

改进有限单元法动力特性方法的探讨*

江增荣¹, 段鹏飞², 郭杏林³, 丁桦²

- (1. 第二炮兵装备研究院 第二研究所, 北京 100085;
2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080;
3. 大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

(赵亚溥推荐)

摘要: 采样定理告诉人们进行离散逼近离散尺寸的极限是问题中所涉及最高频率波长的 $1/2$ 。 $1/2$ 波长是一理想值,在目前的有限元分析中,通常保证精度的空间离散尺寸远小于这一理想值。文中分析了这一现象的可能原因,同时给出了一种基于有限元的在一定条件下能够改进空间离散效率的动力模拟方法。

关键词: 采样定理; 有限元离散效率; 基于变形修正的宏单元; 频散效应

中图分类号: O242.21;O345;O241.81 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.001

引言

弹性动力学问题的模拟具有广泛的应用背景,而多数的模拟又对计算效率有着较高的要求,如复杂大型系统的长时振动的模拟的瓶颈往往是效率,控制系统中状态变量的模拟需要计算的实时性,等等,在这些问题中求解效率(特别是一个常规时间步的求解效率)是模拟中的关键问题。因此,改善有限元方法的计算效率,长期以来都是计算力学界一直努力的目标:如高阶单元的构造^[1]、高精度时间积分方法^[2-4]、模态叠加法^[5-6]、动态子结构法^[6-8]及基于变形修正的动力减缩方法^[9-11]等,它们都有各自的优点和局限性。但是到目前为止,很少有文献从有限元法本身的局限性来探讨为什么动力学问题的模拟中离散尺寸远小于采样定理的要求,是否有可能改善这一状况。本文希望通过对有限元模拟中有限尺寸下局部惯性力矩的分析来讨论这一问题,同时通过对一种新型宏单元的频散特性分析研究来说明逼近理想采样定理要求的途径。

1 采样定理简介

采样定理是进行数据离散的基本准则之一,它告诉人们在什么样的条件下能够利用离散数据精确地重构原连续函数,其具体表述如下。

* 收稿日期: 2010-07-19; 修订日期: 2010-09-27

作者简介: 江增荣(1979—),男,安徽池州人,助理研究员,博士(E-mail: jazero@163.com);
丁桦(1960—),男,研究员,博士(联系人. E-mail: hdng@imech.ac.cn).

任意连续函数 $f(t)$, 若其频谱 $F(i\omega)$ 为有限带宽, 即存在上限频率 ω_{\max} , 当 $|\omega| \geq \omega_{\max}$ 时 $|F(i\omega)| = 0$, 并以采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$, 或采样长度 (在时间域通常称为周期) $T \leq \pi/\omega_{\max}$ 对函数 $f(t)$ 进行离散采样, 则连续函数 $f(t)$ 完全可以由其采样值 $f(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 按如下重构公式唯一确定:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin[\omega_N(t - nT)]}{\omega_N(t - nT)}, \quad (1)$$

其中 T 为采样长度, $\omega_N = \omega_s/2 = \pi/T$ 称为 Nyquist 频率, 而上述重构公式 (1) 则称为 Shannon 公式. 如果将函数最高频率对应的采样长度 (周期) 记为 $T_{\max} = 2\pi/\omega_{\max}$, 则公式 (1) 成立的条件是 $T \leq T_{\max}/2$, 即采样长度应小于等于 $1/2$ 波长.

采样定理给出了理想情况下完全重构连续函数 $f(t)$ 的采样长度的上限值 $T_{\max}/2$, 但一般情况下离散用的采样长度总是要小于这一理想的上限值, 这是因为通常实际中上限频率是不确定的, 采样序列也不可能是无穷序列.

在传统的有限元 (线性等参单元) 空间离散中, 对于动力学问题, 当采用隐式时间积分时, 空间网格的尺寸一般为 $1/10 \sim 1/5$ 个波长, 当采用显式时间积分时, 空间网格的尺寸一般为 $1/20 \sim 1/10$ 个波长^[12], 这都与采样定理给出的 $1/2$ 波长的理想值相差甚远. 是什么导致了这样的结果, 是否有可能改进, 这就是本文将要探讨的问题.

