

Hamilton 体系下含弱粘接复合材料层合板的灵敏度分析研究^{*}

李顶河, 徐建新, 卿光辉

(中国民航大学 航空工程学院,天津 300300)

(陈伟球推荐)

摘要: 基于径向基点插值函数(RPIM),在 Hamilton 体系下研究了含弱粘接复合材料层合板的灵敏度分析问题.利用弹簧层模型和修正 H-R(Hellinger-Reissner)变分原理,推导了可用于含弱粘接复合材料层合板响应和灵敏度分析的混合控制方程,给出了基于该混合控制方程进行灵敏度分析的解析法(AM)、半解析法(SA)和有限差分法(FD).该混合控制方程的主要优点是可以在进行灵敏度分析过程中避免卷积运算.另外,利用该混合控制方程进行灵敏度分析不仅能够同时得到响应结果和灵敏度系数,而且还考虑了层合板的层间弱粘接问题.

关键词: 弱粘接; 灵敏度分析; 径向基点插值函数(RPIM); 弹簧层模型; H-R 变分原理

中图分类号: TB332 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.007

引 言

灵敏度分析已经发展成为结构分析的重要研究领域之一.在过去的 20 年中,国内外已有大量的文献^[1-7]对静力响应、瞬态响应、屈曲响应和特征值灵敏度问题进行了研究.虽然如今已有很多的灵敏度计算方法,但解析法(AM)、半解析法(SA)和有限差分法(FD)是 3 种最为常用的方法^[8-9].解析法在进行数值计算之前的所有推导都是解析的,得到的结构响应灵敏度系数具有明显的物理意义.但是对于很多灵敏度分析情况,进行严格的解析推导是很困难的.有限差分法具有程序实现简单和计算精度高的特点,在工程领域应用广泛.但对于大型结构,其计算量巨大.半解析法的最终结果是解析的,但诸如刚度矩阵和载荷向量等中间变量则采用有限差分法求取,所以它同时具有解析法和有限差分法两者的优点^[10].

传统的复合材料层板理论通常都不会考虑子板之间的弱粘接情况.但是在实际的工程应用中,复合材料层合板的层间经常会出现诸如微裂纹和空隙之类的缺陷.而这些缺陷在材料的长期服役过程中将变得越来越严重.所以,为了避免结构粘接区的局部失效或结构的整体失

^{*} 收稿日期: 2010-05-25; 修订日期: 2010-11-09

基金项目: 国家自然科学基金民航联合研究基金资助项目(60979001)

作者简介: 李顶河(1983—),男,湖北人,助教,硕士(Tel: +86-22-24092414; E-mail: lidinghe@163.com);

徐建新(联系人, E-mail: jianxin_xu@eyou.com).

效,对复合材料层合板结构进行分析的时候,应该考虑层间弱粘接对各种响应的影响.虽然已有一些文献就该问题进行了研究^[11-13],但主要还是以解析方法和传统数值方法为主.近年来Chen等^[14-17]基于状态空间法,利用精确法和数值法对复合材料的弱粘接问题进行了深入的研究.

历经多年的发展,任意厚度正交异性叠层板、壳的状态空间法得到了长足的发展^[18-23],求解方法已变得非常丰富,如分离变量法、Fourier级数法、渐近法和半解析法等,其中以半解析法最具有工程应用价值.现有Hamilton体系下的半解析法最主要是有限元方法(FEM),虽然有限元法在工程应用中已经取得了巨大的成功,但在计算一些网格畸变、移动边界、大变形和不连续问题中遇到了很大的困难.近年来发展起来了无网格法,并取得了很大的成功.无网格法的近似函数是建立在一系列离散结点上的,避免了网格依赖性.与有限元相比,无网格近似函数前处理简单,在涉及网格畸变、移动边界等问题上具有明显优势.

本文在Hamilton体系下,利用无网格法研究含弱粘接层合板结构的灵敏度分析问题,推导了含弱粘接复合材料层合板响应分析和灵敏度分析的混合控制方程.

1 Hamilton 正则方程和弹簧层的无网格元列式

1.1 传统径向基点插值函数

设有二维区域的连续函数 $u(\mathbf{x})$,并利用一系列场节点对该二维区域进行离散化,则连续函数 $u(\mathbf{x})$ 在计算点 \mathbf{X}_Q 附近可用添加了多项式的径向基点插值(RPIM)形函数表示为^[24]

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}, \quad (1)$$

且满足约束条件

$$\sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j = \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

式中, $R_i(\mathbf{x})$ 为场节点 i 径向基函数(如Multiquadrics(MQ)), $R(\mathbf{x}) = [r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2]^q$,其中 q 和 α_c 为形状参数, d_c 为与计算点 \mathbf{x} 局部支撑域中场节点间距有关的特征长度,该长度一般取局部支撑域中场节点的平均距离; n 为计算点 \mathbf{X}_Q 附近的场节点数; $p_j(\mathbf{x})$ 为空间坐标 $\mathbf{x} = [x, y]^T$ 的单项式; m 为多项式基函数的个数,如果 $m = 0$,则为单纯的RBFs; a_i 和 b_j 为待定常数.

