文章编号:1000-0887(2010)11-1351-09

Navier-Stokes 方程的一种并行两水平有限元方法*

尚月强[1], 罗振东[1,2]

(1. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院,贵阳 550001;
2. 华北电力大学 数学与物理学院,北京 102206)

(郭兴明推荐)

摘要: 基于区域分解技巧,提出了一种求解定常 Navier-Stokes 方程的并行两水平有限元方法. 该方法首先在一粗网格上求解 Navier-Stokes 方程,然后在细网格的子区域上并行求解粗网格解的残差方程,以校正粗网格解. 该方法实现简单,通信需求少. 使用有限元局部误差估计,推导了并行方法所得近似解的误差界,同时通过数值算例,验证了其高效性.

关 键 词: Navier-Stokes 方程; 有限元方法; 两水平方法; 重叠型区域分解; 并行算法

中图分类号: O241.82　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.008

引　言

Navier-Stokes 方程是描述流体运动规律的一类典型的非线性方程,其研究对人们认识和掌握湍流的运动规律至关重要. 但由于人们对非线性现象的本质认识有限,使得 Navier-Stokes 方程的精确解很难找到,往往通过数值模拟来了解其解的性态. 而湍流的数值模拟所需的计算机资源往往需高性能并行机才能满足其需求,因而很有必要探索 Navier-Stokes 方程的高效并行数值方法,以实现复杂湍流的数值模拟.

基于对 Navier-Stokes 方程有限元解全局与局部性质的认识,即其低频分量可用粗网格较好地逼近,而高频分量可在细网格上局部与并行计算,本文提出求解定常 Navier-Stokes 方程的一种并行两水平有限元方法. 该方法首先用一粗网格去求解 Navier-Stokes 方程,然后通过区域分解技巧,在细网格的子区域上并行求解粗网格解的残差方程,以校正粗网格解. 该方法实现简单,可充分利用现有的串行软件进行并行编程,处理器之间的通信需求少. 该方法与 He 等[1]和 Ma 等[2]所提出的算法的区别在于粗细网格上的问题都是非线性问题. 若我们进一步采用不同的迭代法去求解这些非线性问题,则文献[1-2]所提出的并行算法可看成是本文所提出的非线性有限元方法的特例,因而可将它们纳入统一的框架进行分析.

本文内容安排如下:第 1 节给出 Navier-Stokes 方程的一些基本知识和对有限元空间的一些假设;第 2 节设计并分析基于区域分解的两水平有限元并行算法;第 3 节给出数值算例以验

* 收稿日期: 2010-02-23; 修订日期: 2010-10-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11001061);贵州省科学技术基金资助项目(2008(2123))
作者简介: 尚月强(1976—),男,贵州人,副教授,博士(联系人. E-mail:yueqiangshang@gmail.com).

证算法的有效性;第 4 节给出相关结论.

1 定常 Navier-Stokes 方程及其有限元逼近

设 Ω 是 $R^d(d=2,3)$ 中具有 Lipschitz 连续边界的有界开集. 给定一非负整数 m,我们分别用 $H^m(\Omega)$ 和 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 表示标准的 Sobolev 空间及其范数,用 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)^l(l=1,2,3)$ 中的内积,并用 $H_0^1(\Omega)$ 表示由 $H^1(\Omega)$ 中在 $\partial\Omega$ 上迹为 0 的函数组成的子空间(参见文献[3]). 对于一给定的子区域 $\Omega_0\subset\Omega$,我们通过将 $H_0^1(\Omega_0)$ 中的函数 0 扩展成 $H_0^1(\Omega)$ 的函数的方式,将 $H_0^1(\Omega_0)$ 视为 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间.

1.1 定常 Navier-Stokes 方程

考虑下列定常 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_d)$ 为速度向量,p 为压力, $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_d)$ 为体积力,$\boldsymbol{\nu}$ 是粘性系数.

