

# 可渗透收缩薄膜引起的三维 不稳定边界层流动\*

N·巴佐<sup>1</sup>, A·伊萨克<sup>2</sup>, I·波普<sup>3</sup>

- (1. 马来西亚博特拉大学 科学学院 数学系, 雪兰莪 43400, 马来西亚;  
2. 马来西亚国民大学 科学与技术学院 数学系, 雪兰莪 43600, 马来西亚;  
3. 克鲁日大学 数学系, 克鲁日 R3400, 罗马尼亚)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 研究可渗透收缩薄膜上的不稳定粘性流动,通过相似变换得到相似方程.在不同的不稳定参数、质量吸入参数、收缩参数、Prandtl 数下,数值地求解相似方程,得到速度和温度的分布,以及表面摩擦因数和 Nusselt 数等.结果发现,与不稳定的伸展薄膜不同,在质量吸入参数和不稳定参数的某一范围内,可渗透收缩薄膜上的不稳定流动存在双重解.

**关键词:** 不稳定; 三维流动; 边界层; 可收缩薄膜; 双重解

**中图分类号:** O357.4;O345 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.007

## 引言

可伸展面上的边界层特征问题,是工业应用领域中经常出现的重要的工程加工流动现象,并在过去的几十年里,一直吸引着不少学者的关注.例如挤压加工制造中的材料,并以受热方式在送料辊和缠绕辊之间移动时,就可以看作连续可伸展面.为了获得一等质量的最终产品,必须对产品的冷却过程进行精确的控制<sup>[1-2]</sup>.Crane<sup>[3]</sup>首次给出了可伸展平板上,出现二维流动闭式解析的相似解.Gupta P S 和 Gupta A S<sup>[4]</sup>研究了质量传递对 Crane 流动的影响,还有众多作者(例如 Chakrabati 和 Gupta<sup>[5]</sup>、Kuiken<sup>[6]</sup>、Carragher 和 Crane<sup>[7]</sup>、Banks<sup>[8]</sup>、Magyari 和 Keller<sup>[9]</sup>、朱婧等<sup>[10]</sup>)也对该问题,从不同的角度加以研究.Wang<sup>[11]</sup>仅对可伸展平板上出现的三维稳定流动的速度场进行了研究.Surma 等<sup>[12]</sup>将该问题推广到,由于平面表面的(2个方向)横向收缩,产生的三维不稳定流动.

最近,可收缩表面引起的边界层流动引起了不少人的关注.和可伸展面不同,对可收缩面来说,边界上的速度指向一个固定的点<sup>[13]</sup>,例如从一个正在上升同时可收缩的气球上,就可以观察到这个现象.物理上有两种情况很可能出现流动指向收缩面:或者在边界上施加一个足够大的吸力<sup>[13]</sup>,或者看作为一个驻点流<sup>[14]</sup>,于是收缩面的速度被限制在边界层范围内.Fang

\* 收稿日期: 2010-06-01; 修订日期: 2010-09-08

基金项目: 马来西亚科学部技术与创新项目资助(06-01-02-SF0610)

作者简介: Anuar Ishak, 教授(联系人. E-mail: anuarishak@yahoo.com).

本文原文为英文,海治译,张禄坤校.

等<sup>[15-17]</sup>研究了收缩表面上有质量传递时的边界层流动,且 Fang 等<sup>[17]</sup>也研究了不稳定收缩表面上有质量传递时的黏性流动.研究发现,当质量吸入参数  $s \geq 2$  时,方程才有解,当不稳定参数  $\beta \leq 0$  时,方程有一个以上的解.在文献[18-19]中,将收缩表面问题扩展到其它类型的流体. Fang 和 Zhang<sup>[20]</sup>研究了收缩速度线性变化时,收缩表面问题的热传导特性.

本文对 Fang 等<sup>[17]</sup>的研究进行扩展,研究由于表面的(2个方向)横向收缩,产生的三维不稳定流动及其热传导.首先通过变换,将偏微分控制方程转换为常微分方程,再进行数值求解.确定表面摩擦因数和局部 Nusselt 数,从而了解流动及其热传导特性.

