

流经有热辐射的无限垂直多孔平板时非稳定 MHD 流动的 Soret 和 Dufour 效应*

S·R·维姆帕蒂, A·B·拉克米-纳拉雅纳-加里

(奥斯马尼亚大学 科学学院 力学系,海得拉巴-07,(A. P.),印度)

摘要: 不可压缩粘性导电流体,流经无限垂直多孔平板,平板存在振荡吸入速度和热辐射时,研究流动参数对自由对流和传质的非稳定磁流体动力学流动的 Dufour(扩散热)和 Soret(热扩散)效应.应用有限单元法,数值求解该问题的速度、温度和浓度场,还得到了表面摩擦、传热传质率的表达式.数值结果以图表方式给出,对外表致冷的平板($Gr > 0$)和外表加热的平板($Gr < 0$),给出了该方程中所遇参数的影响.

关键词: 传质; MHD 流动; 垂直平板; 吸入速度; Soret 数和 Dufour 数; 热辐射; 有限单元法

中图分类号: O361 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.002

符号说明

C'	浓度	C	无量纲浓度
C'_w	平板面上的流体浓度	g	重力加速度
C'_∞	远离平板的流体浓度	μ	粘性系数
t'	时间	D	化学分子扩散系数
Gr	热 Grashof 数	Gm	质量 Grashof 数
Pr	Prandtl 数	Sc	Schmidt 数
T	温度	ε	多孔介质的空隙率
T_w	平板温度	t	无量纲时间
T_∞	远离平板的流体温度	k_e	平均吸收系数
μ	粘性系数	u'	y' -方向的速度分量
ν	动粘性系数	u	y -方向的无量纲速度分量
ρ	流体密度	K_0	介质渗透系数常数
x'	沿平板方向的空间坐标	θ	无量纲温度
y'	垂直平板的空间坐标	α	热扩散系数
y	垂直平板的无量纲空间坐标	So	Soret 数

* 收稿日期: 2010-07-02; 修订日期: 2010-10-29

作者简介: S. R. Vempati(联系人. E-mail: uhita@yahoo.com).

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

N	热辐射率	Du	Dufour 数
β	体积膨胀系数	η	振动频率
β^*	有浓度的体积扩散系数		

引 言

在自然界和工程实践中出现自由对流的范围很广,许多学者对此进行了广泛的研究^[1-2]。当通量中同时出现传质传热时,主动势能表现出更加复杂的本性。例如,能量通量不仅能够产生温度梯度,而且还能产生浓度梯度。由浓度梯度引起的能量通量,被称为 Dufour 效应(或扩散热效应)。温度梯度引起的质量通量,这就是 Soret 效应(或热扩散效应)。通常,与 Fourier 定理或 Fick 定律给定的效应相比,扩散热和热扩散效应的数量级很小,因此在传热传质过程中经常被忽略。从许多工业和技术观点看来,对流中辐射传热传质研究十分重要。传质是在化学工业以及物理、生物科学中,最经常遇到的现象之一。当在静止的流体中发生传质时,质量的传送完全由浓度梯度引起的分子扩散来进行。流体中低的质量浓度和低的传质率,其对流传热传质过程的本质相似的。在不同物理条件的假定下,已经有一些传热传质的研究。还有许多学者对自由对流中的热辐射进行了研究,因为在许多工程和工业生产工程中得到了应用。例如应用在核电站、太阳能技术、钢铁工业、石化燃料的燃烧、空间科学,等等。在许多化学生产过程中,外加物质和流体之间存在着化学反应,其中的平板是在移动的。这样的生产过程,在许多工业中得到应用,如聚合物生产、陶瓷或玻璃器具制造以及食品的加工。

近年来,由于在许多设备中的应用,例如 MHD 发电机和 Hall 加速器,开始进入 MHD 流动中的传热传质的研究。Kinyanjui 等^[3]在强磁场作用下,流经突然启动的垂直无限多孔平板时,对伴有辐射吸收的非稳定自由对流,同时发生传热传质问题进行了分析。Yih^[4]在饱和多孔介质中嵌有可渗透垂直平板,热量和质量扩散的耦合影响下,数值分析了蒸腾速度对混合对流传热传质特性的影响。Elbashbeshy^[5]对沿着嵌在多孔介质中垂直平板的混合对流,研究了表面质量通量的影响。

当粘性随温度反线性函数变化时的流体,流经嵌有多孔介质中的垂直不可渗透表面时,Chin 等^[6]得到了稳定混合对流边界层的数值结果。Pal 和 Talukdar^[7]对粘性导电流体的 MHD 流动,流经嵌有多孔介质的垂直可渗透表面的分析,分析了热辐射和化学反应对混合对流的复合影响。Mukhopadhyay^[8]就热量通过多孔介质中的伸展表面时,分析研究了热辐射对非稳定混合对流的影响。Hayat 等^[9]在一个充满粘弹性流体的多孔介质中的多孔伸展表面上,研究混合对流边界层的传热传质特性,考虑了扩散热(Dufour)效应和热辐射(Soret)效应,分析了其数学模型。

Li 等^[10]考虑了热扩散效应和扩散热效应,研究了多孔介质中强吸热化学反应系统的传热传质性质。Gaikwad 等^[11]采用线性和非线性稳定分析方法,通过双重扩散对流,研究耦合应力流体层两个分量的 Soret 和 Dufour 效应。Osalusi 等^[12]存在粘性耗散和 Ohmic 加热时,研究了组合传热传质,对磁流体对流和滑动流动的热扩散和扩散热效应。Shateyi^[13]就有吸入吹出速度的半无限伸展表面上的传热传质,研究了热辐射和浮力的影响。Ambethkar^[14]就非稳定 MHD 自由对流体,流经吸入速度为常数的垂直无限平板时,其传热传质影响的数值解进行了研究。Shanker 和 Gnaneshwar^[15]在有温度变化和质量扩散的多孔介质中,突然启动垂直的无限多孔平板,研究辐射对 MHD 流动的影响。

最近 10 年间,浮力和热辐射的联合作用研究受到了重视,因为它在许多实际应用中的重

要作用. 在许多恒温和非恒温环境中, 热辐射影响十分重要. 如果将涉及聚合物挤出过程的整个系统放置在热控制的环境中, 那么热辐射会变得很重要. 知道系统中热辐射的传递, 或许, 就可能得到所需特征的产品. Motsa^[16]研究了出现双重扩散对流时的 Soret 和 Dufour 效应. Mansour 等^[17]就饱和多孔介质中嵌有垂直伸展表面上, 研究了化学反应、热分层、Soret 和 Dufour 数, 对粘性不可压缩导电流体 MHD 自由对流传热传质的影响. Srihari 等^[18]研究了非稳定自由传质对流, 流经有震荡吸入速度和热汇的垂直无限多孔平板时的 Soret 效应.