为引进方程(1)的变分形式,我们令

$$X=H_0^1(\Omega)^d,\ Y=L^2(\Omega)^d,\ M=L_0^2(\Omega)=\left\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\,\mathrm{d}x=0\right\},$$

并定义 $a(\cdot,\cdot),b(\cdot,\cdot,\cdot),d(\cdot,\cdot)$ 如下:

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}),\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-\frac{1}{2}((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),$$

$$d(\boldsymbol{v},q)=(\operatorname{div}\boldsymbol{v},q),\qquad \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X,\ q\in M.$$

三线性项 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 有以下性质[4]:

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=-b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\qquad \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X, \tag{2}$$

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant N\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega},\qquad \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X, \tag{3}$$

其中

$$N=\sup_{\substack{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X\\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\neq 0}}\frac{|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|}{\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}}.$$

给定 $\boldsymbol{f}\in L^2(\Omega)^d$,方程(1) 的变分形式为: 求 $(\boldsymbol{u},p)\in X\times M$, 使得

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p)+d(\boldsymbol{u},q)=(\boldsymbol{f},v),\qquad \forall\,(\boldsymbol{v},q)\in X\times M. \tag{4}$$

关于方程(4)解的存在唯一性及正则性,我们有如下定理[4-5]:

定理 1.1 设 Ω 是 R^d 中具有 $C^{k+1}(k\geqslant 1)$ 型边界的有界区域或 R^d 中的凸多边形或凸多面体区域($k=1$),对于给定的 $\boldsymbol{f}\in H^{k-1}(\Omega)^d$,方程(4) 至少存在一对解 $(\boldsymbol{u},p)\in(H^{k+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^d\times(H^k(\Omega)\cap L_0^2(\Omega))$, 满足

$$\begin{cases} \nu\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\leqslant\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega},\ \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}=\sup\limits_{\boldsymbol{v}\in X,\boldsymbol{v}\neq 0}\dfrac{|(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})|}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}},\\ \nu\|\boldsymbol{u}\|_{k+1,\Omega}+\|p\|_{k,\Omega}\leqslant c\|\boldsymbol{f}\|_{k-1,\Omega}, \end{cases} \tag{5}$$

并且,若函数 $\boldsymbol{f}$ 与 ν 满足下列唯一性条件

$$\frac{N\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}{\boldsymbol{\nu}^2}<1, \tag{6}$$

则方程(4)的解 $(\boldsymbol{u},p)$ 唯一.

本文中,我们用字母 c 代表一大于 0 的常数,它不依赖于网格参数,并且在不同地方可能代表不同的值.

1.2 混合有限元逼近

设 $T^h(\Omega)=\{K\}$ 是 Ω 的一个网格尺寸函数为 $h(x)=h_K$ 的网格剖分,其中 h_K 是包含 x 的单元 K 的直径,满足假设:

A0 三角剖分 存在一常数 $\gamma \geqslant 1$, 使得

$$h_\Omega^\gamma \leqslant ch(x), \qquad \forall\ x \in \Omega,$$

其中, $h_\Omega=\max_{x\in\Omega}h(x)$ 是 $T^h(\Omega)$ 最大单元的直径. 为表述方便,有时我们略去 h_Ω 中的下标,直接写成 h .

设 $X_h(\Omega)\subset H^1(\Omega)^d, M_h(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ 是相应于网格 $T^h(\Omega)$ 的两个有限元空间,令

$$X_h^0(\Omega)=X_h(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)^d,\ M_h^0(\Omega)=M_h(\Omega)\cap L_0^2(\Omega),$$

$$V_h(\Omega)=\{\boldsymbol{v}_h\in X_h^0(\Omega): d(\boldsymbol{v}_h,q_h)=0,\ \forall\ q_h\in M_h^0(\Omega)\}.$$

对于给定的子区域 $G\subset\subset\Omega_0\subset\Omega$ (此处 $G\subset\subset\Omega_0$ 表示 $\mathrm{dist}(\partial G\backslash\partial\Omega,\partial\Omega_0\backslash\partial\Omega)>0$),我们分别定义 $X_h(G),M_h(G),V_h(G)$ 和 $T^h(G)$ 为 $X_h(\Omega),M_h(\Omega),V_h(\Omega)$ 和 $T^h(\Omega)$ 在 G 上的限制,并令

$$X_0^h(G)=\{\boldsymbol{v}\in X_h(\Omega):\ \mathrm{supp}\,\boldsymbol{v}\subset\subset G\},\ M_0^h(G)=\{q\in M_h(\Omega):\mathrm{supp}\,q\subset\subset G\}.$$

我们需要对有限元空间的一些假设条件,即[1,2,6-7]