2 弹性动力学问题有限元离散效率的探讨

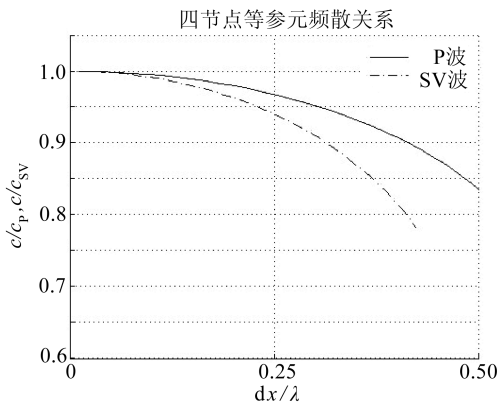
弹性动力学问题的有限元模拟效率取决于其空间和时间的离散方式, 在这里我们着重关注的是空间离散方式.

由于有限元离散中单元形函数的选取一般为多项式的形式, 只能对以多项式形式出现的变形进行准确模拟, 而对其他形式的变形只能通过网格加密来逼近.

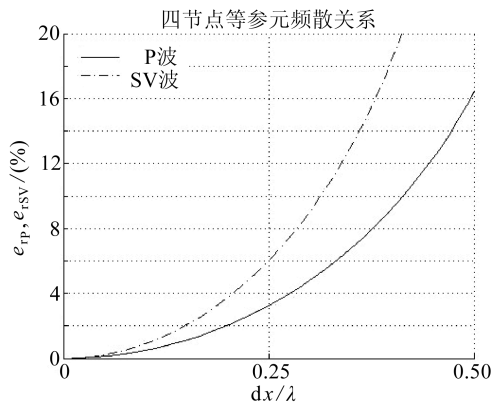
弹性体中波动传播是弹性体弹性变形效应和惯性效应有效的耦合作用, 这种耦合作用的极值体现就是简谐波的传播. 人们可以通过对离散网格中简谐波的传播特征来表述离散的效率. 这种特征就是离散后惯性与变形的极值 (最优) 耦合关系, 即频率与波数间的关系 (给定频率可以通过极值耦合得到波数), 这一关系与连续模型的频率与波数的关系的偏差就刻画了离散的效率, 这种偏差通常称之为离散模型的频散效应. 典型的频散关系图是频率与波数的关系, 为讨论方便我们将其等效地表示为相对波速和相对离散尺寸的关系, 图 1 表示的是平面四节点等参元频散关系^[12-13].

从图 1 中可以看出在 Nyquist 频率 $\omega_N = 0.5\omega_{\max}$ 下 (图中相对离散尺寸 $dx/\lambda = 0.5$ 处, dx 为网格尺寸, λ 为对应谐波波长), 弹性波相速度幅值误差已在 20% 左右. 引起这一误差的主要原因之一应该是简谐波为三角函数的组合 (支集无限大) 而有限元的形函数是具有紧支集的多项式, 这就导致了插值上的误差. 另一方面在惯性效应的模拟上, 通过利用形函数得到的单元尺度的惯性力无法保证单元角动量的有效刻画, 由于平动自由度有方程约束, 转动自由度无方程约束, 角动量 (或单元惯性力力矩) 的误差要远大于平动动量 (或单元平动惯性力) 的误差 (见图 2). 这样总体的效果就是带来了这样的误差.

