文章编号:1000-0887(2010)12-1489-07

一个广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程孤子解*

莫嘉琪[1,2]

(1. 安徽师范大学 数学系,安徽 芜湖 241003;
2. 上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所, 上海 200240)

摘要: 研究了一个广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程. 利用同伦映射方法,首先构造了相应的同伦映射;然后选取了适当的初始近似;并计算各阶相应孤子近似解. 同时还考虑了一个微扰方程.

关 键 词: 非线性; Klein-Gordon 方程; 孤子; 近似方法
中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.009

引　　言

在非线性方程的解的研究中,孤子理论起着重要的作用. 许多自然科学,诸如在生物学、化学、通讯学、流体力学和凝聚态物理学有广泛的应用[1-6]. 近来出现了许多近似方法,例如双曲正切函数法、Jacobi 椭圆函数法、齐次平衡法、辅助方程法等[7-8]. 这些方法已经应用于激波、散射光波、量子力学、大气物理和神经网络问题[9-11]. 许多近似方法被发展和优化,包括平均法、边界层法、匹配渐近展开法和多重尺度法[12-16]. 孤波的非线性理论的近似方法是一个新研究途径. 这些方法主要是利用渐近理论将非线性问题转化为线性问题来处理. 同伦映射方法[17]是其中一种渐近方法. 本文是讨论一个广义扰动 Klein-Gordon 方程. 利用一个简单而有效的技巧来得到孤子的近似解.

考虑如下的一个广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程[18-19]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^2 = g\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

其中, c_0, α 和 β 为常数, g 为扰动项,它是在自变量对应的区域内为充分光滑的有界函数. 广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程在物理学中如大气物理、流体力学、等离子物理、光学和场论等学科中有多方面的应用[20].

---

* **收稿日期:** 2010-08-15; **修订日期:** 2010-10-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40876010);中国科学院知识创新工程重要方向资助项目(KZCX2-YW-Q03-08);公益性行业(气象)科研专项基金资助项目(GYHY200806010);LASG 国家重点实验室专项经费资助项目;上海市教育委员会 E-研究院建设计划资助项目(E03004)
作者简介: 莫嘉琪(1937—),男,浙江德清人,教授(Tel:+86-553-3869642; E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn).

1 孤子和同伦映射

设 $g(u,u_x)=0$, 广义非线性 Klein-Gordon 方程(1)为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u-\beta u^2=0. \tag{2}$$

令 $u=u(\xi),\xi=k(x-ct)$. 方程(2)为

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+\alpha u-\beta u^2=0, \tag{3}$$

且 $c^2-c_0^2=\alpha/(4k^2)$, 其中 k 和 c 分别为波数和波速. 利用 Jacobi 椭圆函数法, 我们得到方程(3)的孤子解, 因此方程(2)有[20]

$$\bar{u}_0(x,t)=\frac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(x-ct)\right). \tag{4}$$

为了得到广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程(1)的近似解, 我们引入同伦映射[17] $H(u,s):R\times I\to R$:

$$H(u,s)=L(u)-L(w)+s(L(w)-\beta u^2-g(u,u_x)), \tag{5}$$

其中, $R=(-\infty,+\infty)$, $I=[0,1]$, 而线性算子

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u, \tag{6}$$

且 w 为未知函数, 它将在下面决定.

显然, 由式(5), $H(u,1)=0$ 和方程(1)相同. 于是方程(1)的解 $u(x,t)$ 就是 $H(u,s)=0$ 的解当 $s\to 1$ 的情形.

2 孤子的近似解和精确解

设

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t)s^i. \tag{7}$$

将式(7)代入式(5), 比较 $H(u,s)=0$ 两边关于 s 同次幂的系数. 由 $H(u,s)=0$ 关于 s 的 0 次幂的系数有

$$L(u_0)=L(w). \tag{8}$$

选择 w 为 $\bar{u}_0$. 由式(8)、(6)和(4), 我们能得到

$$u_0(x,t)=\frac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(x-ct)\right). \tag{9}$$

由 $H(u,s)=0$ 关于 s 的一次幂的系数有

$$L(u_1)=g(u_0,u_{0x}). \tag{10}$$

利用 Fourier 变换法, 由方程(10)有

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}_1}{\mathrm{d}t^2}+(c_0^2\lambda^2+\alpha)\bar{u}_1=\bar{g}(u_0,\lambda u_{0\lambda}), \tag{11}$$