为确定式(1)中的待定常数 a_i 和 b_j ,需形成计算点 \mathbf{x} 的支持域,其中包括 n 个场节点.使式(1)满足计算点 \mathbf{x} 周围 n 个场节点值,同时满足约束条件,则可得到一个包含 $n + m$ 个线性方程的方程组.求解该方程组,利用解得的结果,可将式(1)写为

$$u(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i, \quad (3)$$

式中, $\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\}$ 为对应于节点位移向量的形函数, $\mathbf{U}_s = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]$ 为场节点处值.

1.2 Hamilton 正则方程无网格元列式

对于各向同性、正交异性或各向异性弹性体,修正后的H-R变分原理可表示为^[20-22]

$$\delta \Pi = \delta \iiint_V (\mathbf{P}^T \mathbf{Q}_{,z} - H) dV + \delta \oint_{S_A} \lambda_1^T \mathbf{B}_{\rho q} - \lambda_0^T \mathbf{B}_{\rho q} dS, \quad (4)$$

式中, $\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w]^T$, u , v 和 w 分别为 x , y 和 z 这3个坐标方向上的位移分量; $\mathbf{P} = [\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zz}]^T$, σ_{xz} , σ_{yz} 和 σ_{zz} 为结构的平面外应力分量; H 是Hamilton函数^[22]; V 为结构的

体积;上标 T 表示矩阵转置; $S_A = S_\sigma + S_u + S_m$ 为结构的表面积; λ_0 和 λ_1 是特意引入的特征系数^[22];对于板问题, $B_{\rho\bar{q}}$ 和 $B_{\rho q}$ 分别为位移和应力边界条件矩阵^[22]。

对于任一点上的 P 和 Q 可用 RPIM 形函数表示:

$$\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_e \\ Q_e \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

式中

$$N = \text{diag} [\Phi]_{3 \times 3}, p_e = [\sigma_{xz}^e(z) \quad \sigma_{yz}^e(z) \quad \sigma_{zz}^e(z)]^T, \\ Q_e = [u^e(z) \quad v^e(z) \quad w^e(z)]^T.$$

将式(5)代入式(4)中,进行变分并分部积分(暂时不考虑边界项),我们可得下面两个方程,对该方程组两边积分,就得到了 Hamilton 正则方程的径向基函数列式,矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} P_e(z) \\ Q_e(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_e(z) \\ Q_e(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Xi_e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

式中, A^T , C 和 Ξ_e 以及式(12)中的 G_3 和 G_4 , 它们的具体形式可见文献[22]。

根据式(4)还可以给出有关板问题的边界项列式,边界项经过变分后可写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{12} \\ \mathbf{0} & -B_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_e(z) \\ Q_e(z) \end{Bmatrix} + \oint_{S_A} \begin{bmatrix} -N^T A_0 & -(G_4 N)^T \\ \mathbf{0} & (G_3 N)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_e \\ \bar{Q}_e \end{Bmatrix} dS, \quad (7)$$

式中

$$\bar{P}_e = [\bar{\sigma}_{xz}^e(z) \quad \bar{\sigma}_{yz}^e(z) \quad \bar{\sigma}_{zz}^e(z)]^T, \bar{Q}_e = [\bar{u}^e(z) \quad \bar{v}^e(z) \quad \bar{w}^e(z)]^T, \\ A_0 = \text{diag}[\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z], B_{11}^T = \oint_{S_A} (G_3 N)^T N dS, B_{12} = \oint_{S_A} N^T (G_4 + G_4^T) N dS,$$

G_3 和 G_4 的具体形式见文献[22]。

把式(7)加到式(6)的右边,其结果就是可考虑混合边界条件的 Hamilton 正则方程的径向基函数无网格列式.对具有 n 层的复合材料层合板,第 μ 层控制方程的无网格列式为

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} P_e^\mu(z) \\ Q_e^\mu(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^\mu & H_{12}^\mu \\ H_{21}^\mu & H_{22}^\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_e^\mu(z) \\ Q_e^\mu(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{e1}^\mu(z) \\ F_{e2}^\mu(z) \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

式中

$$H_{11}^\mu = C^{-1} A_{11}^T + B_{11}^T, H_{12}^\mu = C^{-1} A_{12}^T + B_{12}^T, H_{21}^\mu = C^{-1} A_{21}^T, H_{22}^\mu = -C^{-1} A_{11} - B_{11}, \\ F_{e1}^\mu(z) = -N^T A_0 \bar{P}_e(z) - (G_4 N)^T \bar{Q}_e(z) + \Xi_e, F_{e2}^\mu(z) = (G_3 N)^T \bar{Q}_e(z).$$