## 1 问题求解

根据 Surma 等的文献[12],考虑浸入黏性流体中一个高渗透性的弹性薄膜,薄膜在  $x$  和  $y$  方向上随时间变化连续收缩(见文献[12]中的图1,但我们考虑了薄膜的收缩情况),薄膜表面( $z=0$ )上流体速度为

$$u_w(x, \bar{t}) = -\frac{ax}{1-\gamma\bar{t}}, \quad v_w(y, \bar{t}) = -\frac{by}{1-\gamma\bar{t}}, \quad (1)$$

其中,  $\bar{t} = at$  和  $\gamma\bar{t} < 1$ . 这里假设,液体在  $z \rightarrow \infty$  处无横向运动,表面温度  $T_w$  和环境温度  $T_\infty$  均为常量.在能量方程中忽略了黏性的耗损.壁面处质量流量的速度为  $w_w(t)$ , 定义见后.那么,伴有热传导流体不稳定边界层的控制方程可以表示为(见文献[12])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (5)$$

其中,  $u, v, w$  分别为坐标轴  $x, y, z$  方向的速度分量,  $T$  为流体温度,  $\alpha$  为热扩散率,  $\nu$  为流体的动黏度,初始-边界条件为

$$\begin{cases} t < 0: \text{对任意 } x, y, z, u = v = w = 0, \\ t \geq 0: \text{当 } z = 0 \text{ 时, } u = u_w(x, \bar{t}), v = v_w(y, \bar{t}), w = w_w(\bar{t}), T = T_w, \\ \text{当 } z \rightarrow \infty \text{ 时, } u = 0, v = 0, T = T_\infty, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $w_w$  为吸入( $w_w < 0$ )或射出( $w_w > 0$ )速度.

在式(6)的初始-边界条件下,我们将为方程(2)~(5)寻找一组如下形式的相似解:

$$\begin{cases} u = \frac{ax}{1-\gamma\bar{t}} f'(\eta), v = \frac{by}{1-\gamma\bar{t}} g'(\eta), w = -\frac{(a\nu)^{1/2}}{(1-\gamma\bar{t})^{1/2}} [f(\eta) + g(\eta)], \\ \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \eta = \frac{(a/\nu)^{1/2}}{(1-\gamma\bar{t})^{1/2}} z, \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $a > 0$  和  $b > 0$  为常量,上撇号表示对  $\eta$  的微分.令

$$w_w(\bar{t}) = -\frac{(a\nu)^{1/2}}{(1-\gamma\bar{t})^{1/2}} s, \quad (8)$$

其中,  $s = f(0) + g(0)$ ,  $s > 0$  表示吸入,  $s < 0$  表示射出.

将式(7)代入方程(2)~(5),得到下列常微分方程组:

$$f''' + (f + g)f'' - f'^2 - \lambda \left( f' + \frac{1}{2} \eta f'' \right) = 0, \quad (9)$$

$$g''' + (f + g)g'' - g'^2 - \lambda \left( g' + \frac{1}{2} \eta g'' \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + (f + g)\theta' - \frac{1}{2} \lambda \eta \theta' = 0. \quad (11)$$

根据 Wang 的文献[11], 不失一般性, 假设  $g(0) = 0$ , 于是, 边界条件(6)变为

$$\begin{cases} f(0) = s, g(0) = 0, f'(0) = -1, g'(0) = -c, \theta(0) = 1, \\ f'(\eta) \rightarrow 0, g'(\eta) \rightarrow 0, \theta(\eta) \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty), \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $c = b/a$  为收缩参数常量,  $\lambda = \gamma/a$  为不稳定参数常量, 本文中仅考虑  $\lambda < 0$  (减速流动). 参数  $c$  反映了驻点的本质,  $c \geq 0$  表示节点流,  $c = 0$  表示二维驻点流,  $c = 1$  表示轴对称驻点流且  $f \equiv g$ . 本文仅考虑  $0 \leq c \leq 1$ , 对  $c > 1$ , 可以通过  $x$  和  $y$  轴互换得到.