A1 逼近性 对任意的 $(\boldsymbol{u},p)\in H^{k+1}(G)^d\times H^k(G)(k\geqslant 1)$,存在 $(\boldsymbol{\pi}_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}_h p)\in X_h(G)\times M_h(G)$, 使得

$$\|h^{-1}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\pi}_h\boldsymbol{u})\|_{0,G}+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\pi}_h\boldsymbol{u}\|_{1,G}\leqslant ch_G^s\|\boldsymbol{u}\|_{1+s,G}, \qquad 0\leqslant s\leqslant k,$$

$$\|h^{-1}(p-\boldsymbol{\rho}_h p)\|_{-1,G}+\|p-\boldsymbol{\rho}_h p\|_{0,G}\leqslant ch_G^s\|p\|_{s,G}, \qquad 0\leqslant s\leqslant k;$$

A2 反估计 对任意的 $(\boldsymbol{v},q)\in X_h(G)\times M_h(G)$, 有

$$\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,G}\leqslant c\|h^{-1}\boldsymbol{v}\|_{0,G},\ \|q\|_{0,G}\leqslant c\|h^{-1}q\|_{-1,G};$$

A3 超收敛 对给定的 $G\subset\Omega$,设 $\omega\in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}\,\omega\subset\subset G$,则对任意的 $(\boldsymbol{u},p)\in X_h(G)\times M_h(G)$,存在 $(\boldsymbol{v},q)\in X_0^h(G)\times M_0^h(G)$, 使得

$$\|h^{-1}\nabla(\omega\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\|_{0,G}\leqslant c\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,G},\ \|h^{-1}(\omega p-q)\|_{0,G}\leqslant c\|p\|_{0,G};$$

A4 稳定性条件 存在一常数 $\beta>0$, 使得

$$\beta\|q\|_{0,G}\leqslant\sup_{\boldsymbol{v}\in X_h^0(G),\boldsymbol{v}\neq 0}\frac{(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v},q)}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,G}}, \qquad \forall q\in M_h^0(G).$$

定义 L^2- 正交投影 $P_h:Y\to V_h(\Omega)$ 如下:

$$(P_h\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_h), \qquad \forall\boldsymbol{v}\in Y,\ \boldsymbol{v}_h\in V_h(\Omega).$$

并按如下条件定义离散的 Stokes 算子 $A_h=-P_h\Delta_h$:

$$(-\Delta_h\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=(\nabla\boldsymbol{u}_h,\nabla\boldsymbol{v}_h), \qquad \forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\in X_h^0(\Omega).$$

关于离散变量情形的三线性项 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h\in X_h^0(\Omega)$, 我们有[8-10]

$$|b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)|+|b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{v}_h)|\leqslant c\|\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}\|\nabla\boldsymbol{v}_h\|_{0,\Omega}\|A_h\boldsymbol{w}_h\|_{0,\Omega}^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{w}_h\|_{0,\Omega}^{1/2}, \tag{7}$$

$$|b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)|+|b(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{w}_h)|\leqslant c\|\nabla\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^{1/2}\|A_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{v}_h\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,\Omega}. \tag{8}$$

基于以上记号与假设,我们可得方程(4)的有限元逼近为:求 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in X_h^0(\Omega)\times M_h^0(\Omega)$,

使得

$$a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v},p_h) + d(\boldsymbol{u}_h,q) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),$$
$$\forall(\boldsymbol{v},q) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega). \tag{9}$$

对于方程(9),我们有以下结果[1,4-5]:

定理 1.2 在假设 A0、A1、A4 及定理 1.1 的条件下,存在一常数 $h_0 > 0$,使得对任意的 $h \in (0,h_0]$,方程(9) 存在唯一解$(\boldsymbol{u}_h,p_h) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega)$, 满足

$$\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega} \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega},\ \nu\|A_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega} \leqslant c\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}, \tag{10}$$

$$\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\Omega} + \|p-p_h\|_{0,\Omega} \leqslant ch^s\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega},\qquad 1 \leqslant s \leqslant k, \tag{11}$$

$$\nu\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega} + \|p-p_h\|_{-1,\Omega} \leqslant ch^{s+1}\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega},\qquad 1 \leqslant s \leqslant k. \tag{12}$$