当人们增加单元节点 (插值点) 数目时, 如采用高阶单元, 会同步改善这些误差. 图 3 是分段多项式形函数单元的局部内力矩图. 这里的分段多项式形函数单元等价于多个等参元拼接



(a) 四节点等参元离散模型中的相速度



(b) 相速度相对误差

图1 四节点等参元离散模型频散关系

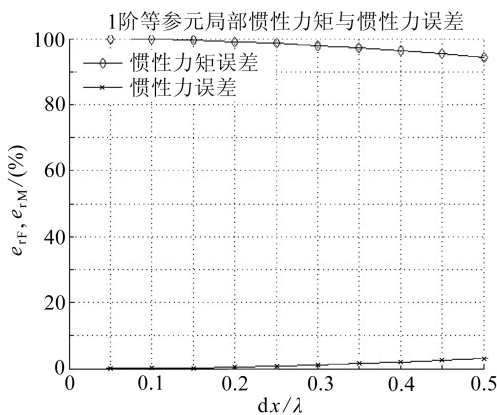


图2 四节点等参元惯性力与惯性力矩的相对误差

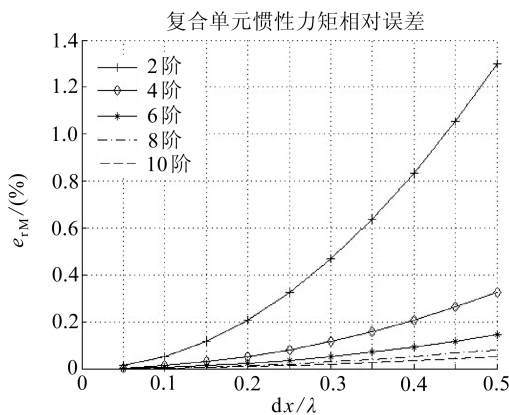


图3 复合单元惯性力矩相对误差

的复合单元(见图4)。

从图3可以看出,当复合单元的尺度与波长比保持不变时,逼近的精度将随复合单元中等参元的数目增加而增加,同时随着等参元数目的增加,复合单元的精确度会逐渐接近采样定理的极限。从复合等参元的构造上看,增加等参元个数相当于利用等参元加密网格,这里相当于偷换了概念:由于网格加密虽然改善了逼近效果,但并没有改善效率,目的只是为了帮助理解。这时的效果是我们在用一种模式同步地改善变形和惯性的逼近效果,我们在这里并不清楚这种模式对变形和惯性哪个的逼近效果更好,同时效果改善的代价是系统规模的增加。

从前面的分析,我们可以得到这样的认识:1) 以多项式为基础的有限元形函数在逼近简谐波引起的变形时,效率是有限的;2) 当利用复合单元(相当于加密网格)时,由于分段逼近,可以较有效地逼近简谐波引起的变形,同时可以同步改善惯性的逼近效果。由此提出了这样的问题:1) 如何寻找更有效的插值方式改变逼近简谐波的效率;2) 如何能够将变形和惯性两种力学效应的逼近解耦,同时寻求两者逼近的最佳匹配,以达到改进求解的动力特征。

本文下面的工作将是利用基于变形修正的宏单元的构造算法^[11]来回答这两个问题。

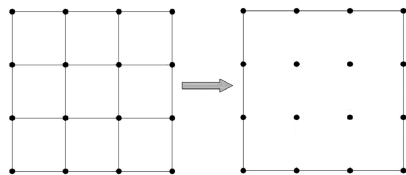


图4 复合单元的构建

3 基于有限元的高效动力分析方法

我们将在控制系统规模的情况下,通过引进单元质点系整体的平动与转动自由度(质心节点自由度)来进行单元整体惯性效应的描述,同时由质心节点自由度和无质量边界节点自由度共同描述单元的变形.这就做到了惯性效应和变形效应描述的半解耦,可以在保持惯性效应描述不变的情况下,通过增加单元无质量边界节点的个数来改善对变形的逼近.应该指出的是,无质量边界节点在进行动力系统求解前可以先行减缩掉,因此系统求解规模只与所有质心节点自由度相关.

3.1 基于变形修正的宏单元构造方法

基于变形修正的动力减缩方法^[10-11]是根据运动同步性假设,将整个有限元区域划分为一个个运动同步性区域,利用已知位移模态(如刚体位移模态)来近似表征运动同步性区域中的位移,在通过变形修正来优化这种位移描述,最终达到系统自由度减缩的目的.