$x$  和  $y$  方向上的表面摩擦因数  $C_{fx}$  和  $C_{fy}$  是两个重要的物理量, 分别为

$$\begin{cases} C_{fx} = \frac{2\tau_{wx}}{\rho u_w^2} = -2(Re_x)^{-1/2} f''(0), \\ C_{fy} = \frac{2\tau_{wy}}{\rho v_w^2} = -2c^{1/2} (Re_y)^{-1/2} g''(0), \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\tau_{wx} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad \tau_{wy} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad (14)$$

$Re_x = u_w x / \nu$  和  $Re_y = v_w y / \nu$  为局部 Reynolds 数. 局部 Nusselt 数, 即表面热传导率, 可表示为

$$Nu_x = \frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)} = - (Re_x)^{1/2} \theta'(0), \quad (15)$$

其中

$$q_w = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (16)$$

值得注意的是, 对二维的情况, 有  $c = 0$  和  $g(\eta) \equiv 0$ , 本文所讨论的流动问题简化为 Fang 等<sup>[17]</sup>所讨论的问题. 对于稳定流动 ( $\lambda = 0$ ), 其解为

$$f(\eta) = s - \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2 - 4}} + \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2 - 4}} e^{\eta(s \pm \sqrt{s^2 - 4})/2}, \quad (17)$$

它表明, 仅当具有足够大的吸入参数 ( $s \geq 2$ ) 时, 该解才存在.

## 2 结果讨论

方程(9) ~ (12)的数值解可通过 Keller 工具箱求得, Cebei 和 Bradshaw<sup>[21]</sup>对此进行了详细论述. 很多学者使用这种方法成功地求解了各种边界层流动和热传导问题(参见 Bachok 等的文献[22-23]和 Ishak 等的文献[24-25]).

对于质量吸入参数  $s$ 、收缩参数  $c$  和 Prandtl 数  $Pr$  的某些值, 对一个不稳定参数  $\lambda$  和质量吸入参数  $s$ , 可能相应存在两个不同的  $\eta_\infty$  值, 并给出两种不同的速度和温度分布, 它们都渐进地满足远端场边界条件. 为了对现有方法的精确度进行评估, 使用 NAG 程式的 D02HAF, 数值地求解方程(9) ~ (12). 该算法解决了两个问题: 一阶系统的边值问题; 常微分方程组采用 Runge-Kutta-Merson 法以及打靶和匹配相结合的 Newton 迭代技术求解. 通过打靶法, 设置不同

的初始猜测值  $f''(0)$ ,  $g''(0)$  和  $-\theta'(0)$ , 得到两组解, 它们都渐进地满足远端场边界条件 (12), 但形状不一样。