2 两水平有限元算法

2.1 两水平有限元局部算法

设 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$,$T^H(\Omega)$ 是一个尺寸为 $H \gg h$ 的正则网格,$T^h(\Omega_0)$ 是一个通过局部加密 $T^H(\Omega)$ 所得的网格. 在我们的分析中,我们将使用另一全局网格 $T^h(\Omega)$,它与 $T^H(\Omega)$ 嵌套,并在 Ω_0 上与 $T^h(\Omega_0)$ 一致. 基于两重网格离散的有限元局部算法如下:

算法 1 两水平有限元局部算法

1) 在粗网格上求 $(\boldsymbol{u}_H,p_H) \in X_H^0(\Omega) \times M_H^0(\Omega)$, 使得

$$a(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v},p_H) + d(\boldsymbol{u}_H,q) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),$$
$$\forall(\boldsymbol{v},q) \in X_H^0(\Omega) \times M_H^0(\Omega);$$

2) 在子区域 Ω_0 上求$(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\eta}_h) \in X_h^0(\Omega_0) \times M_h^0(\Omega_0)$, 使得

$$a(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta}_h) + d(\boldsymbol{e}_h,q) =$$
$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) - a(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v},p_H) - d(\boldsymbol{u}_H,q),$$
$$\forall(\boldsymbol{v},q) \in X_h^0(\Omega_0) \times M_h^0(\Omega_0);$$

3) 在子区域 Ω_0 内取$(\boldsymbol{u}^h,p^h) = (\boldsymbol{u}_H + \boldsymbol{e}_h, p_H + \boldsymbol{\eta}_h)$.

引理 2.1 设 $(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\eta}_h) \in X_h^0(\Omega_0) \times M_h^0(\Omega_0)$ 由算法 1 所得,则有

$$\nu\|\boldsymbol{e}_h\|_{0,\Omega_0} + \nu\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{0,\Omega_0} \leqslant cH^{s+1}\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega},\qquad 1 \leqslant s \leqslant k. \tag{13}$$

证明 考虑对偶问题:对于 $(\boldsymbol{F},\phi) \in L^2(\Omega_0)^d \times (H^1(\Omega_0) \cap L_0^2(\Omega_0))$, 求$(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}) \in (H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0))^d \times (L_0^2(\Omega_0) \cap H^1(\Omega_0))$, 使得

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Phi}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Phi}) + d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Psi}) - d(\boldsymbol{\Phi},q) =$$
$$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}) + (\phi,q),\qquad \forall(\boldsymbol{v},q) \in H_0^1(\Omega_0)^d \times L_0^2(\Omega_0), \tag{14}$$

对于 $H \in (0,h_0]$,上述问题存在唯一解$(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})$, 满足[1,4]

$$\nu\|\boldsymbol{\Phi}\|_{2,\Omega_0} + \|\boldsymbol{\Psi}\|_{1,\Omega_0} \leqslant c(\|\boldsymbol{F}\|_{0,\Omega_0} + \|\phi\|_{1,\Omega_0}). \tag{15}$$

问题(14)的有限元解 $(\boldsymbol{\Phi}_h,\boldsymbol{\Psi}_h) \in X_h^0(\Omega_0) \times M_h^0(\Omega_0)$ 满足

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Phi}_h) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Phi}_h) + d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Psi}_h) - d(\boldsymbol{\Phi}_h,q) =$$
$$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}) + (\phi,q),\qquad \forall(\boldsymbol{v},q) \in X_h^0(\Omega_0) \times M_h^0(\Omega_0),$$

且有误差估计[1,4]

$$\nu\|\nabla(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Phi}_h)\|_{0,\Omega_0} + \|\boldsymbol{\Psi}-\boldsymbol{\Psi}_h\|_{0,\Omega_0} \leqslant ch(\|\boldsymbol{F}\|_{0,\Omega_0} + \|\phi\|_{1,\Omega_0}). \tag{16}$$

注意到

$$a(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}_H) + b(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{\Phi}_H) + b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}_H) -$$

$$d(\boldsymbol{\Phi}_H,p_h-p_H)+d(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Psi}_H)=0, \tag{17}$$