基于上述的研究工作, 以及该问题的许多可能的工业应用(如同位素分离), 本研究的首要目标是, 对非稳定 MHD 传质自由对流, 流经有震荡吸入速度的垂直无限多孔平板时, 研究热辐射、Soret 和 Dufour 的影响. 上述对非稳定 MHD 传质自由对流, 流经有震荡吸入速度垂直无限多孔平板的研究中, 尚未有同时考虑化学辐射, 以及 Soret 和 Dufour 效应的. 因此, 本文是对 Srihari 等^[18]工作的拓展, 研究有热辐射存在时, Soret 和 Dufour 效应对非稳定 MHD 传质自由对流, 流经有震荡吸入速度垂直无限多孔平板问题的更普遍化. 在本研究中, 还分析了方程中出现的不同流动参数的影响. 利用有限单元法对问题进行数值求解, 从计算的角度看来, 这样更加经济.

1 数学公式

考虑不可压缩导电粘性流体, 流经多空介质时的非稳定磁流体动力学流动, 流体经过垂直无限平板, 平板有震荡吸入速度和热辐射. 在 Cartesian 坐标系中, 假定 y' -轴沿流动方向, x' -轴在板上正交于 y' -轴. 假设正交磁场作用在 y' -轴方向. 和外加磁场相比, 诱导磁场的磁场 Reynolds 数很小, 可以忽略不计. 表面的温度和浓度保持相同的常数. 流动有重大的热辐射及 Soret 和 Dufour 效应. 在上述框架内, 应用 Boussinesq 近似, 得到流动的控制方程

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = g\beta(T' - T'_\infty) + g\beta^*(C' - C'_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} - \nu \frac{u'}{K} - \frac{\sigma B_0^2 u'}{\rho}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{16\sigma T_\infty^3}{3k_0 \rho c_p} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{D_m k_T}{C_s c_p} \frac{\partial^2 C'}{\partial y'^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + v' \frac{\partial C'}{\partial y'} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y'^2} + \frac{D_m k_T}{T_m} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}. \tag{4}$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} y' = 0 \text{ 时,} & u' = 0, T' = T'_w + \varepsilon(T'_w - T'_\infty)e^{i\eta t'}, C' = C'_w + \varepsilon(C'_w - C'_\infty)e^{i\eta t'}, \\ y' \rightarrow \infty \text{ 时,} & u' \rightarrow 0, T' \rightarrow T'_\infty, C' \rightarrow C'_\infty. \end{cases} \tag{5}$$

从连续方程中可以发现, v' 不是一个常数, 就是一个时间的函数. 因此, 假设吸入速度在平均值为非零常数附近震荡, v' 可以写成 $v' = -v_0(1 + \varepsilon e^{i\eta t'})$, 其中 v_0 为平均吸入速度, η 为震荡频率, $v_0 > 0, \varepsilon \ll 1$ 为正常数, 负号表示吸入速度指向平板. 多孔介质的渗透系数可以表示为 $K(t') = K_0(1 + \varepsilon e^{i\eta t'})$. 在这些方程中引入无量纲量, 定义

$$y = \frac{v_0 y'}{4\nu}, t = \frac{v_0^2 t'}{4\nu}; \eta = \frac{4\nu \eta'}{v_0^2}, u = \frac{u'}{v_0}, \theta = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, C = \frac{C' - C'_\infty}{C'_w - C'_\infty},$$

$$K_0 = \frac{K_0 v_0^2}{\nu^2} \text{ (介质渗透系数常数),}$$

$$So = \frac{D(T_w - T_\infty)}{\nu(C_w - C_\infty)} (\text{Soret 数}),$$

$$Du = \frac{D(C_w - C_\infty)}{\nu(T_w - T_\infty)} (\text{Dufour 数}),$$

$$Gr = \frac{\nu g \beta^* (T_w - T_\infty)}{v_0^3} (\text{Grashof 数}),$$

$$Sc = \frac{\nu}{D} (\text{Schimidt 数}),$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{K_t} (\text{Prandtl 数}),$$

$$M = \frac{B_0}{v_0} \sqrt{\frac{\sigma \nu}{\rho}} (\text{磁性参数}),$$

$$Gm = \frac{\nu g \beta (C_w - C_\infty)}{v_0^3} (\text{修正的 Grashof 数}),$$

$$N = \frac{kk_e}{4\sigma^* T_\infty^3} (\text{热辐射系数}).$$

动量、能量和浓度的无量纲形式控制方程为

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial t} - (1 + \varepsilon e^{i\eta t}) \frac{\partial u}{\partial y} = Gr\theta + GmC + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{u}{K_0(1 + \varepsilon e^{i\eta t})} - M^2 u, \quad (6)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \varepsilon e^{i\eta t}) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left(1 + \frac{4}{3N}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + Du \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right), \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial C}{\partial t} - (1 + \varepsilon e^{i\eta t}) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + So \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right). \quad (8)$$

相应的无量纲形式的边界条件为

$$\begin{cases} y = 0 \text{ 时,} & u = 0, \theta = 1 + \varepsilon e^{i\eta t}, C = 1 + \varepsilon e^{i\eta t}, \\ y \rightarrow \infty \text{ 时,} & u \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, C \rightarrow 0. \end{cases} \quad (9)$$

2 求解方法

微分方程(6)的 Galerkin 表达式为

$$\int_{y_j}^{y_k} \left\{ N^T \left[\frac{\partial^2 u^{(e)}}{\partial y^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} + A \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} - Ru^{(e)} + P \right] \right\} dy = 0,$$

其中,

$$N^T = [N_j \quad N_k]^T = \begin{bmatrix} N_j \\ N_k \end{bmatrix}, \quad A = 1 + \varepsilon e^{i\eta t}, \quad R = \frac{1}{K_0 A} + M^2, \quad P = GrT + GmC.$$

令线性分段近似解为

$$u^{(e)} = N_j(y)u_j(t) + N_k(y)u_k(t) = N_j u_j + N_k u_k.$$

单元方程由下式给出为

$$\int_{y_j}^{y_k} \left\{ \begin{bmatrix} N_j' N_j' & N_j' N_k' \\ N_j' N_k' & N_k' N_k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} \right\} dy + \frac{1}{4} \int_{y_j}^{y_k} \left\{ \begin{bmatrix} N_j N_j & N_j N_k \\ N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_k \end{bmatrix} \right\} dy -$$

$$A \int_{y_j}^{y_k} \left\{ \begin{bmatrix} N_j N_j' & N_j N_k' \\ N_j' N_k & N_k' N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} \right\} dy +$$

$$R \int_{y_j}^{y_k} \left\{ \begin{bmatrix} N_j N_j & N_j N_k \\ N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} \right\} dy - P \int_{y_j}^{y_k} \begin{bmatrix} N_j \\ N_k \end{bmatrix} dy = 0,$$

其中,撇和点分别表示关于‘ y ’和‘ t ’的导数,化简得到

$$\frac{1}{l^{(e)2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} + \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{u}_k \end{bmatrix} - \frac{A}{2l^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} + \frac{R}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \frac{P}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中, $l^{(e)} = y_k - y_j = h$.