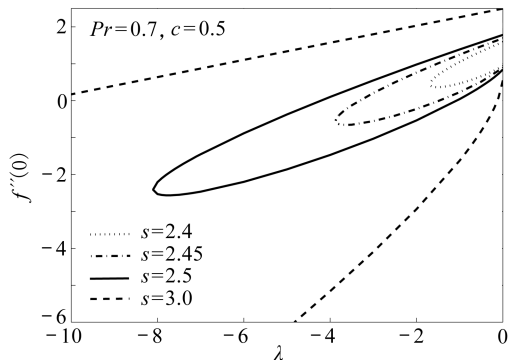


图1 取不同的  $s$  值时,  $x$  方向上的表面摩擦因数  $f''(0)$  随  $\lambda$  的变化

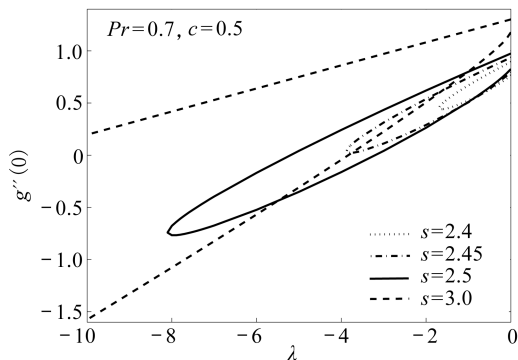


图2 取不同的  $s$  值时,  $y$  方向上的表面摩擦因数  $g''(0)$  随  $\lambda$  的变化

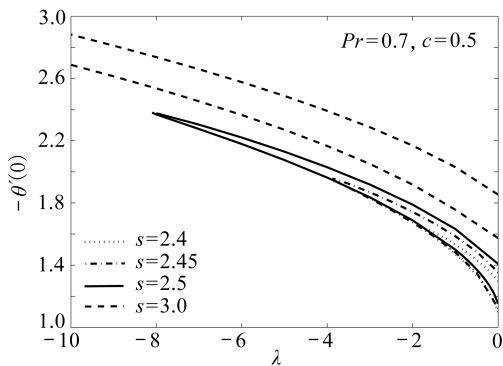


图3 取不同的  $s$  值时, 局部 Nusselt 数  $-\theta'(0)$  随  $\lambda$  的变化

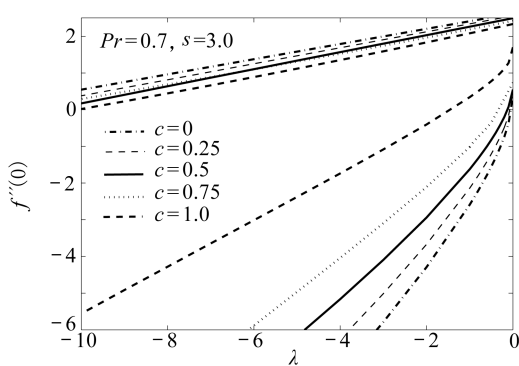


图4 取不同的  $c$  值时,  $x$  方向上的表面摩擦因数  $f''(0)$  随  $\lambda$  的变化 ( $c = 0$  为二维驻点流,  $c = 1$  为轴对称驻点流)

图1~3给出了, 当  $c = 0.5, Pr = 0.7$ , 质量吸入参数  $s$  取不同值时,  $x$  和  $y$  方向上的表面摩擦因数  $f''(0), g''(0)$  和局部 Nusselt 数  $-\theta'(0)$  随  $\lambda$  的变化。从图中可以看到, 在相同质量吸入参数  $s$  下, 每一个  $\lambda$  对应着1个以上的解。  $\lambda$  存在一特定值  $\lambda_c$ , 当  $\lambda = \lambda_c$  时方程只有唯一解, 当  $\lambda < \lambda_c$  时方程没有解。称  $\lambda_c$  ( $\lambda_c < 0$ ) 为  $\lambda$  的临界值, 这与先前对  $\lambda \rightarrow \infty$  的分析相一致。随着质量吸入参数  $s$  的增大, 解域的范围随着  $\lambda_c$  向左移动。  $x$  和  $y$  方向上的表面摩擦因数  $f''(0), g''(0)$  和表面处的热交换率  $-\theta'(0)$  也随着  $s$  和  $\lambda$  的改变而变化。

对于一个确定的  $s$  参数值来说, 上部解分支 (第1个解) 的  $f''(0)$  和  $g''(0)$  随着  $\lambda$  的减少 (或随着  $|\lambda|$  的增加) 而减少。与此相反, 表面热交换率  $-\theta'(0)$  随着  $\lambda$  的减少而增加。当  $\lambda$  减小到某一个值时,  $f''(0)$  和  $g''(0)$  变为0, 并继续减为负数, 这表明流体中靠近收缩薄膜的速度, 比壁面速度高得多。但是, 对于较小的  $s$  值, 2个解分支上的  $f''(0)$  和  $g''(0)$  都可以为正。对于下部解分支 (第2个解),  $f''(0)$  和  $g''(0)$  随着  $\lambda$  的增加逐渐减少。但是, 当  $\lambda$  值接近于临界点时,  $f''(0)$  和  $g''(0)$  可能会随着  $\lambda$  的减少而稍微增大。另外, 仅当质量吸入参数  $s \geq 2.3$  时, 解才存在。当  $s = 2.3$  时, 解域收缩为一个点, 而当  $s < 2.3$  时, 本问题无解。