1.3 弹簧层的无网格元列式

含弱粘接界面复合材料层合板如图 1 所示,文献[14-17]给出了考虑若粘接复合材料层合板弹簧层模型的解析方法,用于描述层间粘接特性的弹簧层可以写为

$$\begin{cases} \sigma_{xz}^{\text{ll}} = \sigma_{xz}^{\text{bu}} = [u^{\text{ll}} - u^{\text{bu}}] R_x, \\ \sigma_{yz}^{\text{ll}} = \sigma_{yz}^{\text{bu}} = [v^{\text{ll}} - v^{\text{bu}}] R_y, \\ \sigma_{zz}^{\text{ll}} = \sigma_{zz}^{\text{bu}} = [w^{\text{ll}} - w^{\text{bu}}] R_z, \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\sigma_{xz}^{\text{ll}}, \sigma_{yz}^{\text{ll}}$ 和 σ_{zz}^{ll} 表示下子板上表面的应力; $\sigma_{xz}^{\text{bu}}, \sigma_{yz}^{\text{bu}}$ 和 σ_{zz}^{bu} 表示上子板下表面应力; $u^{\text{ll}}, v^{\text{ll}}$ 和 w^{ll} 表示下子板上表面的位移分量; $u^{\text{bu}}, v^{\text{bu}}$ 和 w^{bu} 表示上子板下表面的位移分量; R_x, R_y 和 R_z 分别为弹簧层 x, y 和 z 方向上的刚度参数,显然, $R_i = 0 (i = x, y, z)$ 表示非完好粘接,而 $R_i = \infty (i$

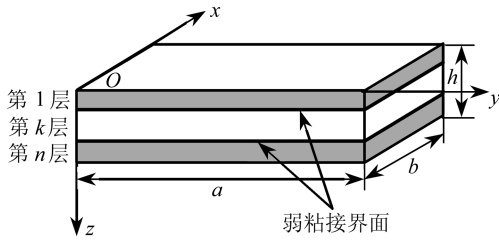


图1 含弱粘界面复合材料层合板示意图

$= x, y, z)$ 表示完好粘接。

假设弹簧层的 n 个场节点与层合板的场节点一一对应, 且用 m_1 和 m_2 分别表示完好粘接和完全分层区域所有场节点的集合, 则层合板层间应力与位移之间的关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e^{\text{pl}} \\ \mathbf{Q}_e^{\text{pl}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e^{\text{bu}} \\ \mathbf{Q}_e^{\text{bu}} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e^{\text{bu}} \\ \mathbf{Q}_e^{\text{bu}} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \text{diag}(R_{x1} \cdots R_{xn} \quad R_{y1} \cdots R_{yn} \quad R_{z1} \cdots R_{zn})^{-1},$$

$$R_{ij} = 0 \quad (i = x, y, z, j \in m_1).$$

2 含弱粘接层合板混合控制方程

层合板子板响应和灵敏度系数混合控制方程可以由式(7)得到. 用 λ 表示影响材料响应的所有参数, 称其为广义材料参数. 式(8)两边对 λ 求偏导并与式(8)合并, 如果不考虑体积力, 则层合板响应及其灵敏度系数的微分混合控制方程为

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^\mu(z) \\ \mathbf{Q}_M^\mu(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^\mu & \mathbf{M}_{12}^\mu \\ \mathbf{M}_{21}^\mu & \mathbf{M}_{22}^\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^\mu(z) \\ \mathbf{Q}_M^\mu(z) \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

式中 $\mathbf{P}_M^\mu(z) = [\mathbf{P}_{e,\lambda}^\mu(z) \quad \mathbf{P}_e^\mu(z)]^T$, $\mathbf{Q}_M^\mu(z) = [\mathbf{Q}_{e,\lambda}^\mu(z) \quad \mathbf{Q}_e^\mu(z)]^T$, 其中下标 λ 表示对其求导,

$$\mathbf{M}_{11}^\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^\mu & \mathbf{H}_{11,\lambda}^\mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{11}^\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12}^\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12}^\mu & \mathbf{H}_{12,\lambda}^\mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{12}^\mu \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{21}^\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{21}^\mu & \mathbf{H}_{21,\lambda}^\mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{21}^\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{22}^\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{22}^\mu & \mathbf{H}_{22,\lambda}^\mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22}^\mu \end{bmatrix}.$$

上式的解可以写为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^\mu(h) \\ \mathbf{Q}_M^\mu(h) \end{Bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^\mu & \mathbf{M}_{12}^\mu \\ \mathbf{M}_{21}^\mu & \mathbf{M}_{22}^\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^\mu(0) \\ \mathbf{Q}_M^\mu(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}^\mu \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^\mu(0) \\ \mathbf{Q}_M^\mu(0) \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

式(10)两边对 λ 求偏导并与式(10)合并, 则弹簧层响应和灵敏度系数的混合控制方程为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^{\text{pl}}(h) \\ \mathbf{Q}_M^{\text{pl}}(h) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^{\text{bu}}(0) \\ \mathbf{Q}_M^{\text{bu}}(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{W} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M^{\text{bu}}(0) \\ \mathbf{Q}_M^{\text{bu}}(0) \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{W}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{11,\lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{12,\lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{21,\lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{22,\lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}.$$

根据式(12)和(13), $\mu + 1$ 上表面状态矢量和第 μ 层下表面状态矢量的关系式如下:

$$\mathbf{V}_t^{\mu+1} = \mathbf{W}\mathbf{I}^\mu\mathbf{W}\mathbf{V}_l^\mu, \quad (14)$$

$$\text{式中 } \mathbf{V}_t^\mu = [\mathbf{P}_{e,t}^\mu \quad \mathbf{Q}_{e,t}^\mu], \mathbf{V}_l^\mu = [\mathbf{P}_{e,l}^\mu \quad \mathbf{Q}_{e,l}^\mu],$$