为了得到节点 i 上的微分方程,写出元素 $y_{i-1} \leq y \leq y_i$ 和 $y_i \leq y \leq y_{i+1}$ 的单元方程,组合这两个元素方程,得到

$$\frac{1}{l^{(e)2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{i-1} \\ \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} \end{bmatrix} - \frac{A}{2l^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{R}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{P}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令节点 i 上的行方程等于 0,有

$$\frac{1}{l^{(e)2}} [-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}] + \frac{1}{24} [\dot{u}_{i-1} + 4\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}] - \frac{A}{2l^{(e)}} [-u_{i-1} + u_{i+1}] + \frac{R}{6} [u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1}] = P, \tag{10}$$

对方程(10)应用 Crank-Nicholson 方法,得到

$$A_1 u_{i-1}^{n+1} + A_2 u_i^{n+1} + A_3 u_{i+1}^{n+1} = B_1 u_{i-1}^n + B_2 u_i^n + B_3 u_{i+1}^n + P^*, \tag{11}$$

其中

$$A_1 = 1 + 2Rk - 12r + 6Arh, \quad A_2 = 4 + 24r + 8Rk, \quad A_3 = 1 + 2Rk - 12r - 6Arh, \\ B_1 = 1 - 2Rk + 12r - 6Arh, \quad B_2 = 4 - 24r - 8Rk, \quad B_3 = 1 - 2Rk + 12r + 6Arh, \\ P^* = 24GrkT_i^j + 24GmkC_i^j.$$

对方程(7)应用同样的方法,得到

$$G_1 T_{i-1}^{n+1} + G_2 T_i^{n+1} + G_3 T_{i+1}^{n+1} = H_1 T_{i-1}^n + H_2 T_i^n + H_3 T_{i+1}^n + Q^*, \tag{12}$$

其中

$$G_1 = Pr + 6ArhPr - 12Dr, \quad G_2 = 4Pr + 24Dr, \quad G_3 = Pr - 6ArhPr - 12Dr, \\ H_1 = Pr - 6ArhPr + 12Dr, \quad H_2 = 4Pr - 24Dr, \quad H_3 = Pr + 6ArhPr + 12Dr, \\ D = 1 + \left(\frac{4}{3N}\right), \quad Q^* = 24kPrDu \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right).$$

对方程(8)应用同样的方法,得到

$$J_1 C_{i-1}^{n+1} + J_2 C_i^{n+1} + J_3 C_{i+1}^{n+1} = I_1 C_{i-1}^n + I_2 C_i^n + I_3 C_{i+1}^n + B^*, \tag{13}$$

其中

$$J_1 = Sc + 6ArhSc - 12r - 2Sck, \quad J_2 = 4Sc + 24r - 8Sck, \\ J_3 = Sc - 6ArhSc - 12r - 2Sck, \quad I_1 = Sc - 6ArhSc + 12r + 2Sck,$$

$$I_2 = 4Sc - 24r + 8Sck, I_3 = Sc + 6ArhSc + 12r + 2Sck,$$

$$B^* = 24kScSo \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

其中, $r = k/h^2$, h 和 k 分别为沿 y - 方向和 t - 方向的网格尺寸, 角标 i 表示空间, 角标 j 表示时间. 网格系统由 $h = 0.1$ 和 $k = 0.01$ 组成.

在方程(11) ~ (13)中, 取 $i = 1, \dots, 10$, 并利用式(9)中的边界条件, 则可以得到如下 3-对角系统方程组:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{B}, \quad (14)$$

$$\mathbf{E}\mathbf{T} = \mathbf{F}, \quad (15)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{C} = \mathbf{Y}, \quad (16)$$

其中, \mathbf{A} , \mathbf{E} 和 \mathbf{X} 为 10 阶的 3-对角矩阵, 其元素定义为

$$i = 1, \dots, 10, A_{i,i} = A_2; E_{i,i} = G_2; X_{i,i} = J_2;$$

$$i = 2, \dots, 10, A_{i-1,i} = A_1; E_{i-1,i} = G_1; X_{i-1,i} = J_1;$$

$$i = 2, \dots, 10, A_{i,i+1} = A_3; E_{i,i+1} = G_3; X_{i,i+1} = J_3;$$

且 \mathbf{u} , \mathbf{B} , \mathbf{T} , \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{Y} 为有 n 个分量的列阵, 列阵分量分别为 $u_{i,j+1}$, $\mathbf{B}(i,j)$, $T_{i,j+1}$, $\mathbf{F}(i,j)$, $\mathbf{C}_{i,j+1}$ 和 $\mathbf{Y}(i,j)$, $i = 1, \dots, 10$. 由 Thomas 算法, 可以得到方程(14) ~ (16)的解. 为了判断有限单元法收敛和稳定性精度, 程序运行时取更小值的 k , 即 $k = 0.005$, 没有发现它们有太大的变化. 因此, 我们可以得到结论, 有限单元法是稳定的和收敛的.

3 表面摩擦力和传热传质率

$$\text{平板处的表面摩擦因数} (\tau) \text{ 为 } \tau = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

$$\text{平板处的传热 Nusselt 数} (Nu) \text{ 为 } Nu = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

$$\text{平板处的传质系数} (S_b) \text{ 为 } S_b = - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

4 结果及讨论

根据 Nusselt 数 (Nu) 和 Sherwood 数 (S_b), 分别对无量纲速度 (u)、温度 (T)、浓度 (C)、表面摩擦因数 (τ) 及传热传质系数进行数值计算. 得到材料参数, 如 Prandtl 数 (Pr)、Schmidt 数 Sc 、磁场参数 (M)、渗透系数 (K_0)、Soret 数或热扩散系数 (So), Dufour 数或扩散热系数 (Du)、辐射系数 (N)、Grashof 数 (Gr) 和修正的 Grashof 数 (Gm) 的影响.