对于宏单元,我们将一个宏单元视为一个运动同步性区域,同时保留原有限元网格所有边界节点,利用由质心平动和转动自由度表征的刚体位移模态和边界位移共同来描述宏单元的位移,再通过变形修正和边界节点位移匹配得到宏单元位移分布的优化表征,同时将惯性效应凝聚在质心自由度上.原有限元网格和宏单元结构示意图见图5(其中实心节点表示有质量节点,而空心节点表示无质量边界节点),应该指出的是单元原则上可以是任意形状的.具体步骤如下(仍然以平面问题为例):

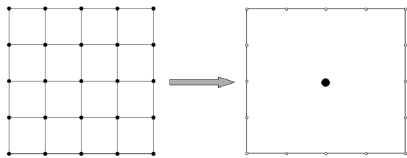


图5 宏单元构造示意图

首先在运动同步性假设前提下对整个宏单元区域引入刚体位移模式:

$$\mathbf{u}_j = \begin{Bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{cj} \\ 0 & 1 & x_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_\phi \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_j \mathbf{q}_m, \quad (2)$$

式中 \mathbf{u}_j 表示宏单元区域内第 j 点的位移向量的近似值, \mathbf{q}_m 表示该区域引入的刚体模态位移向量, \mathbf{R}_j 表示节点 j 的3个刚体模态的叠加矩阵,称为位移变换矩阵, x_{cj}, y_{cj} 表示节点 j 到区域质心的距离.

假设宏单元内部区域有 n 个节点,则区域位移按照节点内部与外部位置关系有

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{i-n} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{q}, \quad (3)$$

下标“i”表示该区域内部节点对应的特征,下标“b”表示该区域边界节点对应的特征. \mathbf{R} 则是区域总体位移变换矩阵, \mathbf{q} 为该区域变换后总的模态位移向量.通过对由公式(3)给出的位移近似关系进行变形修正,即寻找最优的 \mathbf{q} ,使得由公式(3)给出的位移近似值与原有限元网格下有限元位移结果的差引起的该区域的总误差应变能需达最小.由此我们可以得到^[10-11]改进了的宏单元与原有限元网格节点处的近似位移关系:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \left((\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \right)^T \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{q} = \mathbf{T} \mathbf{q}, \quad (4)$$

\mathbf{K} 是该宏单元区域有限元刚度矩阵, \mathbf{T} 代表的是该区域变形修正后的总体位移变换矩阵. 如果按照区域内部节点和边界节点的位置排序, 则位移转换关系可以表示为

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ii} & \mathbf{T}_{ib} \\ \mathbf{T}_{bi} & \mathbf{T}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

通过对公式(5)进行变换, 可以得到宏单元位移向量 $\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}$ 与相应的原有限元节点位移向量

$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}$ 之间的近似转换关系:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

其中
$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ii} - \mathbf{T}_{ib}\mathbf{T}_{bb}^{-1}\mathbf{T}_{bi} & \mathbf{T}_{ib}\mathbf{T}_{bb}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

宏单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_s^e = \mathbf{T}_n^T \mathbf{K} \mathbf{T}_n$, \mathbf{T}_n^T 表示 \mathbf{T}_n 的转置. 根据质心节点和边界节点的位置关系可以表示成

$$\mathbf{K}_s^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{sii}^e & \mathbf{K}_{sib}^e \\ \mathbf{K}_{sbi}^e & \mathbf{K}_{sbb}^e \end{bmatrix}. \quad (7)$$

最后将宏单元的质量都集中于内部质心节点上, 得到宏单元的集中质量模型:

$$\mathbf{M}_s^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sii}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{M}_{sii}^e = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}, \quad (9)$$

这里 m 为该宏单元区域的总质量, J 为该宏单元区域相对与内部质心节点的转动惯量.