其中 $\bar{g}$ 表示 g 的 Fourier 变换及

$$\bar{u}_0(\lambda,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi,t)\exp(-\mathrm{i}\lambda\xi)\mathrm{d}\xi.$$

由方程(11)当零初始值时,我们有

$$\bar{u}_1(\lambda,\tau)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)+\sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}}\times\right.$$
$$\left.g(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,t))\right]\exp(-\mathrm{i}\lambda\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

于是可得

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)+\sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}}\times\right.$$
$$\left.g(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,t))\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi))\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau. \tag{12}$$

由 $H(u,s)=0$ 关于 s 的二次幂的系数有

$$L(u_2)=2\beta u_0u_1+g_u(u_0,u_{0x})u_1+g_{u_x}(u_0,u_{0x})u_{1x}. \tag{13}$$

由方程(13)当零初始值时,我们有

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)+\sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}}\times$$
$$[2\beta u_0(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)+\bar{g}_u(u_0(\xi,\tau),u_{0\lambda}(\xi,\tau))u_1(\xi,\tau)+$$
$$g_{u_\lambda}(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,\tau))u_{1\xi}(\xi,\tau)\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

由式(9)、(12)、(14)和同伦映射理论,我们得到了非线性扰动 Klein-Gordon 方程(1)的二次近似 $u_{\mathrm{app}\,2}(x,t)$:

$$u_{\mathrm{app}\,2}(x,t)=\frac{3\alpha}{2\beta}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(x-ct)\right)+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)+\sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}}\times$$
$$[2\beta u_0(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)+g(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,t))+$$
$$g_u(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,\tau))u_1(\xi,\tau)+$$
$$g_{u_\xi}(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,\tau))u_{1\xi}(\xi,\tau)\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda, \tag{15}$$

其中, u_0 和 u_1 分别由式(9)和(12)表示.

因此,用相同的方法,我们还能得到广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程(1)孤子解的更高次近似 $u_{\mathrm{app}\,n}(x,t)$:

$$u_{\mathrm{app}\,n}(x,t)=\frac{3\alpha}{2\beta}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(x-ct)\right)+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)+\sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}}\times\right.$$
$$\left[2\beta\sum_{i,j=0,i+j\neq0}^{n-1}u_i(\xi,\tau)u_{n-i-1}(\xi,\tau)+g(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,t))+\right.$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}g_u(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,\tau))u_i(\xi,\tau)+$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} g_{u_i}(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,\tau))u_{1\xi}(\xi,\tau)\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi)) + G_n\Big]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda, \tag{16}$$

其中 G_n 由已知函数 $u_i, i = 0,1,\cdots,n-1$ 表示.

若选取初始近似为方程(3)的孤子解(4),则由式(5)和广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程的性态,级数(7)是一致收敛的[17,21]. 于是方程(1)存在一个精确孤子解

$$u_{\mathrm{exa}}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t) \left(= \lim_{n\to\infty} u_{\mathrm{app}\,n}(x,t)\right).$$

3 微 扰 方 程

现考虑一个广义非线性扰动 Klein-Gordon 方程(1)的弱扰动的情形,它的扰动项是一个小的摄动项 $g(u,u_x) = \varepsilon\sin(\partial u/\partial x)(0 < \varepsilon \ll 1)$, 其方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^2 = \varepsilon\sin\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{17}$$

由式(15),非线性扰动 Klein-Gordon 方程(17)孤子解有如下的二次近似 $u_{\mathrm{app}\,2}(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{app}\,2}(x,t) = {} & \frac{3\alpha}{2\beta}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2 - c_0^2}\right|}(x-ct)\right) + \\ & \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t) + \sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}} \times \\ & [2\beta u_0(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau) + \sin(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,t)) + \\ & \cos(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,\tau))u_{1\xi}(\xi,\tau)\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 u_0 由式(9)表示且

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = {} & \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{-\cos(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t) + \sin(\sqrt{c_0^2\lambda^2+\alpha}\ t)}{(c_0^2\lambda^2+\alpha)^{1/2}} \times \\ & \sin(u_0(\xi,\tau),u_{0\xi}(\xi,t))\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi))\Big]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

接下来,我们还能得到微扰 Klein-Gordon 方程(17)孤子解的更高次近似 $u_{\mathrm{app}\,n}(x,t)$, 其结构从略.

4 比 较 精 度

为了方便,我们只考虑微扰 Klein-Gordon 方程(17)孤子解的二次近似 $u_{\mathrm{app}\,2}(x,t)$.