这些参数的数值计算结果, 如图 1 至图 17 中表示. 在对速度、温度、浓度的数值计算时, 选取空气 ($Pr = 0.71$)、电解液 ($Pr = 1.0$)、水 ($Pr = 7.0$) 和 4℃ 的水 ($Pr = 11.40$) 的 Prandtl 数. 研究中, 为了不过分关注所得结果的数值, Sc 值的选取, 以选择的气体, 其化学成分多数时候呈扩散状态, 即, 在 20℃ 和 1 个大气压下, 选取氢气 ($Sc = 0.22$)、水蒸气 ($Sc = 0.60$)、氧气 ($Sc = 0.66$)、甲醇 ($Sc = 1.00$) 和丙苯 ($Sc = 2.62$). 在对该问题的讨论中, 仅复数量的实部有物理意义, 并在 $t = 1.0$ 时, 得到速度、温度和浓度场的稳定值. 为了调查与该问题相关参数的影响, 在 $Pr = 0.71$ 时完成速度场和表面摩擦力的数值计算, 相当于 25℃ 和 1 个大气压下的空气. Grashof 数 Gr 和修正的 Grashof 数 Gm 的正值和负值, 分别表示平板的对称冷却 ($Gr > 0$)

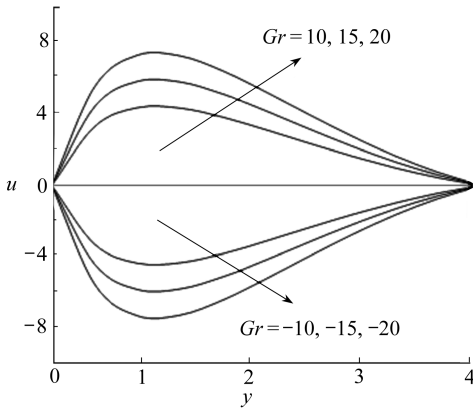


图 1 平板冷却 ($Gm = 5.0$) 和加热 ($Gm = -5.0$) 时传热 (Gr) 对速度场 u 的影响 ($M = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, K_0 = 1.0, So = 1.0, Du = 0.03, N = 0.5, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

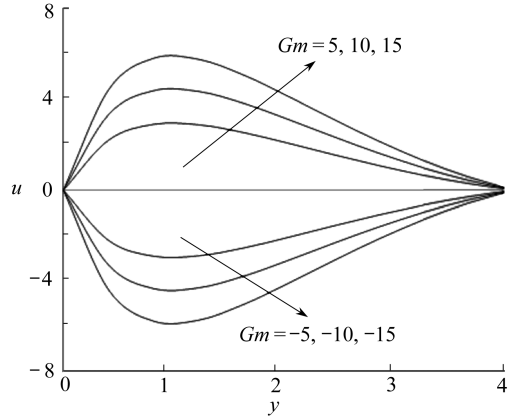


图 2 平板冷却 ($Gr = 5.0$) 和加热 ($Gr = -5.0$) 时传质 (Gm) 对速度场 u 的影响 ($M = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, K_0 = 1.0, So = 1.0, Du = 0.03, N = 0.5, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

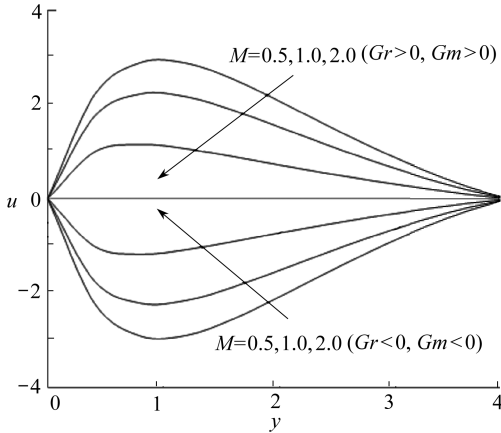


图 3 平板冷却 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0$) 和加热 ($Gr = -5.0, Gm = -5.0$) 时磁场参数 M 对速度场 u 的影响 ($N = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, K_0 = 1.0, Du = 0.03, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

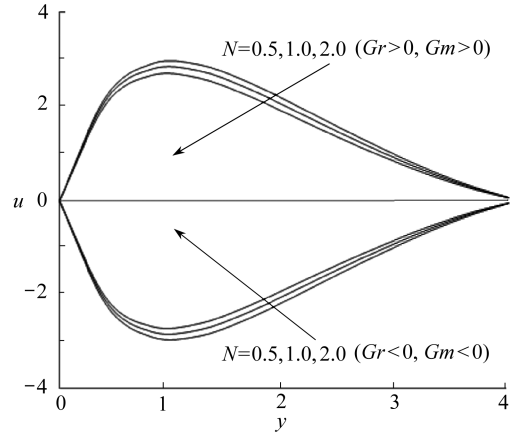


图 4 平板冷却 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0$) 和加热 ($Gr = -5.0, Gm = -5.0$) 时热辐射参数 N 对速度场 u 的影响 ($M = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, K_0 = 1.0, Du = 0.03, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

和对称加热 ($Gr < 0$)。因为流动的连续性,所以可以直至无穷远。为了得到该问题的解,我们 在一个长度有限的流动中,放置无限的竖直平板,因此,我们可以在有限的边界中求得整个问 题的解。然而,图中的 y 值从 0 变化到 4,当 y 趋于 4 时,速度、温度、浓度趋于 0。对于任意的 y 值, 这个结果成立,因而,长度有限得到认可。

如方程 (6) 所示,通过 Grashof 数 Gr 和修正的 Grashof 数 Gm ,使温度和组分浓度与速度相 耦合。图 1 至图 7 显示了,平板外表致冷 ($Gr > 0$) 和加热 ($Gr < 0$) 时,材料参数,如 Gr, Gm, M, N, Du, So 和 K_0 对速度场的影响。Grashof 或修正的 Grashof 数增加,导致平板外表致冷和加热边 速度场的增加。对不同数值的热 Grashof 数和 Solutal Grashof 数,其速度曲线分别在图 1 和图 2 中给出。热 Grashof 数 Gr 表示,边界层中热浮力对粘性流体力学力的相对影响。可以发现,由于