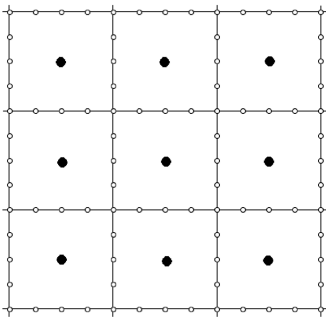


图6 求解区域的宏单元离散模型示意图

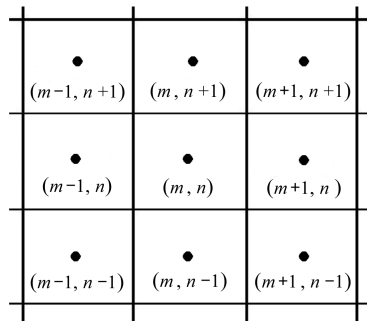


图7 宏单元集中质量离散模型示意图

对于一般的动力学问题, 我们可以利用宏单元对求解区域进行划分(见图6), 而后利用类似有限元单元组装的方式进行组装. 在组装中, 为求解方便, 我们将宏单元质心节点自由度集

中在总体位移向量的上端,宏单元边界节点自由度集中在总体位移向量的下端,这样就有:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s \mathbf{q} = \mathbf{F}_s, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix}$ 为整体位移向量, \mathbf{F}_s 为整体外力向量, 总体刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{sII} & \mathbf{K}_{sIB} \\ \mathbf{K}_{sBI} & \mathbf{K}_{sBB} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

总体质量矩阵为

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sii}^e & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{M}_{sii}^e \end{bmatrix}, \quad (13)$$

下标“*I*”表示系统各区域内部节点对应的特征, 下标“*B*”表示系统各区域边界节点对应的特征.

利用 Guyan 减缩方法^[1], 缩并去无质量节点自由度, 可以得到只保留宏单元质心自由度的整体动力方程:

$$\mathbf{M}_C \ddot{\mathbf{q}}_I + \mathbf{K}_C \mathbf{q}_I = \mathbf{F}_I, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{K}_{sII} - \mathbf{K}_{sIB} \mathbf{K}_{sBB}^{-1} \mathbf{K}_{sBI},$$

可以看到各相邻宏单元间的边界节点对应的特征已被凝聚掉, 如图 7 所示.

应该指出的是, 这里 \mathbf{F}_I 将包含所有已知边界条件的信息, 下面的应用不涉及这点, 这里就不做讨论了. 进一步研究表明: \mathbf{K}_C 是主对角元素占优的方阵, 质心节点 (m, n) 的运动只和距离它较近的质心节点的运动关系密切. 实际计算表明^[14], 当 $|r|, |s| > 2$ 时质心节点 (m, n) 的运动已基本不受质心节点 ($m+r, n+s$) 运动的影响 (矩阵元素数值上相差几个数量级). 而对应质心节点 (m, n) 矩阵元素的值也基本只受相邻两层宏单元刚度矩阵的影响.

3.2 无质量边界节点对频散关系的影响

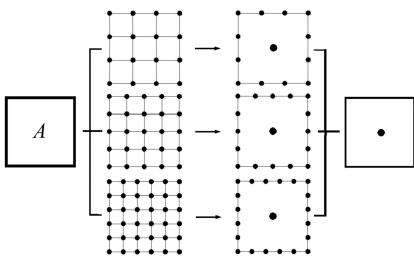


图 8 不同边界节点个数宏单元及归一化质量集中模型示意

采用一致但不同方式的有限元离散方法对指定的宏单元区域进行划分, 可以得到有不同边界节点个数的宏单元. 图 8 列举了宏单元区域 *A* 通过 3 种有限元划分方式, 分别对应得到边界有 12、16 和 20 个节点的宏单元, 而这 3 种宏单元又最终归一到特征相同的集中质量模型.

利用不同网格密度的有限元划分得到不同的宏单元模型, 用这些宏单元模型对计算区域进行离散, 会得到形如公式 (10) 的不同的系统. 但经过对边界节点的凝

聚,我们可以得到同阶的整体动力方程(14).