另一方面,我们能得到微扰 Klein-Gordon 方程(17)孤子的渐近解. 设

$$u_{\mathrm{per}} = \sum_{i=0}^{\infty}\tilde{u}_i(x,t)\varepsilon^i, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{19}$$

将式(19)代入式(17),按 ε 展开非线性项并使方程两边关于 ε 的幂的系数相等,对于 ε^0, ε^1 的系数可得

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial x^2} + \alpha\tilde{u}_0 - \beta\tilde{u}_0^2 = 0, \tag{20}$$

$$L(\tilde{u}_1) = 2\beta\tilde{u}_0\tilde{u}_0 + \sin\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x}. \tag{21}$$

由式(20),仍取由式(4)的孤子解为

$$\tilde{u}_0(x,t)=\frac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(x-ct)\right). \tag{22}$$

并由式(21),可得解 $\tilde{u}_1(x,t)$. 因此由摄动理论[21] 有摄动解 $u_{\mathrm{per}}(x,t)$:

$$u_{\mathrm{per}}(x,t)=\tilde{u}_0(x,t)+\varepsilon\tilde{u}_1(x,t)+O(\varepsilon^2),\qquad 0<\varepsilon\ll 1, \tag{23}$$

其中 $\tilde{u}_0$ 由式(22) 表示且 $\tilde{u}_1$ 为方程(21)的一个解.

今考虑由同伦映射方法得到的近似解(18)的精度. 由摄动理论[21],我们有

$$u_{\mathrm{exa}}-u_{\mathrm{per}}=O(\varepsilon^2),\qquad (x,t)\in[-M,M]\times[0,T],\ 0<\varepsilon\ll 1, \tag{24}$$

其中 M 和 T 为足够大的正常数.

由式(20)、(21)和式(18)、(23),不难看出

$$\begin{aligned}&L(u_{\mathrm{app}\,2}-u_{\mathrm{per}})=L(u_0+u_1+u_2)-L(\tilde{u}_0+\varepsilon\tilde{u}_1)+O(\varepsilon^2)=\\&\qquad\varepsilon\sin\frac{\partial u_0}{\partial x}+2\beta u_0u_1+\varepsilon\frac{\partial u_{1x}}{\partial x}\cos\frac{\partial u_{0x}}{\partial x}-2\varepsilon\beta\tilde{u}_0\tilde{u}_0-\varepsilon\sin\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x}+O(\varepsilon^2)=\\&\qquad O(\varepsilon^2),\qquad (x,t)\in[-M,M]\times[0,T],\ 0<\varepsilon\ll 1,\end{aligned}$$

其中 $$u_0=\tilde{u}_0=\frac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{c^2-c_0^2}\right|}(x-ct)\right)$$

和 $$u_1=O(\varepsilon).$$

所以有

$$L(u_{\mathrm{app}\,2}-u_{\mathrm{per}})=O(\varepsilon^2),\qquad (x,t)\in[-M,M]\times[0,T],\ 0<\varepsilon\ll 1, \tag{25}$$

且

$$(u_{\mathrm{app}\,2}-u_{\mathrm{per}})\big|_{t=0}=O(\varepsilon^2),\qquad x\in[-M,M],\ 0<\varepsilon\ll 1. \tag{26}$$

由式(25)和(26)及不动点原理[21],有

$$u_{\mathrm{app}\,2}-u_{\mathrm{per}}=O(\varepsilon^2),\qquad (x,t)\in[-M,M]\times[0,T],\ 0<\varepsilon\ll 1. \tag{27}$$

于是由式(24)和(27),得到

$$u_{\mathrm{app}\,2}-u_{\mathrm{exa}}=O(\varepsilon^2),\qquad (x,t)\in[-M,M]\times[0,T],\ 0<\varepsilon\ll 1.$$

由上我们知道用同伦映射方法得到的非线性扰动 Klein-Gordon 方程孤子解的近似解具有很好的精度.

5 结　　论

同伦映射方法是一个简单而有效的方法. 同伦映射方法是一个近似的解析方法,它不同于一般的数值方法. 用同伦映射方法得到的展开式还能继续进行解析运算. 于是由式(15)或式(16),我们能进一步研究孤子的定性和定量的性态.

注 本文所用的同伦映射方法,也可适用于其它更广泛的扰动 Klein-Gordon 方程和其它有关的非线性方程[17].