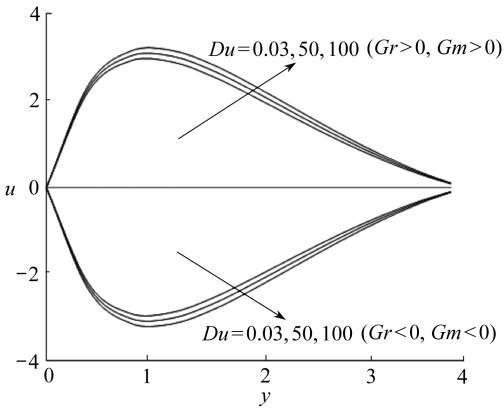


图5 平板冷却 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0$) 和加热 ($Gr = -5.0, Gm = -5.0$) 时 Dufour 数 Du 对速度场 u 的影响 ($M = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, K_0 = 1.0, So = 1.0, N = 0.5, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

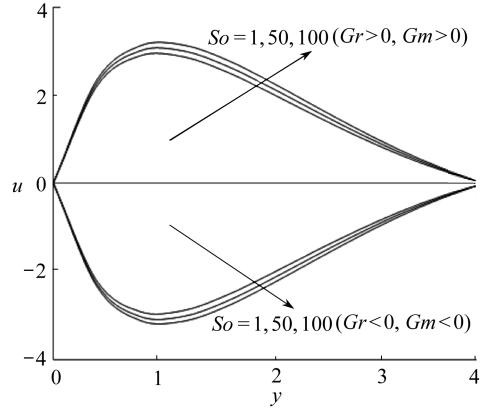


图6 平板冷却 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0$) 和加热 ($Gr = -5.0, Gm = -5.0$) 时 Soret 数 N 对速度场 u 的影响 ($M = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, K_0 = 1.0, Du = 0.03, N = 0.5, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

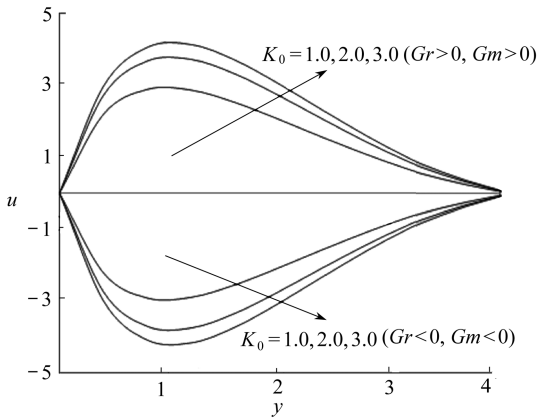


图7 平板冷却 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0$) 和加热 ($Gr = -5.0, Gm = -5.0$) 时渗透参数 K_0 对速度场 u 的影响 ($N = 0.5, Sc = 0.22, Pr = 0.71, M = 0.5, Du = 0.03, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

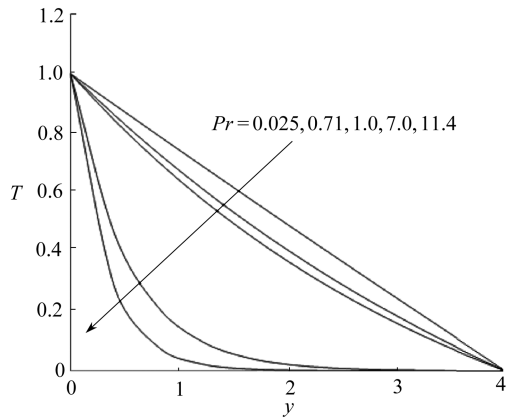


图8 Prandtl 数 Pr 对温度场 T 的影响 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0, N = 0.5, Sc = 0.22, K_0 = 1.0, M = 0.5, Du = 0.03, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

热浮力的增强,速度有所上升,这正是所期望的.这里,正的 Gr 值对应于致冷平板.还有,随着 Gr 的增大,速度的峰值在多孔平板附近快速地增大,然后平缓地减小至自由流的速度. Solutal Grashof 数 Gm 表示组分浮力和粘性流体动力学力的比值.如所期望,由于组分浮力的增大,流体速度增大,速度峰值有所区别.在平板附近速度分布达到有区别的最大值,然后适当地逼近至自由流速度.值得注意的是,速度随着 Solutal Grashof 数的增大而增大.

平板外表致冷时,磁场参数 M 对速度场的影响如图 3 所示.可以发现,流体速度随着磁场参数的增大而减小.如所期望,速度随着磁场参数的增大而减小,是因为横向磁场的作用,产生抵抗力 (Lorentz 力),与阻力类似,出现了阻碍流体流动的趋势,因而速度减小.而且,边界层的厚度随着磁场参数的增大而减小.还可以发现,速度曲线随着磁场影响的增大而减小,表明磁

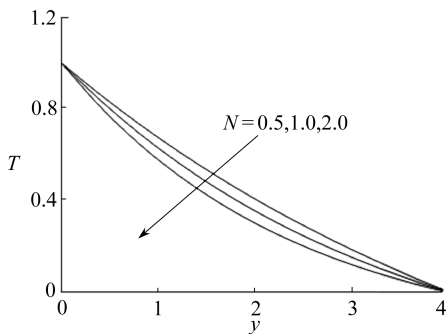


图9 热幅射参数 N 对温度场 T 的影响
 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0, Pr = 0.71,$
 $Sc = 0.22, K_0 = 1.0, M = 0.5,$
 $Du = 0.03, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

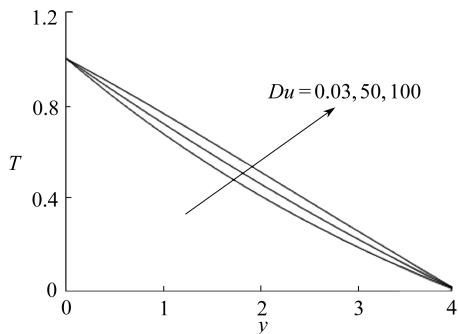


图10 Dufour 数 Du 对温度场 T 的影响
 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0, Pr = 0.71,$
 $Sc = 0.22, K_0 = 1.0, M = 0.5,$
 $N = 0.5, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

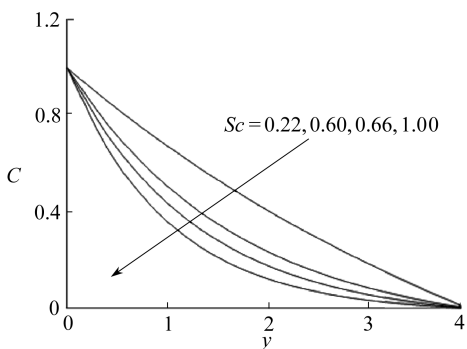


图11 Schmidt 数 Sc 对浓度场 C 的影响
 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0, Pr = 0.71,$
 $Du = 0.03, K_0 = 1.0, M = 0.5,$
 $N = 0.5, \varepsilon = 0.005, \eta t = \pi/2$)