下标 t 和 l 分别表示层合板子板的上下表面。

继续上述分析,含弱粘接复合材料层合板上下表面状态矢量的关系可以写为

$$\mathbf{V}_t^n = \mathbf{S}\mathbf{V}_l^n, \quad (15)$$

式中, n 为层合板的层数, \mathbf{S} 为层合板整体传递矩阵,也就是弱粘结层合板的控制方程

$$\mathbf{S} = \left(\prod_{j=2}^n \mathbf{W}_j \mathbf{I}_{j-1} \right) \mathbf{I}_1, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}, \mathbf{I}_j = \mathbf{I}^j$. 对于理想粘结的层合板, \mathbf{W}_j 都是单位矩阵,即

$$\mathbf{S} = \prod_{j=1}^n \mathbf{I}_j.$$

3 灵敏度分析方法

3.1 解析法

混合控制方程传递矩阵中 $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{12}, \mathbf{H}_{21}$ 和 \mathbf{H}_{22} 对设计变量导数的解析形式可以写为

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{11,\lambda} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11})^T + \mathbf{C}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial \lambda} \right)^T, \\ \mathbf{H}_{12,\lambda} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda} (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12}) + \mathbf{C}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{12}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \lambda} \right), \\ \mathbf{H}_{21,\lambda} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda} \mathbf{A}_{21} + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_{21}}{\partial \lambda}, \\ \mathbf{H}_{22,\lambda} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}) + \mathbf{C}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial \lambda} \right), \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda} &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right) d\xi d\eta \right)^{-1}, \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{11}^T}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (\mathbf{G}_1 \mathbf{N})^T}{\partial \lambda} \mathbf{N} + (\mathbf{G}_1 \mathbf{N})^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\mathbf{G}_2 \mathbf{N})^T}{\partial \lambda} \boldsymbol{\chi}_{21} \mathbf{N} + \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{G}_2 \mathbf{N})^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{21}}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \boldsymbol{\chi}_{21} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right) \right] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{12}}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (\mathbf{G}_2 \mathbf{N})^T}{\partial \lambda} \boldsymbol{\chi}_{22}^T (\mathbf{G}_2 \mathbf{N}) + (\mathbf{G}_2 \mathbf{N})^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{22}^T}{\partial \lambda} (\mathbf{G}_2 \mathbf{N}) + (\mathbf{G}_2 \mathbf{N})^T \boldsymbol{\chi}_{22}^T \frac{\partial (\mathbf{G}_2 \mathbf{N})}{\partial \lambda} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \lambda} \Omega \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \Omega \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right) \right] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{21}}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \lambda} \boldsymbol{\chi}_{11} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{11}}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\chi}_{11} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right) d\xi d\eta, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial \lambda} &= \oint_{s_A} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{G}_3 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right)^T \mathbf{N} + (\mathbf{G}_3 \mathbf{N})^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right] dS, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \lambda} &= \oint_{s_A} \left[\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \lambda} (\mathbf{G}_4 \mathbf{N}) + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{G}_4 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{G}_4 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right)^T \mathbf{N} + (\mathbf{G}_4 \mathbf{N})^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right] dS.$$

混合控制方程非齐次项 \mathbf{F}_{e1} 和 \mathbf{F}_{e2} 对设计变量的导数可以写为

$$\mathbf{F}_{e1,\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{11}}{\partial \lambda} \bar{\mathbf{P}}(z)_e + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{12}}{\partial \lambda} \bar{\mathbf{Q}}_e(z) + \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}_e}{\partial \lambda}, \quad \mathbf{F}_{e2,\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{22}}{\partial \lambda} \bar{\mathbf{Q}}_e(z), \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{11}}{\partial \lambda} &= - \oint_{s_A} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \lambda} \mathbf{A}_0 + \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial \lambda} \right) dS, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{12}}{\partial \lambda} = - \oint_{s_A} \left(\frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{G}_4 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right)^T dS, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{22}}{\partial \lambda} &= \oint_{s_A} \left(\frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial \lambda} \mathbf{N} + \mathbf{G}_3 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} \right)^T dS, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \lambda} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \lambda} \mathbf{F} + \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \right) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

将式(18)和(17)计算得到结果按场节点拼装成整个结构混合控制方程的转移矩阵和非齐次项. 混合控制方程传递矩阵中 $\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}$ 和 \mathbf{T}_{22} 对设计变量的导数的计算可以同理得到.

3.2 有限差分法

在灵敏度分析有限差分法中,首先选择一个设计变量的步长 $\Delta\lambda$,然后以 λ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ 进行两次响应分析,通过下面两式得到静力响应的灵敏度系数

$$\mathbf{P}_{e,\lambda}(z) = \frac{\mathbf{P}_e(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{P}_e(\lambda)}{\Delta\lambda}, \quad \mathbf{Q}_{e,\lambda}(z) = \frac{\mathbf{Q}_e(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{Q}_e(\lambda)}{\Delta\lambda}. \quad (19)$$

3.3 半解析法

半解析法是对解析法的改进,其中间矩阵导数的求解采用有限差分法.对于本文中的混合控制方程,关键量转移矩阵 \mathbf{H} 和 \mathbf{T} 对设计变量的导数可以写为

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{ij,\lambda} \approx \frac{\mathbf{H}_{ij}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{H}_{ij}(\lambda)}{\Delta\lambda} & (i, j = 1, 2), \\ \mathbf{T}_{ij,\lambda} \approx \frac{\mathbf{T}_{ij}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{T}_{ij}(\lambda)}{\Delta\lambda} & (i, j = 1, 2). \end{cases} \quad (20)$$

对于有限差分法和半解析法来说,计算精度严重的依赖于设计变量的步长 $\Delta\lambda$ 的选择.