对一个确定的  $\lambda$  值来说, 上部解分支 (第1个解) 的  $f''(0), g''(0)$  和  $-\theta'(0)$  随着质量吸

入参数  $s$  的增加而增大;但是,下部解分支(第2个解)的  $f''(0)$ ,  $g''(0)$  和  $-\theta'(0)$  随着质量吸入参数  $s$  的增加而逐渐减小。

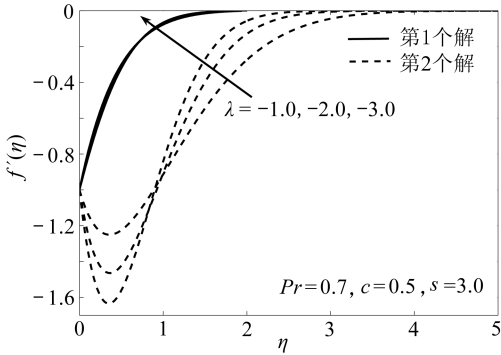


图5 当  $s = 3.0, c = 0.5, Pr = 0.7, \lambda$  取不同值时,  $x$  方向上的速度  $f'(\eta)$  随  $\eta$  的变化

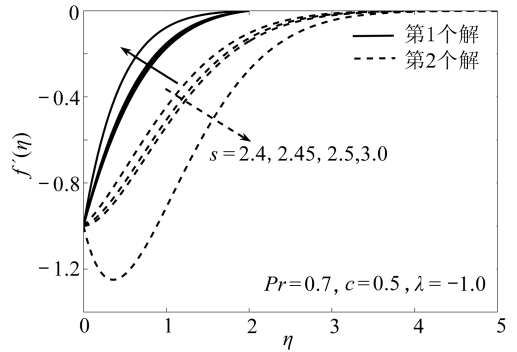


图6 当  $\lambda = -0.1, c = 0.5, Pr = 0.7, s$  取不同值时,  $x$  方向上的速度  $f'(\eta)$  随  $\eta$  的变化

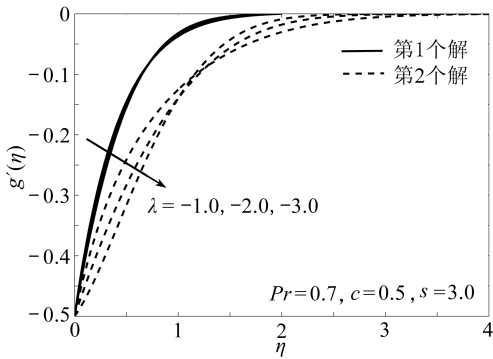


图7 当  $s = 3.0, c = 0.5, Pr = 0.7, \lambda$  取不同值时,  $y$  方向上的速度  $g'(\eta)$  随  $\eta$  的变化

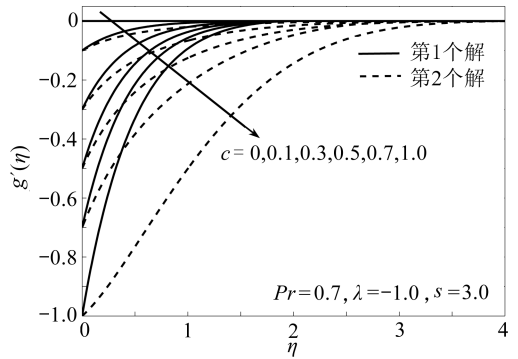


图8 当  $\lambda = -0.1, s = 3.0, Pr = 0.7, c$  取不同值时,  $y$  方向上的速度  $g'(\eta)$  随  $\eta$  的变化