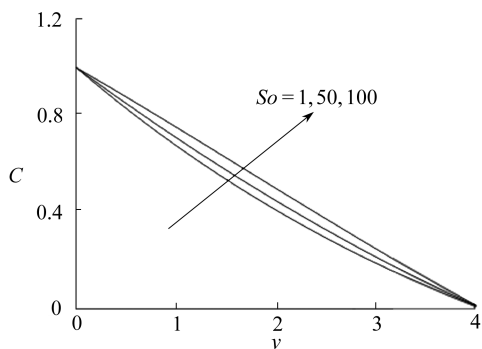


图12 Soret 数 So 对浓度场 C 的影响
 ($Gr = 5.0, Gm = 5.0, Pr = 0.71,$
 $Sc = 0.22, Du = 0.03, K_0 = 1.0,$
 $M = 0.5, N = 0.5, \varepsilon = 0.005,$
 $\eta t = \pi/2$)

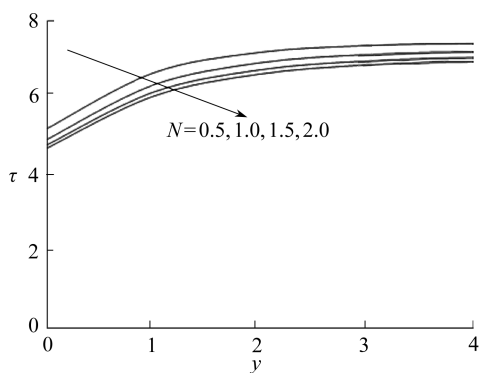


图13 热幅射参数 N 对表面摩擦
 因数 τ 的影响

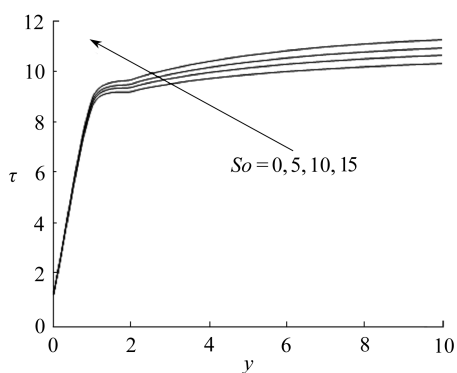


图14 Soret 数增大时表面摩擦因数 τ
 的变化情况 ($Gr = Gm = 1.0,$
 $M = 1.0, m = 1.0, Pr = 0.71,$
 $Sc = 0.22, Du = 0$)

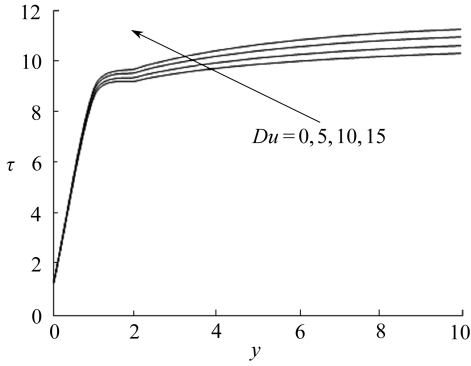


图 15 Dufour 数增大时表面摩擦因数 τ 的变化情况 ($Gr = Gm = 1.0$, $M = 1.0$, $m = 1.0$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.22$, $So = 0$)

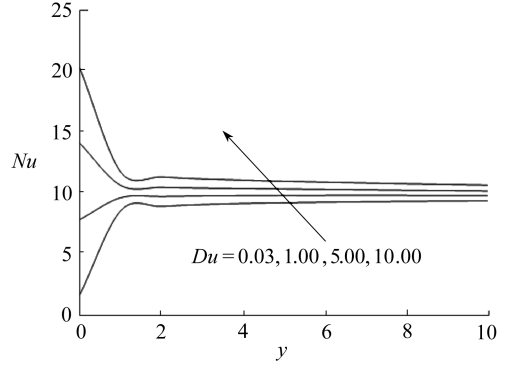


图 16 Dufour 数增大时 Nusselt 数的变化情况 ($Gr = Gm = 1.0$, $M = 1.0$, $m = 1.0$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.22$, $So = 0$)

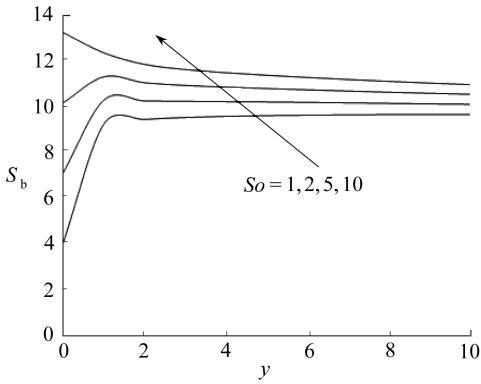


图 17 Soret 数增大时 Sherwood 数的变化情况 ($Gr = Gm = 1.0$, $M = 1.0$, $m = 1.0$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.22$, $Du = 0$)

场有延迟流体运动的倾向。磁场可以控制流动的特性。

平板外表致冷时,热辐射对速度的影响在图 4 中表示。热辐射参数的增大,使得流动速度减小。可以发现热辐射越高时速度的减小。这是因为大的 N 值,对应于吸收辐射的传导优势增大,由此,造成浮力和动量边界层(即速度)的增大。

图 5 和图 6 表明,Dufour 数 Du 和 Soret 数 So 对速度场 u 的影响。从图中可以发现,平板外表冷却时,速度 u 随着 Dufour 数 Du 和 Soret 数 So 的增大而增大。有趣地发现,Dufour 数 Du 和 Soret 数 So 对速度场 u 的影响很小。这是因为,无论是浓度差的减小,还是温度差的增大,都会导致 Soret 数 So 的增大。因此,Soret 数 So 增大,速度值增大。图 7 显

示了 K_0 对速度场 u 的影响。从图形中可以发现,平板外表致冷时, K_0 的增大,会促使速度场 u 增大。上面图 3 至图 7 中给出了外表致冷平板时速度场,外表加热平板对速度场的影响正好相反。