4 数值算例

为了避免出现不合理的层间嵌入现象,此处只考虑层合板的层间滑移问题,弱粘接系数的取值为 $R_z = 0$.为了简单起见,在此假设层合板所有层间界面具有相同弱粘接强度,即

$$R_x = R_y = R.$$

采用典型径向基函数 Multiquadric 计算该层合板 z 方向上的应力和位移.其中,背景网格为 8×8 , Gauss 积分点都为 6×6 (即每一个背景网格包含 36 个 Gauss 积分点),场节点为均匀分布的 15×15 .另外,SA 和 FD 两种灵敏度分析方法的分析步长为 10^{-5} .

算例 1 如果利用半解析模型得到静力响应分析结果是可靠的话,那么在步长选择合理的情况下,基于该模型和有限差分法的灵敏度分析结果也应该是正确的.本算例考虑含弱粘接复合材料层合板的静力响应问题,为了方便对比,采用文献[14]中所研究的层合板.层合板的上表面作用正弦分布压力 $q = q_0 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$,各单层的材料性能参数如下:

$$E_L/E_T = 25, \quad G_{LT}/E_T = 0.5, \quad G_{TT}/E_T = 0.2, \quad \mu_{LT} = \mu_{TT} = 0.25.$$

无量纲化状态变量在厚度方向上的分布情况如图 2 所示.从图中的对比情况可以看出,本

文半解析方法的计算结果与 Chen 等^[14]的解析解吻合很好. 所以, 在步长选择合理的情况下, 基于本文半解析模型的有限差分法灵敏度分析是可靠的.