运动方程(14)的谐波形式解^[12-13]可以表示成

$$\mathbf{q}(m, n) = \mathbf{q}_0 \cdot \exp(i \cdot (\omega \cdot t - k_1 \cdot m \cdot dx - k_2 \cdot n \cdot dy)), \quad (15)$$

其中 \mathbf{q}_0 为已知节点(0,0)的幅值模态位移矢量, i 是虚数单位, ω 为圆频率, $k_1 = k \cdot \cos\theta$ 和 $k_2 = k \cdot \sin\theta$ (k 是波数) 仍称之为波数, θ 为平面波传播的方向角. 当 k 为实数时, 式(16)就代表离散模型中传播的平面波. 质心节点(m, n) 周围节点的模态位移 $\mathbf{q}(m+r, n+s)$ 就能够表示成

$$\mathbf{q}(m+r, n+s) = \mathbf{q}(m, n) \cdot \exp(i \cdot (-k_1 \cdot r \cdot \Delta x - k_2 \cdot s \cdot \Delta y)), \quad (16)$$

通过进一步的推导可以得到^[14]

$$\omega^2 \cdot \mathbf{M}_{(m,n)}^e \cdot \mathbf{q}(m, n) - \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp(i \cdot (-k_1 \cdot r \cdot dx - k_2 \cdot s \cdot dy)) [k_e(m+r, n+s)] \cdot \mathbf{q}(m, n) = 0, \quad (17)$$

即:

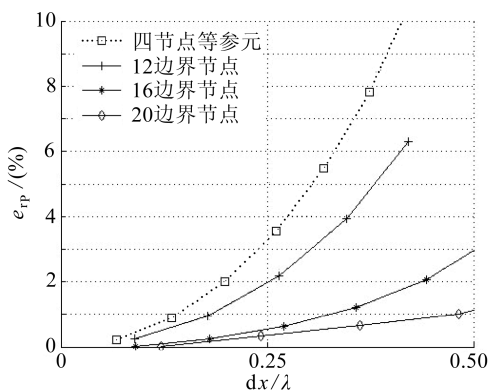
$$[\mathbf{W}_{(m,n)}]_{3 \times 3} \cdot \mathbf{q}(m, n)_{3 \times 1} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad (17a)$$

矩阵 $\mathbf{W}_{(m,n)}$ 中包含圆频率 ω 和波数 k , 式(17)即为质心节点(m, n)的简谐波应满足的方程. 方程(17)有非零解的充要条件是系数行列式为0, 即

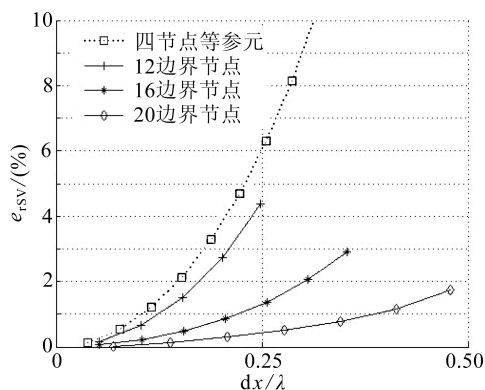
$$\det \mathbf{W}_{(m,n)} = 0, \quad (18)$$

通过方程(18)我们就可以得到对应宏单元的频散关系.

图9给出单元网格尺寸比 $dx/dy = 1$, Poisson 比 $\mu = 0.25$ 时, $\theta = 45^\circ$ 的平面波在不同边界节点个数的宏单元集中质量模型中传播时的相速度误差比较情况. 可以看到无论是 P 波还是 SV 波, 边界节点个数的增加对频散效应有明显改善, 这种改善在中高频段表现得尤为显著.



(a) 宏单元集中质量模型间的 P 波相速度相对误差



(b) 宏单元集中质量模型间的 SV 波相速度相对误差

图9 无质量边界节点对频散关系的影响

考虑到宏单元质量质心集中以后,其边界节点对应的特征在动态分析时间积分之前已被凝聚,所以边界节点个数的多少不会影响系统求解规模.而上述频散结果的比较说明:利用宏单元进行动力学问题分析时,能够在系统求解规模一定的前提下任意提高求解结果的精确度,即拥有高效的动力学特性.