在图 8 中描述了 Prandtl 数 Pr 对温度场的影响。可以发现,Prandtl 数 Pr 的增大导致温度场的减小。而且,与介质为空气时比较,介质为水时的温度场下跌得更快,介质为水银时变为标准的直线,温度的变化更明显。通过观察可以得出这样的结论,对于维持温度的差异,水银最为有效,因此在实验室中得到有效地使用。空气可以替代水银,但维持温度变化的效能,比水银要小得多。但是,就工业用途来说,空气是一个更好更便宜的替代品。这是因为,无论是动粘度的增大,还是热传导的减小,都会导致 Prandtl 数 Pr 的增大。因此,温度随着 Prandtl 数 Pr 的增大而减小。热辐射参数 N 对边界层上温度曲线的影响在图 9 中表示。显然,热辐射参数的增大,致使边界层内温度曲线的减小,又使热边界层厚度减小。图 10 描述了 Dufour 数对流体温度的影响。从图形中可以清楚地发现,扩散热对流体温度的影响式微。随着 Dufour 数值的增大,流体温度也增大。

Schmidt 数 Sc 和 Soret 数 So 对浓度场的影响在图 11 和图 12 中表示。图 11 就氢气、水蒸气、氧气和甲醇气体,描述了 Schmidt 数 Sc 变化时的浓度场。可以发现,氢气的浓度场稳定,与水蒸气相比,氧气和甲醇的浓度场快速下降。因此,氢气可以用于维持有效的浓度场,水蒸气可以用于维持正常的浓度场。图 12 可以发现,Soret 数的增大,使浓度场的增大。

表 1 给出外表致冷平板 ($Gr > 0$), $Gr, Gm, M, K_0, Pr, Sc, So, Du$ 和 N 不同数值时的表面摩擦因数。可以发现,Prandtl 数\Schmidt 数\磁场参数或辐射参数的增大,会导致表面摩擦因数的减小,然而,渗透参数\Soret 数\Dufour 数\Grashof 数或修正的 Grashof 数的增大,会导致表面摩擦因数的增大。参见图 13 和图 14。热辐射参数对表面摩擦因数的影响,在图 15 中给出。

表 1 平板外表致冷时的表面摩擦因数 τ

Gr	Gm	M	K_0	Pr	Sc	So	Du	N	τ	τ^*
5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	7.432 9	7.401 0
10.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	11.256 4	11.102 7
5.0	10.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	11.042 2	11.100 4
5.0	5.0	1.0	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	6.072 9	5.808 8
5.0	5.0	0.5	2.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	8.951 8	8.545 0
5.0	5.0	0.5	1.0	7.00	0.22	1.0	0.03	0.5	5.209 1	5.556 4
5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.60	1.0	0.03	0.5	6.640 7	6.268 3
5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	2.0	0.03	0.5	7.436 6	7.641 7
5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	1.00	0.5	7.438 2	7.442 1
5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	1.0	7.227 2	7.249 3
5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	7.045 5	7.137 9

注 τ 为本文得到的表面摩擦因数;
 τ^* 为文献[18]得到的表面摩擦因数。

表 2 平板外表加热时的表面摩擦因数 τ

Gr	Gm	M	K_0	Pr	Sc	So	Du	N	τ	τ^*
-5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	-0.214 3	-0.225 0
-10.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	-4.037 8	-4.703 9
-5.0	10.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	3.395 0	2.997 1
-5.0	5.0	1.0	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	-0.154 6	-0.115 0
-5.0	5.0	0.5	2.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	-0.286 5	-0.318 9
-5.0	5.0	0.5	1.0	7.00	0.22	1.0	0.03	0.5	2.053 5	2.280 1
-5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.60	1.0	0.03	0.5	-1.006 9	-1.135 0
-5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	2.0	0.03	0.5	-0.210 6	-0.164 0
-5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	1.00	0.5	-0.219 7	-0.231 1
-5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	1.0	-0.004 3	-0.061 1
-5.0	5.0	0.5	1.0	0.71	0.22	1.0	0.03	0.5	-0.601 9	-0.632 7

注 τ 为本文得到的表面摩擦因数;
 τ^* 为文献[18]得到的表面摩擦因数。

表 2 给出外表加热平板 ($Gr < 0$), $Gr, Gm, M, K_0, Pr, Sc, So, Du$ 和 N 不同数值时的表面摩擦因数。可以发现,Schmidt 数\渗透参数或 Dufour 数的增大,会导致表面摩擦因数的减小,然而,Prandtl 数\磁场参数\Soret 数\Grashof 数或修正的 Grashof 数的增加,会导致表面摩擦因数的增大。

表 3 对不同数值的 Prandtl 数 Pr 、辐射参数 N 和 Dufour 数 Du , 给出了 Nusselt 数 (Nu) 项中的传热系数值. 可以发现, Dufour 数的增大, 导致传热系数值的增大, 然而, Prandtl 数或辐射参数的增大, 导致传热系数值的减小. 参见图 16.

表 4 对不同数值的 Schmidt 数 Sc 、辐射参数 N 和 Soret 数 So , 给出了 Sherwood 数 (S_b) 项中的传质系数值. 可以发现, Schmidt 数的增大, 导致传质系数值的减小, 然而, Soret 数或辐射参数的增大, 导致传质系数值的增大. 参见图 17.

表 3 Nusselt 数项中的传热系数

Pr	Du	N	Nu
0.71	0.03	0.5	9.644 3
7.00	0.03	0.5	8.256 9
0.71	1.00	0.5	9.645 6
0.71	0.03	1.0	9.574 3

表 4 Sherwood 数项中的传质系数

Sc	So	N	S_b
0.22	1.0	0.5	9.565 1
0.60	1.0	0.5	9.224 4
0.22	2.0	0.5	9.566 3
0.22	1.0	1.0	9.565 9
0.22	1.0	0.5	9.405 7

5 结 论

研究了“流动参数对伴有热辐射的, 流经无限垂直多孔平板的, 非稳定 MHD 流动的影响”问题. 利用有限单元法, 求解其无量纲方程. 研究了不同参数, 如 $Gr, Gm, Pr, Sc, M, N, So, Du$ 和 K_0 , 对速度、温度和浓度的影响. 研究结果总结如下:

- 1) 平板外表冷却和加热时, 随着热 Grashof 数和 Solutal Grashof 数的增大, 速度都是增大的;
- 2) 平板外表冷却时, 热辐射参数和磁场参数的增大, 导致速度的减小, 而随着 Soret 数、Dufour 数和渗透参数的增大, 速度增大. 与平板外表冷却时相比, 可以发现, 平板外表加热情况时的影响正相反;
- 3) 热辐射参数和 Prandtl 数的增大, 导致温度的减小, 而 Dufour 数的增大, 导致温度的增大;
- 4) 浓度随着 Schmidt 数的增大而减小, 而随着 Soret 数的增大而增大;
- 5) 与文献[18]的结果相比较, 本文得到的表面摩擦因数与之吻合得很好.