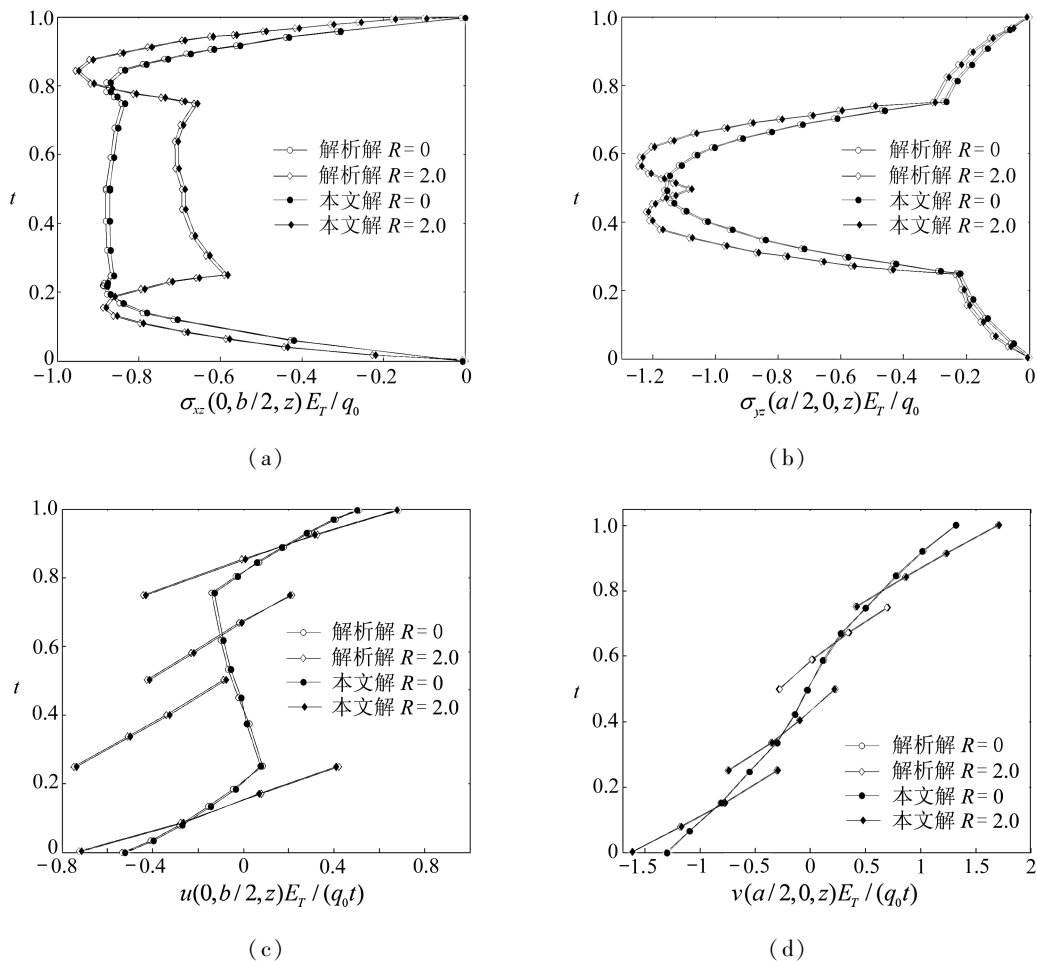


图2 无量纲化状态变量在厚度方向上的分布情况

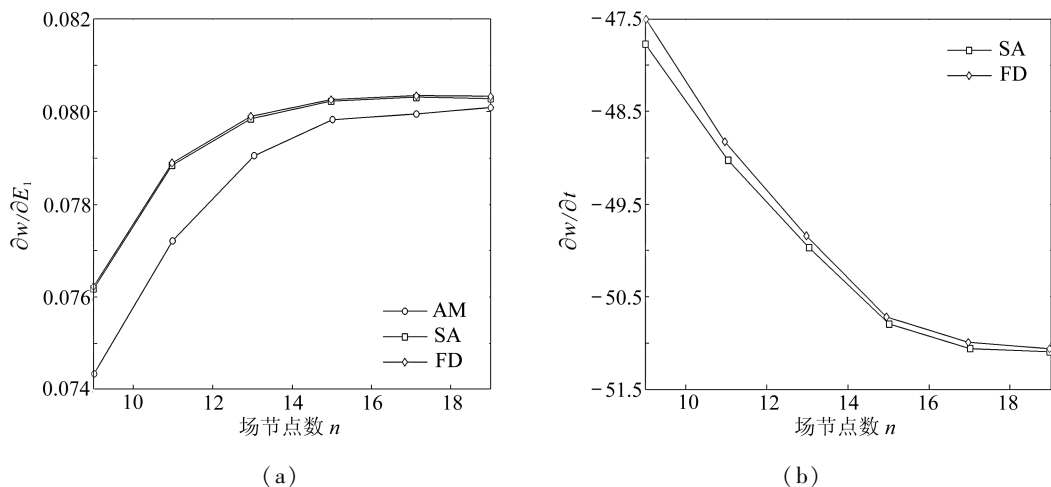


图3 场节点数对位移 w 最大灵敏度系数的影响曲线

算例 2 本算例考虑边长为 $a = 1$ 的正方形复合材料层合板, 铺层顺序为 $[0/90/90/0]$, 宽厚比 $a/h = 10$. 板的上表面受分布正弦载荷 $q = q_0 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 作用, 边界条件为四边固支. 层合板各子层具有相同的厚度和力学参数, 各子层的力学参数如下:

$$E_1 = 0.886\ 426, E_2 = 0.465\ 371, E_3 = 0.504\ 73, G_{12} = 0.262\ 93, G_{23} = 0.266\ 81, \\ G_{31} = 0.159\ 91, \nu_{12} = 0.231\ 243, \nu_{31} = 0.032\ 192\ 3, \nu_{23} = 0.195\ 952.$$

首先, 本算例研究了含弱粘接复合材料层合板灵敏度分析的收敛性问题, 场节点数对位移 w 最大灵敏度系数的影响曲线如图 3 所示. 对于材料参数 E_1 , 利用解析法、半解析法和有限差分法计算了位移 w 的最大灵敏度系数, 如图 3(a) 所示. 对于形状参数 t , 利用半解析法和有限差分法计算了位移 w 的最大灵敏度系数, 如图 3(b) 所示. 从图 3 中可以看出, 对于材料参数、形状参数以及 3 种灵敏度分析方法来说, 15×15 的场节点分布可以得到满意的分析结果.