由算法 1 有

$$\begin{aligned}&a(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta}_h)+d(\boldsymbol{e}_h,q)=\\&\quad a(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})-\\&\quad d(\boldsymbol{v},p_h-p_H)+d(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,q),\qquad\forall(\boldsymbol{v},q)\in X_h^0(\Omega_0)\times M_h^0(\Omega_0).\end{aligned} \tag{18}$$

在问题(14)中取 $(\boldsymbol{v},q)=(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\eta}_h)$，并由式(16)～(18)、(3)、(6)、(11)可得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{F},\boldsymbol{e}_h)+(\phi,\boldsymbol{\eta}_h)=a(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\Phi})+b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\Phi})+d(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\Psi})-d(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\eta}_h)=\\&\quad a(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\Phi}_h)+b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\Phi}_h)+d(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{\Psi}_h)-d(\boldsymbol{\Phi}_h,\boldsymbol{\eta}_h)=\\&\quad a(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}_h)+b(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{\Phi}_h)+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}_h)-\\&\quad d(\boldsymbol{\Phi}_h,p_h-p_H)+d(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Psi}_h)=\\&\quad a(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}_h-\boldsymbol{\Phi})+b(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{\Phi}_h-\boldsymbol{\Phi})+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}_h-\boldsymbol{\Phi})-\\&\quad d(\boldsymbol{\Phi}_h-\boldsymbol{\Phi},p_h-p_H)+d(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Psi}_h-\boldsymbol{\Psi})+\\&\quad a(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Phi}_H)+b(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Phi}_H)+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Phi}_H)-\\&\quad d(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Phi}_H,p_h-p_H)+d(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{\Psi}-\boldsymbol{\Psi}_H)\leqslant\\&\quad cH\Big(\|\nabla(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H)\|_{0,\Omega_0}+\\&\quad\frac{N}{\nu}(\|\nabla\boldsymbol{u}_H\|_{0,\Omega_0}+\|\nabla\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_0})\|\nabla(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H)\|_{0,\Omega_0}+\\&\quad\nu^{-1}\|p_h-p_H\|_{0,\Omega_0}+\|\nabla(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H)\|_{0,\Omega_0}\Big)(\|\boldsymbol{F}\|_{0,\Omega_0}+\|\phi\|_{1,\Omega_0})\leqslant\\&\quad c\nu^{-1}H^{s+1}\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega}(\|\boldsymbol{F}\|_{0,\Omega_0}+\|\phi\|_{1,\Omega_0}),\qquad 1\leqslant s\leqslant k.\end{aligned} \tag{19}$$

由此可得

$$\nu\|\boldsymbol{e}_h\|_{0,\Omega_0}+\nu\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{-1,\Omega_0}\leqslant cH^{s+1}\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega},\qquad 1\leqslant s\leqslant k.$$

仿文献[1]中引理 3.2 的证明，我们可得下列引理：

引理 2.2 设 $\boldsymbol{g}\in H^{-1}(\Omega_0)^d$，$0<\mu\leqslant h_0(\mu=h,H)$. 若 $(\boldsymbol{w},r)\in X_h(\Omega)\times M_h(\Omega)$ 满足

$$a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},r)+d(\boldsymbol{w},q)=(\boldsymbol{g},\boldsymbol{v}),\quad\forall(\boldsymbol{v},q)\in X_0^h(\Omega_0)\times M_0^h(\Omega_0),$$

则对 $D\subset\subset\Omega_0\subset\Omega$，有

$$\nu\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{0,D}+\|r\|_{0,D}\leqslant c(\nu\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega_0}+\|r\|_{-1,\Omega_0}+\|\boldsymbol{g}\|_{-1,\Omega_0}). \tag{20}$$

定理 2.1 设定理 1.2 的条件及 A0～A4 成立，$(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in X_h^0(\Omega)\times M_h^0(\Omega)$ 是方程(9)的标准有限元解，$(\boldsymbol{u}^h,p^h)\in X_h(\Omega_0)\times M_h(\Omega_0)$ 是由算法 1 所得的近似解，则对 $D\subset\subset\Omega_0$，有

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}^h)\|_{0,D}+\|p_h-p^h\|_{0,D}\leqslant\\&\quad cH^{s+1}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}\right)\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega},\qquad 1\leqslant s\leqslant k,\end{aligned} \tag{21}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h)\|_{0,D}+\|p-p^h\|_{0,D}\leqslant\\&\quad c\left(h^s+H^{s+1}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}\right)\right)\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega},\qquad 1\leqslant s\leqslant k.\end{aligned} \tag{22}$$