从图9中可以看,当我们将容许精度定在1%时,选取20个边界节点,已接近采样定理的理想值.

4 讨 论

从本文给出的结果可以得出这样的结论:

1) 传统的有限元在波动问题的模拟中对由波动产生的惯性效应中的旋转部分的模拟精度较差.通过加密网格可以同步地改善惯性和变形效应的模拟,但代价是使系统的规模急剧地增加(尤其是对多维问题).

2) 通过引入质心平动和转动自由度构造的质量集中的宏单元模型,有效地模拟了宏单元整体的惯性效应,同时做到了单元惯性效应描述和变形效应描述的半解耦.

3) 利用这一半解耦特性,做到了异步改善惯性和变形效应的模拟效率,可以在形成的最终的动力系统规模不变的情况下,有条件地(至少是采样定理的限制),任意地提高波动问题模拟的精度.

4) 从构造过程看本文介绍的宏单元的构造方法具有广泛的适用性,它是基于有限元的构造方法,对空间维数、形状甚至对同步性位移模态的选取均无特殊的要求,具有很大的灵活性.

本文介绍的结果展示了所提出的方法的潜力,但要使之实用化还有大量的工作需要完成.同时还应该在理论上进一步完善.希望本文能起到抛砖引玉的效果.

致谢 作者衷心感谢广州中国科学院工业技术研究院 CAE 发展基金的资助资助.

参考文献:

- [1] Zienkiewicz O C, Taylor R L. 有限单元方法[M]. 第5版. 庄茁,岑松译. 北京:清华大学出版社,2008.
- [2] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136.
- [3] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法[J]. 计算力学及其应用, 1995, **12**(1): 1-6.
- [4] WANG Meng-fu, Au F T K. Higher-order schemes for time integration dynamic structural analysis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **277** (3): 122-128.
- [5] 赵又群,刘中生. 模态截断与简谐载荷的响应灵敏度分析[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, **13**(3): 313-319.
- [6] 向树红,邱吉宝,王大钧. 模态分析与动态子结构方法新进展[J]. 力学进展, 2004, **34**(3): 289-303.
- [7] 王永岩. 动态子结构方法理论及应用[M]. 北京:科学出版社,1999.
- [8] 楼梦麟. 结构动力分析的子结构方法[M]. 上海:同济大学出版社,1997.
- [9] 刘彬,丁桦,时忠民. 基于柔度修正的局部刚体化结构动力模型简化方法[J]. 工程力学, 2007, **24**(10): 25-29.
- [10] 郑淑飞,丁桦. 基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法[J]. 力学与实践,2008,**30**(6): 31-34.
- [11] 郑淑飞. 基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法及应用[D]. 硕士论文. 北京:中国科学院力学研究所,2009.
- [12] 刘晶波. 波动的有限元模拟及复杂场地对地震动的影响[D]. 博士论文. 北京:国家地震局工程力学研究所,1990.

- [13] LIU Jing-bo, LIAO Zhen-peng. In-plane wave motion in finite element model[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, **8**(1):80-87.
- [14] 段鹏飞. 基于变形修正宏单元算法的频散特性研究[D]. 硕士学位论文. 北京:中国科学院力学研究所,2010.

Method of Improving FEM Dynamic Property

JIANG Zeng-rong¹, DUAN Peng-fei², GUO Xing-lin³, DING Hua²

(1. *The Second Research Department, Equipment Research Institute of PLA's
Second Artillery Corps, Beijing 100085, P. R. China;*

2. *Institution of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, P. R. China;*

3. *Departement of Engineering Mechanics Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P. R. China)*

Abstract: The discretization size is limited by the sampling theorem, the limit is $1/2$ of the wavelength of highest frequency of the problem. The $1/2$ of the wavelength is an ideal value, in general, the discretization size which could ensure the accuracy of the simulation is much smaller than this value in the traditional finite element method. The possible reason of the phenomena was analyzed. An efficient method was given to improve the accuracy of the simulation.

Key words: sampling theorem; the efficiency of finite element discretization; macroelement based on deformation modification; dispersion relation