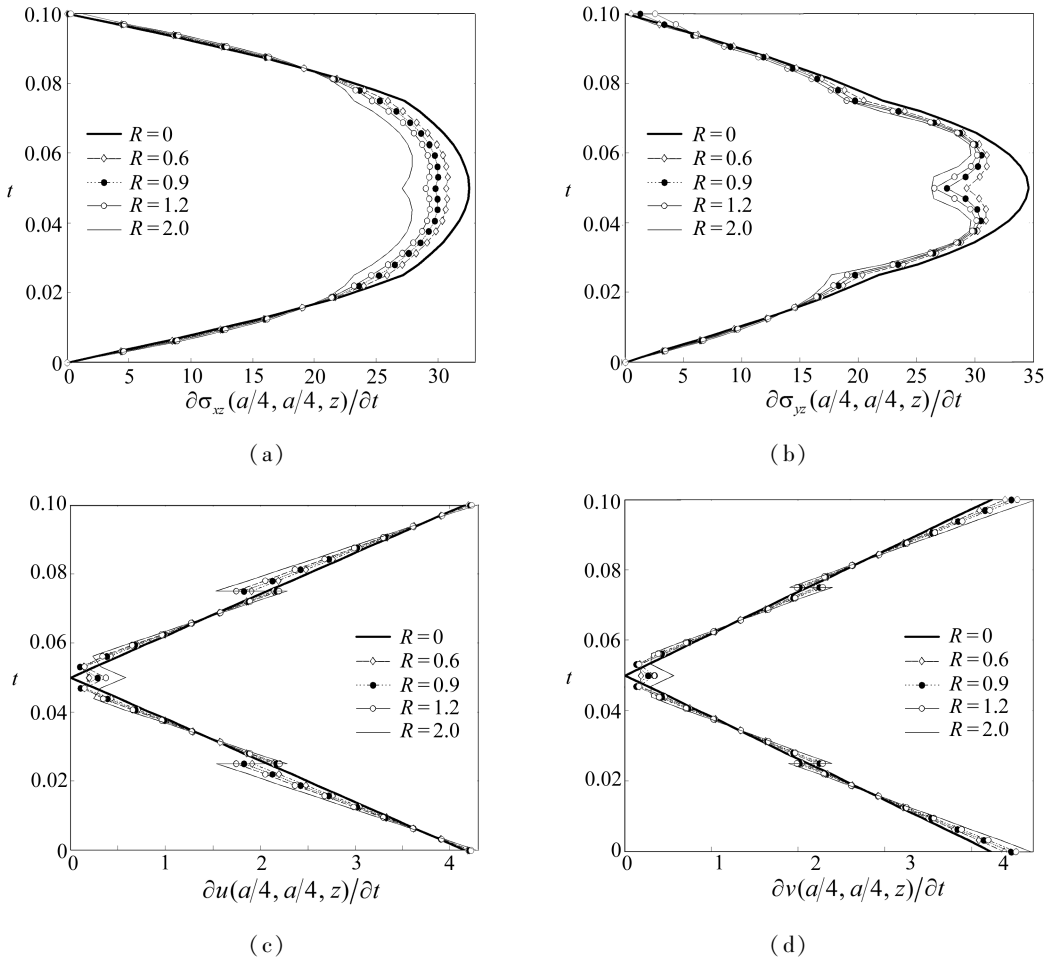


图 4 应力和位移灵敏度系数在层合板厚度方向上的分布情况

用 AM、SA 和 FD 这 3 种方法计算得到的相对于材料参数和形状参数的静力位移灵敏度系数见表 1, 其中相对于形状参数的灵敏度系数只利用 SA 和 FD 两种方法计算, 因为 AM 不适用于形状参数灵敏度系数的分析. 从表 1 可以看出, 3 种灵敏度分析方法得到的分析结果之间的相对误差很小, 尤其是 SA 和 FD 之间的误差, 因为在响应分析正确的情况下 FD 的计算结果总是可信的, 所以本算例 AM 和 SA 的计算结果也是正确的, 层合板的形状参数对静力位移的

影响明显强于材料参数。

表 1 AM, SA 和 FD 计算得到的相对于材料参数和形状参数的静力位移灵敏度系数

	R		E_1	E_2	G_{23}	G_{12}	L	$t^{(a)}$
$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\max}$	0	AM	0.013 652	0.010 596	0.004 574	0.011 713	—	—
		SA	0.013 748	0.011 610	0.004 771	0.011 775	0.626 351	-4.154 808
		FD	0.013 747	0.011 610	0.004 771	0.011 775	0.626 368	-4.154 744
	0.6	AM	0.014 510	0.009 901	0.004 293	0.011 232	—	—
		SA	0.014 260	0.010 818	0.004 494	0.011 319	0.629 953	-4.193 528
		FD	0.014 261	0.010 818	0.004 494	0.011 319	0.629 971	-4.193 453
$\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_{\max}$	0	AM	0.011 645	0.015 908	0.004 066	0.012 728	—	—
		SA	0.011 747	0.016 401	0.004 540	0.012 749	0.643 017	-4.229 302
		FD	0.011 746	0.016 401	0.004 540	0.012 749	0.643 034	-4.229 236
	0.6	AM	0.010 493	0.017 645	0.003 303	0.012 397	—	—
		SA	0.010 605	0.018 288	0.003 759	0.012 448	0.658 190	-4.375 095
		FD	0.010 605	0.018 288	0.003 762	0.012 448	0.658 208	-4.375 021
$\left(\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)_{\max}$	0	AM	0.080 859	0.087 308	0.046 268	0.076 061	—	—
		SA	0.081 584	0.088 061	0.050 853	0.076 506	5.979 171	-43.299 40
		FD	0.081 584	0.088 061	0.050 852	0.076 505	5.979 330	-43.298 58
	0.6	AM	0.079 749	0.092 860	0.043 426	0.073 981	—	—
		SA	0.080 581	0.094 793	0.048 080	0.074 695	6.593 883	-50.669 03
		FD	0.080 584	0.094 795	0.048 089	0.074 684	6.594 055	-50.667 85

注 (a) t 为层合板的总厚度。

对于不同弱粘接刚度 R , 用 SA 方法计算得到的应力和位移灵敏度系数在层合板厚度方向上的分布情况如图 4 所示。从图中可以看出:对于应力 σ_{xz} 和 σ_{yz} , 越靠近层合板的中性面, 弱粘接刚度对它们的灵敏度系数的影响就越明显;对于位移 u 和 v , 越靠近层合板层间界面和上下表面, 弱粘接刚度对它们的灵敏度系数的影响就越明显;由于只考虑了层合板的层间位移滑移问题, 所以位移 u 和 v 的灵敏度系数在层间会出现不连续现象, 如图 4(c) 和图 4(d) 所示。

5 结 论

本文基于弹簧层模型和弹性材料修正后的 H-R 变分原理, 研究了含弱粘接复合材料层合板的灵敏度分析问题, 并推导了含弱粘接复合材料层合板响应和灵敏度分析的混合控制方程。该混合控制方程的主要优点是避免了灵敏度分析过程中的卷积运算。利用该混合控制方程进行灵敏度分析不仅能够同时得到响应和灵敏度系数, 而且还考虑了层合板的层间弱粘接问题。传递矩阵技术的运用, 使得响应和灵敏度分析的计算量与层合板的厚度和层数无关。