证明 由算法 1 可得

$$a(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v},p^h) + d(\boldsymbol{u}^h,q) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),$$
$$\forall(\boldsymbol{v},q) \in X_h^0(\Omega_0) \times M_h^0(\Omega_0). \quad (23)$$

又由于

$$\begin{aligned}
&b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) = \\
&\quad b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - \\
&\quad b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h + \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{e}_h + \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + 2b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) = \\
&\quad b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) - \\
&\quad b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + 2b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) = \\
&\quad b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}) - \\
&\quad b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

因此,由式(9)及式(23)可得

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}) - \\
&\quad d(\boldsymbol{v},p_h - p^h) + d(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h,q) = (\boldsymbol{g},\boldsymbol{v}), \qquad \forall(\boldsymbol{v},q) \in X_0^h(\Omega_0) \times M_0^h(\Omega_0),
\end{aligned}$$

其中

$$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}).$$

由式(2)、(6)~(8)、(10)、(12)及引理2.1有

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{g}\|_{-1,\Omega_0} \leqslant c\|\boldsymbol{e}_h\|_{0,\Omega_0}(\|\nabla\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_0}^{1/2}\|A_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_0}^{1/2} + 2\|\nabla\boldsymbol{u}_H\|_{0,\Omega_0}^{1/2}\|A_H\boldsymbol{u}_H\|_{0,\Omega_0}^{1/2}) + \\
&\quad c\|\nabla\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_0}^{1/2}\|A_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_0}^{1/2}\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H\|_{0,\Omega_0} \leqslant \\
&\quad \frac{c\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}(\nu\|\boldsymbol{e}_h\|_{0,\Omega_0} + \nu\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H\|_{0,\Omega_0}) \leqslant \\
&\quad cH^{s+1}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant k.
\end{aligned}$$

应用引理2.1、引理2.2、三角不等式及式(12)可得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h)\|_{0,D} + \|p_h - p^h\|_{0,D} \leqslant \\
&\quad c(\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h\|_{0,\Omega_0} + \|p_h - p^h\|_{-1,\Omega_0} + \|\boldsymbol{g}\|_{-1,\Omega_0}) \leqslant \\
&\quad c(\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H\|_{0,\Omega_0} + \|p_h - p_H\|_{-1,\Omega_0} + \|\boldsymbol{e}_h\|_{0,\Omega_0} + \\
&\quad \|\boldsymbol{\eta}_h\|_{-1,\Omega_0} + \|\boldsymbol{g}\|_{-1,\Omega_0}) \leqslant \\
&\quad cH^{s+1}\left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}\right)\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant k,
\end{aligned}$$

至此,我们完成了式(21)的证明,由式(21)及式(11),我们即得式(22). □

2.2 两水平有限元并行算法

设 $D_1,D_2,\cdots,D_J$ 是求解区域 Ω 的一个互不重叠的区域分解,Ω_j 通过扩展 D_j 所得并满足 $D_j \subset\subset \Omega_j \subset \Omega\ (j = 1,2,\cdots,J)$. 基于上一节两水平有限元局部算法,利用区域分解技巧,我们可得两水平有限元并行算法如下:

算法2 两水平有限元并行算法

1) 在粗网格上求 $(\boldsymbol{u}_H,p_H) \in X_H^0(\Omega) \times M_H^0(\Omega)$, 使得

$$a(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v},p_H) + d(\boldsymbol{u}_H,q) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),$$
$$\forall(\boldsymbol{v},q) \in X_H^0(\Omega) \times M_H^0(\Omega);$$

2) 在细网格的子区域 $\Omega_j (j = 1,2,\cdots,J)$ 上并行求 $(\boldsymbol{e}_h^j,\boldsymbol{\eta}_h^j) \in X_h^0(\Omega_j) \times M_h^0(\Omega_j)\ (j = 1,2,$

$\cdots,J)$，使得

$$a(\boldsymbol{e}_h^j,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{e}_h^j,\boldsymbol{e}_h^j,\boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v},\eta_h^j) + d(\boldsymbol{e}_h^j,q) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) - a(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v},p_H) - d(\boldsymbol{u}_H,q), \quad \forall(\boldsymbol{v},q) \in X_h^0(\Omega_j) \times M_h^0(\Omega_j);$$

3）在子区域 D_j 内取 $(\boldsymbol{u}^h,p^h) = (\boldsymbol{u}_H,p_H) + (\boldsymbol{e}_h^j,\eta_h^j)$ $(j=1,2,\cdots,J)$.