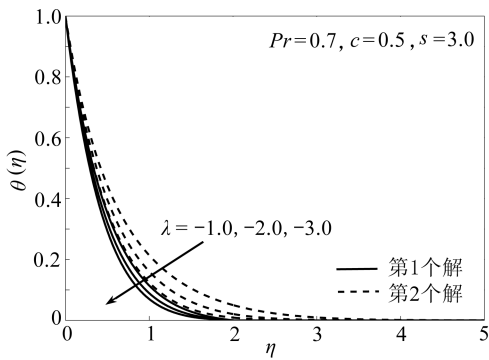


图9 当  $s = 3.0, c = 0.5, Pr = 0.7, \lambda$  取不同值时, 温度  $\theta(\eta)$  随  $\eta$  的变化

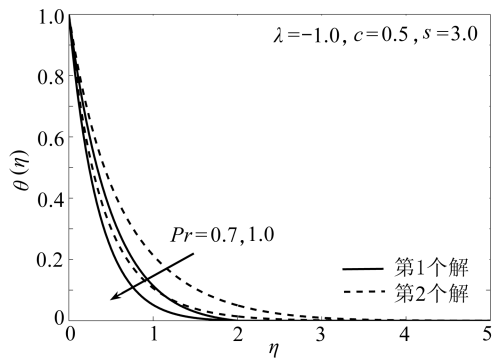


图10 当  $\lambda = -0.1, s = 3.0, c = 0.5, Pr$  取不同值时, 温度  $\theta(\eta)$  随  $\eta$  的变化

图4显示了  $x$  方向表面摩擦因数的变化,反映了参数  $c$  对驻点特性本质的影响.可以发现,随着  $c$  的减少,表面摩擦因数的绝对值是增大的。

图5~6和图7~8分别给出了速度  $f'(\eta)$  和  $g'(\eta)$  的分布,图9和图10给出了相应的温

度分布.可以发现,所有图形均满足边界条件(12),这些图中的速度和温度分布,验证了图1~4中解的有效性.

### 3 总 结

数值求解三维黏性流体,流经可渗透薄膜作连续收缩减速运动时的相似解,显示了不稳定参数 $\lambda$  ( $\lambda < 0$ ),质量吸入参数 $s$ ,收缩参数 $c$ 和Prandtl数 $Pr$ 对液体流动和热传导特性的影响.在参数空间 $(\lambda, s, f''(0))$ ,  $(\lambda, s, g''(0))$ 和 $(\lambda, s, -\theta'(0))$ 中,清楚地表明了解的存在性和多重性(双重解).与不稳定伸展薄膜不同,在质量参数 $s$ 和不稳定参数 $\lambda$ 的某一范围内,可渗透薄膜作连续收缩减速运动时的不稳定流动有双重解.

致谢 作者对推荐人的宝贵建议表示衷心的感谢.

### 参考文献:

- [1] Lin C R, Chen C K. Exact solution of heat transfer from a stretching surface with variable heat flux[J]. *Heat Mass Transfer*, 1998, **33**(5/6):477-480.
- [2] Abraham J P, Sparrow E M. Friction drag resulting from the simultaneous imposed motions of a freestream and its bounding surface[J]. *Int J Heat Fluid Flow*, 2005, **26**(2):289-295.
- [3] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *Z Angew Math Phys*, 1970, **21**(4):645-647.
- [4] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction and blowing [J]. *Can J Chem Eng*, 1977, **55**(6):744-746.
- [5] Chakrabarti A C, Gupta A S. Hydromagnetic flow and heat transfer over a stretching sheet [J]. *Q Appl Math*, 1979, **37**: 73-78 .
- [6] Kuiken H K. On boundary layers in fluid mechanics that decay algebraically along stretches of wall that are not vanishingly small[J]. *IMA J Appl Math*, 1981, **27**(4):387-405.
- [7] Carragher P, Crane L J. Heat transfer on a continuous stretching sheet[J]. *Z Angew Math Mech*, 1982, **62**(10):564-565.
- [8] Banks W H H. Similarity solutions of the boundary layer equations for a stretching wall[J]. *J Mech Theor Appl*, 1983, **2**(3):375-392.
- [9] Magyari E, Keller B. Exact solutions for self-similar boundary-layer flows induced by permeable stretching walls[J]. *Eur J Mech B-Fluids*, 2000, **19**(1):109-122.
- [10] 朱婧, 郑连存, 张志刚. 幂律速度运动表面上磁流体在驻点附近的滑移流动[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(4):411-419.
- [11] Wang C Y. The three-dimensional flow due to a stretching flat surface[J]. *Phys Fluids*, 1984, **27**(8):1915-1917.
- [12] Surma Devi C D, Takhar H S, Nath G. Unsteady three-dimensional boundary-layer due to a stretching surface[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1986, **29**(12):1996-1999.
- [13] Miklavčić M, Wang C Y. Viscous flow due to a shrinking sheet[J]. *Quart Appl Math*, 2006, **64**(4):283-290.
- [14] Wang C Y. Stagnation flow towards a shrinking sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2008, **43**(5):377-382.
- [15] Fang T. Boundary layer flow over a shrinking sheet with power-law velocity[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2008, **51**(25/26):5838-5843.
- [16] Fang T, Liang W, Lee C F. A new solution branch for the Blasius equation a shrinking sheet