在数值算例中, 基于该混合控制方程, 利用解析法、半解析法和有限差分法对四边固支层合板进行了灵敏度分析, 证明了本文含弱粘接结构灵敏度分析方法的正确性, 并研究了含弱粘接复合材料层合板应力和位移灵敏度系数在层合板厚度方向上的分布情况。研究表明:在 Hamilton 体系下, 半解析法不仅具有与解析法一样的计算精度, 又具有与有限差分法一样的程序实现简单, 是一种理想的结构灵敏度分析方法。

致谢 感谢中国民航大学校级重大项目 (CAUA2009ZD0101) 的资助。

参考文献:

- [1] Arora J S, Haug E J. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization[J]. *AIAA Journal*, 1979, **17**(9): 970-974.
- [2] Choi K K, Santos J L T, Frederick M C. Implementation of design sensitivity analysis with existing finite element codes[J]. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1987, **109**(3): 385-391.
- [3] Haftka R T. Sensitivity calculations for iteratively solved problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985, **21**(8): 1535-1546.
- [4] Haftka R T, Barthelemy B. On the accuracy of shape sensitivity[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1991, **3**(1): 1-6.
- [5] Choi K K, Chang K H. A study of design velocity field computation for shape optimal design [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1994, **15**(4): 317-341.
- [6] 顾元宪,赵红兵,陈懿松,亢战. 热-应力耦合结构灵敏度分析方法[J]. *力学学报*,2001,**33**(5): 685-691.
- [7] 郭旭,顾元宪,赵康. 广义变分原理的结构形状优化伴随法灵敏度分析[J]. *力学学报*,2004,**36**(3): 288-295.
- [8] Barthelemy B, Haftka R T. Accuracy analysis of the semi-analytical method for shape sensitivity calculation[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1990, **18**(3): 407-432.
- [9] Olhoff N, Rasmussen J, Lund E. Exact numerical differentiation for error elimination in finite element based semi-analytical shape sensitivity analysis[J]. *Mech Struct Mach*, 1993, **21**(1): 1-66.
- [10] 钱令希,程耿东,隋允康,钟万勰,林家浩. 结构优化设计理论与方法的某些进展[J]. *自然科学进展*,1995,**5**(1): 64-69.
- [11] Cheng Z Q, Kennedy D, Williams F W. Effect of interfacial imperfection on buckling and bending behavior of composite laminates[J]. *AIAA Journal*, 1996, **34**(12): 2590-2595.
- [12] Cheng Z Q, Jemah A K, Williams F W. Theory for multi-layered anisotropic plates with weakened interfaces[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1996, **63**(4): 1019-1026.
- [13] Cheng Z Q, He L H, Kitipornchai S. Influence of imperfect interfaces on bending and vibration of laminated composite shell[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(15): 2127-2150.
- [14] Chen W Q, Cai J B, Ye G R. Exact solution of cross-ply laminates with bonding interfacial imperfections[J]. *AIAA Journal*, 2003, **41**(11): 2244-2250.
- [15] Chen W Q, Lee K Y. Exact solution of angle-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections[J]. *Composite Structures*, 2004, **65**(3/4): 239-337.
- [16] Chen W Q, Cai J B, Ye G R, Wang Y F. Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(18/19): 5247-5263.
- [17] Zhou Y Y, Chen W Q, Lu C F. Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections[J]. *Composite Structures*, 2010, **92**(4): 1009-1018.
- [18] 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 111-385.

- [19] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995: 182-187.
- [20] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 22-44.
- [21] 卿光辉, 邱家俊, 塔娜. 压电材料修正后的 H-R 混合变分原理及其层合板的精确法[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 43-47.
- [22] 陈新锋, 徐建新, 卿光辉. 层合板固有频率分析的 B 样条小波元法[J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(1): 50-54.
- [23] QING Guang-hui, QIU Jia-jun, LIU Yan-hong. Free vibration analysis of stiffened laminated plates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(6): 1357-1371.
- [24] Liu G R, Gu Y T. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*[M]. Netherlands: Springer, 2005.

Sensitivity Analysis of Composite Laminated Plates With Bonding Imperfection in Hamilton System

LI Ding-he, XU Jian-xin, QING Guang-hui

(College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China,
Tianjin 300300, P. R. China)

Abstract: The sensitivity analysis of composite laminated plates with bonding interfacial imperfection was investigated based on the radial point interpolation method (RPIM) in Hamilton system. A hybrid governing equations of the response and sensitivity quantities was reduced by the spring-layer model and modified Hellinger-Reissner (H-R) variational principle. The analytical method (AM), semi-analytical method (SA) and the finite difference method (FD) were given for the sensitivity analysis approach which is based on this reduced hybrid governing equation. One of the main advantages of the hybrid governing equation is that the convoluted algorithm is avoided in sensitivity analysis. In addition, the sensitivity analysis method using this hybrid governing equation not only obtains the response values and the sensitivity coefficients simultaneously, but also accounts for the bonding interfacial imperfections of composite laminated plates.

Key words: bonding imperfection; sensitivity analysis; radial point interpolation method (RPIM); spring-layer model; H-R variational principle