定义分片范数

$$|||\nabla(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h)|||_{0,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^{J} \|\nabla(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h)\|_{0,D_j}^2\right)^{1/2},$$

$$|||p_h - p^h|||_{0,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^{J} \|p_h - p^h\|_{0,D_j}^2\right)^{1/2}.$$

并由定理 2.1，我们有

定理 2.2 在定理 2.1 的条件下，由算法 2 所得的近似解 $(\boldsymbol{u}^h,p^h)$ 有下列误差估计：

$$|||\nabla(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h)|||_{0,\Omega} + |||p_h - p^h|||_{0,\Omega} \leqslant cH^{s+1}\left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}\right)\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant k, \tag{24}$$

从而有

$$|||\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h)|||_{0,\Omega} + |||p - p^h|||_{0,\Omega} \leqslant c\left(h^s + H^{s+1}\left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}}\right)\right)\|\boldsymbol{f}\|_{s-1,\Omega}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant k. \tag{25}$$

定理 2.2 表明：若我们选取 H 使得 $H = O(h^{s/(s+1)})$，则我们的方法可获得与标准有限元方法相同阶的收敛率. 但由于细网格上的非线性方程是并行求解的，我们的方法能大大节约 CPU 时间.

3 数值结果

在本节，我们给出数值算例以检验算法 2.2 的有效性. 算例的准确解为

$$\begin{cases} u_1 = 10x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1), \\ u_2 = -10y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1), \\ p = 3x^2 - 1. \end{cases} \tag{26}$$

求解区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. 所使用的混合元为二阶 Taylor-Hood 元：

$$X_H^0(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : \boldsymbol{v}|_K \in (P_2)^2, \forall K \in T^H(\Omega)\},$$

$$M_H^0(\Omega) = \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\Omega) : q|_K \in P_1, \forall K \in T^H(\Omega)\},$$

$$X_h^0(\Omega_j) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega_j)^2 : \boldsymbol{v}|_K \in (P_2)^2, \forall K \in T^h(\Omega_j)\}, \qquad j = 1,2,\cdots,J,$$

$$M_h^0(\Omega_j) = \{q \in L_0^2(\Omega_j) \cap C^0(\Omega_j) : q|_K \in P_1, \forall K \in T^h(\Omega_j)\}, \qquad j = 1,2,\cdots,J,$$

其中，P_2 和 P_1 分别为二次和一次多项式函数空间. 粗细上的非线性 Navier-Stokes 方程都采用 Picard 迭代法求解，迭代收敛准则为相邻两次迭代速度的相对 L^2- 误差小于 10^{-6}. 相应的线性代数方程组的求解器为 UMFPACK.

我们将求解区域 Ω 分成 4 个互不重叠的子区域：

$$D_1 = (0,1/2) \times (0,1/2),\ D_2 = (0,1/2) \times (1/2,1),$$

$$D_3 = (1/2,1) \times (0,1/2),\ D_4 = (1/2,1) \times (1/2,1),$$

然后将每一子区域 $D_j(j=1,2,3,4)$ 向外扩展尺度为 $2h$ 的区域以获得 $\Omega_j(j=1,2,3,4)$. 用算法 2 相互独立地计算每一子区域的有限元解,其中 $h=n^{-3}(n=3,4,5)$ 及 H 满足 $2H^3=h^2$, $\nu=1$. 计算结果如表 1 所示,其中 CPU 时间是算法在各子区域上所花时间的最大者,包括网格生成时间、方程求解及误差计算时间. 收敛率 W 由公式 $\ln(E_i/E_{i+1})/\ln(h_i/h_{i+1})$ 计算所得,此处 E_i 和 E_{i+1} 分别为 $h=h_i$ 和 h_{i+1} 时的相对误差$(|||\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h)|||_{0,\Omega}+|||p-p^h|||_{0,\Omega})/(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}+\|p\|_{0,\Omega})$. it_{C} 和 it_{F} 分别为粗细网格上求解非线性问题的迭代次数.