参考文献:

[1] 马松华, 强继业, 方建平. 2+1 维 Boiti-Leon-Pempinelli 系统的混沌行为及孤子间的相互作用[J]. 物理学报, 2007, **56**(2): 620-626.

[2] MA Song-hua, QIANG Ji-ye, FANG Jian-ping. Annihilation solitons and chaotic solitons for the (2+1)-dimensional breaking soliton system[J]. *Commun Theor Phys*, 2007, **48**(4): 662-666.

[3] Loutsenko I. The variable coefficient Hele-Shaw problem, integrability and quadrature identities[J]. *Comm Math Phys*, 2006, **268**(2): 465-479.

[4] Gedalin M. Low-frequency nonlinear stationary waves and fast shocks: hydrodynamical description[J]. *Phys Plasmas*, 1998, **5**(1): 127-132.

[5] Parkes E J. Some periodic and solitary travelling-wave solutions of the short-pulse equation [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2008, **38**(1): 154-159.

[6] 李向正, 李修勇, 赵丽英, 张金良. Gerdjikov-Ivanov 方程的精确解[J]. 物理学报, 2008, **57**(4): 2231-2234.

[7] WANG Ming-liang. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. *Phys Lett A*, 1995, **199**(3/4): 169-172.

[8] Sirendaoreji, JIONG Sun. Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations[J]. *Phys Lett A*, 2003, **309**(5): 387-396.

[9] McPhaden M J, Zhang D. Slowdown of the meridional overturning circulation in the upper Pacific ocean[J]. *Nature*, 2002, **415**(3): 603-608.

[10] GU Dai-fang, Philander S G H. Interdecadal climate fluctuations that depend on exchanges between the tropics and extratropics[J]. *Science*, 1997, **275**(7): 805-807.

[11] 潘留仙, 左伟明, 颜家壬. Landau-Ginzburg-Higgs 方程的微扰理论[J]. 物理学报, 2005, **54**(1): 1-5.

[12] NI Wei-ming, WEI Jun-cheng. On positive solution concentrating on spheres for the Gierer-Meinhardt system[J]. *J Differ Equations*,2006, **221**(1): 158-189.

[13] Bartier Jean-Philippe. Global behavior of solutions of a reaction-diffusion equation with gradient absorption in unbounded domains[J]. *Asymptotic Anal*, 2006, **46**(3/4): 325-347.

[14] Libre J, da Silva P R, Teixeira M A. Regularization of discontinuous vector fields on R^3 via singular perturbation[J]. *J Dyn Differ Equations*, 2007, **19**(2): 309-331.

[15] Guarguaglini F R, Natalini R. Fast reaction limit and large time behavior of solutions to a nonlinear model of sulphation phenomena[J]. *Commun Partial Differ Equations*, 2007, **32**(2): 163-189.

[16] MO Jia-qi. Approximate solution of homotopic mapping to solitary for generalized nonlinear KdV system[J]. *Chin Phys Lett*, 2009, **26**(1): 010204.

[17] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*[M]. New York: CRC Press Co, 2004.

[18] Zheng X, Zhang H Q. Backlund transformation and exact solutions for (2+1)-dimensional Boussinesq equation[J]. *Acta Phys Sin*, 2005, **54**(3): 1476-1480.

[19] MA Song-hua, FANG Jian-ping, ZHENG Chun-long. Complex wave exitations and chaotic patterns for a general (2+1)-dimensional Korteweg-de Vries system[J]. *Chin Phys*, 2008, **17**(8):2767-2773.

[20] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q. Expansion method about the Jacobi elliptic function and its applications to nonlinear wave equations[J]. *Acta Phys Sin*, 2001, **50**(11): 2068-2073.

[21] de Jager E M, JIANG Fu-ru. *The Theory of Singular Perturbation*[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996.

Soliton Solution to Nonlinear Generalized Disturbed Klein-Gordon Equation

MO Jia-qi[1,2]

(1. *Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*,
Wuhu, *Anhui* 241003, *P. R. China*;
2. *Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU*,
Shanghai 200240, *P. R. China*)

Abstract: A generalized nonlinear disturbed Klein-Gordon equation was considered. By using the homotopic mapping method, firstly, the corresponding homotopic mapping was constructed. Then the suitable initial approximation was selected, and the arbitrary order approximate solution of the soliton was calculated. At one time, a weakly disturbed equation was studied.

Key words: nonlinear; Klein-Gordon equation; soliton; approximate method