- problem[J]. *Comput Math Appl*, 2008, **56**(12):3088-3095.
- [17] Fang T, Zhang J, Yao S S. Viscous flow over an unsteady shrinking sheet with mass transfer [J]. *Chin Phys Lett*, 2009, **26**(1):014703.
- [18] Hayat T, Abbas Z, Sajid M. On the analytic solution of magnetohydrodynamic flow of a second grade fluid over a shrinking sheet[J]. *J Appl Mech-Trans ASME*, 2007, **74**(6):1165-1171.
- [19] Sajid M, Hayat T, Javed T. MHD rotating flow of a viscous fluid over a shrinking surface[J]. *Nonlinear Dyn*, 2008, **51**(1/2):259-265.
- [20] Fang T, Zhang J. Thermal boundary layers over a shrinking sheet: an analytical solution[J]. *Acta Mechanica*, 2010, **209**(3/4):325-343.
- [21] Cebeci T, Bradshaw P. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer* [M]. New York: Springer, 1988.
- [22] Bachok N, Ishak A, Pop I. Mixed convection boundary layer flow near the stagnation point on a vertical surface embedded in a porous medium with anisotropy effect[J]. *Transp Porous Med*, 2010, **82**(2):363-373.
- [23] Bachok N, Ishak A, Pop I. Boundary-layer flow of nanofluids over a moving surface in a flowing fluid[J]. *Int J Thermal Sci*, 2010, **49**(9):1663-1668.
- [24] Ishak A, Nazar R, Pop I. Boundary-layer flow of a micropolar fluid on a continuous moving or fixed surface[J]. *Can J Phys*, 2006, **84**(5):399-410.
- [25] Ishak A, Nazar R, Pop I. MHD boundary-layer flow due to a moving extensible surface[J]. *J Eng Math*, 2008, **62**(1):23-33.

## Unsteady Three-Dimensional Boundary Layer Flow Due to a Permeable Shrinking Sheet

Norfifah Bachok<sup>1</sup>, Anuar Ishak<sup>2</sup>, Ioan Pop<sup>3</sup>

(1. *Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia;*

2. *School of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Technology, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia;*

3. *Faculty of Mathematics, University of Cluj, R-3400 Cluj CP 253, Romania)*

**Abstract:** The unsteady viscous flow over a continuously permeable shrinking surface was studied. Similarity equations were obtained through the application of similarity transformation techniques. Numerical techniques were used to solve the similarity equations for different values of the unsteadiness parameter, the mass suction parameter, the shrinking parameter and Prandtl number on the velocity and temperature profiles as well as the skin friction coefficient and the Nusselt number. Different from an unsteady stretching sheet, it is found that dual solutions exist for a certain range of mass suction and unsteadiness parameters.

**Key words:** unsteady; three-dimensional flow; boundary layer; shrinking sheet; dual solutions