表 1 并行两水平方法所得近似解的误差

h	H	CPU/s	it_{C}	it_{F}	$(|||\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h)|||_{0,\Omega})/\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}$	$(|||p-p^h|||_{0,\Omega})/\|p\|_{0,\Omega}$	收敛率 W
1/27	1/18	2.563	2	1	0.003 866 84	0.000 389 742	
1/64	1/32	9.609	2	1	0.000 721 998	7.141 68E-005	1.949 66
1/125	1/50	81.484	2	1	0.000 189 074	1.987 85E-005	1.979 48

表 2 标准有限元解的误差

h	CPU/s	it_{F}	$(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\Omega})/\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}$	$\|p-p_h\|_{0,\Omega}/\|p\|_{0,\Omega}$	收敛率 W
1/27	3.907	2	0.004 034 34	0.000 343 585	
1/64	24.421	2	0.000 720 112	6.111 74E-005	1.997 48
1/125	256.433	2	0.000 188 932	1.628 19E-005	1.993 92

为了与标准有限元方法进行比较,我们在表 2 列出了在整个区域上使用标准有限元通过 Picard 迭代法计算所得的近似解. 比较表 1 与表 2 可以看出:我们的并行方法取得了关于网格参数 h 的接近二阶的收敛率,与理论分析基本一致;与标准的有限元方法相比,在所得近似解精度很相近的情况下,我们的方法大大节约了计算时间.

4 结 论

基于区域分解,本文提出了一种求解定常 Navier-Stokes 方程的并行两水平有限元方法. 该方法实现简单,可获得与标准有限元方法精度相近的有限元解. 数值算例验证了其高效性.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献:

[1] HE Yin-nian, XU Jin-chao, ZHOU Ai-hui. Local and parallel finite element algorithms for the Navier-Stokes problem[J]. *J Comput Math*, 2006, **24**(3): 227-238.

[2] 马飞遥, 马逸尘, 沃维丰. 基于二重网格的定常 Navier-Stokes 方程的局部和并行有限元算法[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(1): 27-35.

[3] Adams R. *Sobolev Spaces*[M]. New York: Academic Press Inc, 1975.

[4] Girault V, Raviart P A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations—Theory and Algorithms*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[5] HE Yin-nian, LI Jian. Convergence of three iterative methods based on finite element discretization for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Comput Meth Appl Mech Engrg*, 2009, **198**: 1351-1359.

[6] XU Jin-chao, ZHOU Ai-hui. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations[J]. *Math Comput*, 2000, **69**(231): 881-909.

[7] SHANG Yue-qiang, HE Yin-nian. Parallel iterative finite element algorithms based on full do-

main partition for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Appl Numer Math*, 2010, **60**(7): 719-737.

[8] HE Yin-nian. A fully discrete stabilized finite element method for the time-dependent Navier-Stokes problem[J]. *IMA J Numer Anal*, 2003, **23**(4): 665-691.

[9] HE Yin-nian. A two-level finite element Galerkin method for the nonstationary Navier-Stokes equations II: time discretization[J]. *J Comput Math*, 2004, **22**(1): 33-54.

[10] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem I: regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1982, **19**(2): 275-311.

A Parallel Two-Level Finite Element Method for the Navier-Stokes Equations

SHANG Yue-qiang[1], LUO Zhen-dong[1,2]

(1. *School of Mathematics and Computer Science*, *Guizhou Normal University*, *Guiyang* 550001, *P. R. China*;

2. *School of Mathematics and Physics*, *North China Electric Power University*, *Beijing* 102206, *P. R. China*)

Abstract: Based on domain decomposition, a parallel two-level finite element method for the stationary Navier-Stokes equations was proposed and analyzed. The basic idea of the method was to first solve the Navier-Stokes equations on a coarse grid, then to solve the resulted residual equations in parallel on a fine grid. This method has low communication complexity. It can be implemented easily. By local a priori error estimate for finite element discretizations, error bounds of the approximate solution were derived. Numerical results were also given to illustrate the high efficiency of the method.

Key words: Navier-Stokes equations; finite element; two-level method; overlapping domain decomposition; parallel algorithm