参考文献:

- [1] Jaluria Y. *Natural Convection Heat and Mass Transfer*[M]. Oxford: Pregamon Press, 1980.
- [2] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing [J]. *Can J Chem Eng*, 1977, **55**(6): 744-746.
- [3] Kinyanjui M, Kwanza J K, Uppal S M. Magneto-hydrodynamic free convection heat mass transfer of heat generating fluid past an impulsively started infinite vertical porous plate with hall current and radiation absorption[J]. *Energy Conservation and Management*, 2001, **42**

- (8) : 917-931.
- [4] Yih K A. The effect of transpiration velocity on coupled heat and mass transfer in mixed convection over a vertical plate embedded in a saturated porous medium[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 1997, **24**(2) : 265-275.
- [5] Elbashbeshy E M A. The mixed convection along a vertical plate embedded in non-darcian porous medium with suction and injection[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **136**(1) : 139-149.
- [6] Chin K E, Nazar R, Arifin N M, Pop I. Effect of variable viscosity on mixed convection boundary layer flow over a vertical surface embedded in a porous medium[J]. *Int Comm in Heat and Mass Transfer*, 2007, **34** : 464-473.
- [7] Pal D, Talukdar B. Buoyancy and chemical reaction effects on MHD mixed convection heat mass transfer in a porous medium with thermal radiation and Ohmic heating[J]. *Comm Non-linear Sci Numer Simulat*, 2009, **15**(10) : 2878-2893. doi:10.1016/j.cnsns.2009.10.029.
- [8] Mukhopadhyay S. The effects of thermal radiation on unsteady mixed convection flow and heat transfer over a porous stretching surface in porous medium[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, **52**(13/14) : 3261-3265.
- [9] Hayat T, Mustafa M, Pop I. Heat and mass transfer for Soret and Dufour effects on mixed convection boundary layer flow over a stretching vertical surface in a porous medium filled with a viscoelastic fluid[J]. *Comm Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2010, **15**(5) : 1183-1196.
- [10] LI Ming-chun, TIAN Yan-wen, ZHAI Yu-chun. Soret and Dufour effects in strongly endothermic chemical reaction system of a porous medium[J]. *Trans Nonferrous Met Soc China*, 2006, **16**(5) : 1200-1204.
- [11] Gaikwad S N, Malashetty M S, Prasad K R. An analytical study of linear and nonlinear investigated double diffusive convection with Soret and Dufour effects in coupled stress fluid[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2007, **42**(7) : 903-913.
- [12] Osalusi E Side, Harris R. Thermal-diffusion and diffusion-thermo effects on combined heat and mass transfer of steady MHD convective and slip flow due to a rotating disk with viscous dissipation and Ohmic heating[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, **35**(8) : 908-915.
- [13] Shateyi S. Thermal radiation and buoyancy effects on heat and mass transfer over a semi-infinite stretching surface with suction and blowing[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2008, doi:10.1155/2008/414830.
- [14] Ambethkar V. Numerical solutions of heat and mass transfer effects of an unsteady MHD free convective flow past an infinite vertical plate with constant suction[J]. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, 2008, **5**(1) :27-36. doi: 10.3329/jname.v5i1.1785.
- [15] Shanker Reddy T, Gnaneshwar Reddy M. Radiation effects on MHD flow past an impulsively started infinite vertical plate through a porous medium with the variable temperature and mass diffusion[J]. *Journal of Pure and Applied Physics*, 2007, **19**(3) : 191-200.
- [16] Motsa S S. On the onset of convection in a porous layer in the presence of Dufour and Soret effects[J]. *SAMSA Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2008, **3** : 58-65.
- [17] Mansour M A, El-Anssary N F, Aly A M. Effects of chemical reaction and thermal stratification on MHD free convective heat and mass transfer over a vertical stretching surface embedded in a porous media considering Soret and Dufour numbers[J]. *Journal of Chemical Engineering*, 2008, **145**(2) : 340-345.

- [18] Srihari K, Raji Reddy S, Anand Rao J. Soret effect on unsteady MHD free convective mass transfer flow past an infinite vertical porous plate with oscillatory suction velocity and heat sink[J]. *International Journal of Applied Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **1**(2): 239-259.
- [19] Alam S, Rahman M M, Maleque A, Ferdows M. Dufour and Soret effects on steady MHD combined free-forced convective and mass transfer flow past a semi-infinite vertical plate[J]. *Thammasat Int J Sc Tech*, 2006, **2**(11):1-12.
- [20] Alam M S, Rahman M M. Dufour and Soret effects on mixed convection flow past a vertical porous flat plate with variable suction[J]. *Nonlinear Analysis Modelling and Control*, 2006, **11**(1): 3-12.
- [21] Abreu C R A, Alfradique M F, Telles A S. Boundary layer flows with Dufour and Soret effects I: forced and natural convection[J]. *Chemical Engineering Science*, 2006, **61**(13): 4282-4289.
- [22] Lyubimova T, Shyklyaeva E, Legros J C, Shevtsova V, Roux. Numerical study of high frequency vibration influence on measurement of Soret and diffusion coefficients in low gravity conditions[J]. *Advances in Space Research*, 2005, **36**(1): 70-74.
- [23] Postelnicu A. Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, **47**(6/7):1467-1472.

Soret and Dufour Effects on Unsteady MHD Flow Past an Infinite Vertical Porous Plate With Thermal Radiation

S. R. Vempati, A. B. Laxmi-Narayana-Gari

(Department of Mathematics, University College of Science,
Osmania University, Hyderabad 500007, Andhra Pradesh, India)

Abstract: The objectives of the present study are to investigate the effect of flow parameters on free convection and mass transfer unsteady magnetohydrodynamic flow of an electrically conducting, viscous, incompressible fluid past an infinite vertical porous plate under oscillatory suction velocity and thermal radiation by taking into account the Dufour (diffusion thermo) and Soret (thermal diffusion) effects. The problem is solved numerically by using finite element method for velocity, temperature and concentration field and also the expression for skin friction, rate of heat and mass transfer have been obtained. The results obtained have been presented numerically through graphs and tables for externally cooled plate ($Gr > 0$) and externally heated plate ($Gr < 0$) to observe the effects of various parameters encountered in the equations.

Key words: mass transfer; MHD flow; vertical plate; suction velocity; Soret and Dufour numbers; thermal radiation; finite element method