

# 具有强非线性状态方程的机械零部件 可靠性灵敏度分析方法\*

张义民, 朱丽莎, 王新刚

(东北大学 机械工程与自动化学院,沈阳 110819)

(陈立群推荐)

**摘要:** 基于可靠性灵敏度设计的随机摄动技术,结合可靠性分析的矩方法、矩阵微分理论和 Kronecker 代数的相关理论,讨论了实际中存在着高度非线性极限状态方程结构的可靠性灵敏度问题。在已知随机变量前 4 阶矩的前提下,对基于摄动法的可靠性灵敏度计算方法进行了修正,提出了具有高度非线性结构的可靠性灵敏度计算方法,并结合实例证明了采用此方法大大提高了可靠性灵敏度的计算精度,并为工程实际提供了更加可信的理论依据。

**关键词:** 可靠度; 灵敏度; 非线性; 摄动法; 矩方法

**中图分类号:** O213.2;TH123 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.013

## 符号说明

$X$	基本随机变量向量	$n$	向量 $X$ 的参数个数
$X_d$	随机变量中的确定部分	$X_p$	随机变量中的随机部分
$\varepsilon$	微小量	$g(X)$	极限状态方程
$g_d(X)$	极限状态方程中的确定部分	$g_p(X)$	极限状态方程中的随机部分
$E(X)$	基本随机变量向量 $X$ 的均值矩阵	$\text{var}(X)$	基本随机变量向量 $X$ 的方差矩阵
$C3(X)$	基本随机变量向量 $X$ 的 3 阶矩矩阵	$C4(X)$	基本随机变量向量 $X$ 的 4 阶矩矩阵
$\mu_g$	极限状态方程 $g(X)$ 的均值	$\sigma_g^2$	极限状态方程 $g(X)$ 的方差
$\theta_g$	极限状态方程 $g(X)$ 的 3 阶矩	$\eta_g$	极限状态方程 $g(X)$ 的 4 阶矩
$\beta$	可靠性指标	$\Phi(\cdot)$	标准正态分布
$\varphi(\cdot)$	标准正态分布的概率密度函数	$H_i(y)$	Hermite 多项式

\* 收稿日期: 2010-02-16; 修订日期: 2010-07-23

**基金项目:** “高档数控机床与基础制造装备”科技重大专项课题(2010ZX04014-014);国家自然科学基金项目(50875039);长江学者和创新团队发展计划

**作者简介:** 张义民(1958—),男,河北衡水人,东北大学长江学者、特聘教授,博士生导师(联系人, E-mail: neu863ktz@yahoo.cn).

$\frac{dR(\beta)}{d\bar{X}^T}$	可靠度对基本随机变量的均值的灵敏度	$\frac{dR(\beta)}{d \text{var}(\bar{X})}$	可靠度对基本随机变量的方差的灵敏度
$R(\beta)$	可靠度	$I_n$	$n \times n$ 维单位矩阵
$U_{n \times n}$	置换矩阵	$Q$	施加在拉杆上的载荷
$d_0$	管状截面的内径	$d_1$	管状截面的外径
$r$	拉杆的材料强度	$l$	最大动应力处的轴段长度
$E$	轴段弹性模量	$\omega$	转子系统转速
$u$	转子系统不平衡量	$\rho$	相关系数
PRSM 法	基于摄动法的可靠性灵敏度方法	PRSM 法	基于摄动法的可靠性灵敏度的修正方法
CDM 法	中心差分法	MCS 法	Monte Carlo 法

## 引 言

可靠性灵敏度设计是在进行随机结构的可靠性分析的基础上发展起来的,是可靠性设计中的重要环节,可以充分揭示各设计参数对结构系统可靠性(或失效)的不同影响程度,为结构可靠性稳健优化设计<sup>[1-3]</sup>提供了必要的理论基础.近些年来,国内外学者在可靠性灵敏度计算方法方面已经取得了较大的进展,包括基于有限差分法的可靠性灵敏度计算方法<sup>[4-6]</sup>,基于一次二阶矩或高阶矩的可靠性灵敏度计算方法<sup>[7-9]</sup>,基于摄动理论的可靠性灵敏度计算方法<sup>[10-14]</sup>,基于 Monte Carlo 重要抽样的可靠性灵敏度分析方法<sup>[15-17]</sup>,基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法<sup>[18-20]</sup>等.其中,基于摄动理论的可靠性灵敏度计算方法是一种点估计方法,在求解时不需要进行迭代和搜索,能够很好地处理多模式和多设计点的系统可靠性问题,因此此方法在工程实际应用中非常广泛.然而此方法对高度非线性的结构系统的精度还有待于进一步的提高.

本文正是针对工程实际中结构存在着高度非线性的极限状态方程的问题,结合矩阵微分理论、随机摄动技术、可靠性理论和可靠性灵敏度理论,对基于摄动法的可靠性灵敏度计算方法进行了修正,给出了计算方法的数学表达式,并结合实例证明采用修正公式大大提高了此方法的计算精度,拓展了此计算方法的应用领域.

