; pipe system; conjugate gradient method