## 1 可靠性灵敏度理论

基本随机变量组成的向量  $\mathbf{X}$  和极限状态方程  $g(\mathbf{X})$  表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_d + \varepsilon \mathbf{X}_p, \quad (1)$$

$$g(\mathbf{X}) = g_d(\mathbf{X}) + \varepsilon g_p(\mathbf{X}), \quad (2)$$

式中,  $\varepsilon$  是一个微小量,下标 d 表示随机变量中的确定部分,下标 p 表示随机变量中的随机部分.显然式中的随机部分要比确定部分小得多,对式(1)和式(2)的两边分别取数学期望,得

$$E(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{X}} = E(\mathbf{X}_d) + \varepsilon E(\mathbf{X}_p) = \mathbf{X}_d, \quad (3)$$

$$\mu_g = E[g(\mathbf{X})] = \bar{g}(\mathbf{X}) = E[g_d(\mathbf{X})] + \varepsilon E[g_p(\mathbf{X})] = g_d(\mathbf{X}). \quad (4)$$

同理,由摄动理论和 Taylor 级数展开定理可知,极限状态函数  $g(\mathbf{X})$  的方差、3 阶矩、4 阶矩可以表示为基本随机变量  $\mathbf{X}$  的相对应的各阶矩的函数:

$$\sigma_g^2 = \text{var}[g(\mathbf{X})] = \varepsilon^2 \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right)^{[2]} \mathbf{X}_p^{[2]} \right] = \left( \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right)^{[2]} \text{var}(\mathbf{X}), \quad (5)$$

$$\theta_g = \text{C3}[g(\mathbf{X})] = \varepsilon^3 \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right)^{[3]} \mathbf{X}_p^{[3]} \right] = \left( \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right)^{[3]} \text{C3}(\mathbf{X}), \quad (6)$$

$$\eta_g = \text{C4}[g(\mathbf{X})] = \varepsilon^4 \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right)^{[4]} \mathbf{X}_p^{[4]} \right] = \left( \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right)^{[4]} \text{C4}(\mathbf{X}), \quad (7)$$

式中,  $\text{var}(\mathbf{X})$  为各个随机变量方差和协方差组成的方差矩阵,  $\text{C3}(\mathbf{X})$  和  $\text{C4}(\mathbf{X})$  为各个随机变量的 3 阶中心矩和 4 阶中心矩组成的 3 阶矩阵和 4 阶矩阵.  $\sigma_g^2, \theta_g$  和  $\eta_g$  分别为极限状态方程  $g(\mathbf{X})$  的方差、3 阶矩和 4 阶矩. Kronecker 幂的形式为  $(\cdot)^{[k]} = (\cdot)^{[k-1]} \otimes (\cdot) = (\cdot) \otimes (\cdot) \cdots \otimes (\cdot)$ , 其中符号  $\otimes$  表示 Kronecker 积, 定义  $(\mathbf{A})_{p \times q} \otimes (\mathbf{B})_{s \times t} = [a_{ij} \mathbf{B}]_{ps \times qt}$ .

$\partial g_d(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}^T$  为状态函数的灵敏度矩阵, 表示为

$$\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{X}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial X_1} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{g}}{\partial X_n} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中  $n$  为基本随机变量的个数.

可靠性指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\mathbf{E}[g(\mathbf{X})]}{\sqrt{\text{var}[g(\mathbf{X})]}}. \quad (9)$$

根据 Edgeworth 级数方法, 对标准化了的任意分布的函数可以近似地表示为标准正态分布的函数, 得到

$$F(y) = \Phi(y) - \varphi(y) \left[ \frac{1}{6} \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \text{H}_2(y) + \frac{1}{24} \left( \frac{\eta_g}{\sigma_g^4} - 3 \right) \text{H}_3(y) + \frac{1}{72} \left( \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \right)^2 \text{H}_5(y) + \cdots \right], \quad (10)$$

式中,  $\varphi(\cdot)$  为标准正态分布的概率密度函数,  $\text{H}_i(y)$  为 Hermite 多项式, 表示为

$$\begin{cases} \text{H}_{j+1}(y) = y \text{H}_j(y) - j \text{H}_{j-1}(y), \\ \text{H}_0(y) = 1, \text{H}_1(y) = y. \end{cases} \quad (11)$$

因此, 可靠度  $R$  定义为

$$R(\beta) = P(g(\mathbf{X}) \geq 0) = 1 - F(-\beta). \quad (12)$$

根据矩阵微分方法和相关摄动理论, 可靠度对基本随机变量均值和方差的灵敏度表示为

$$\frac{dR(\beta)}{d\bar{\mathbf{X}}^T} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T}, \quad (13)$$

$$\frac{dR(\beta)}{d \text{var}(\mathbf{X})} = \left[ \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} \right] \frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{var}(\mathbf{X})}, \quad (14)$$

式中,  $d(\cdot) / d\bar{\mathbf{X}}^T$  为  $(\cdot)$  对基本随机变量  $\mathbf{X}$  均值的灵敏度,  $d(\cdot) / d \text{var}(\mathbf{X})$  为  $(\cdot)$  对基本随机变量  $\mathbf{X}$  方差的灵敏度.

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} = \varphi(-\beta) \left\{ 1 - \beta \left[ \frac{1}{6} \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \text{H}_2(-\beta) + \frac{1}{24} \left( \frac{\eta_g}{\sigma_g^4} - 3 \right) \text{H}_3(-\beta) + \right. \right.$$

$$\frac{1}{72} \left( \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \right)^2 H_3(-\beta) \Big] - \left[ \frac{1}{3} \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} H_1(-\beta) + \frac{1}{8} \left( \frac{\eta_g}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_2(-\beta) + \frac{5}{72} \left( \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \right)^2 H_4(-\beta) \right] \Big\}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} = \frac{1}{\sigma_g}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} = -\frac{\mu_g}{\sigma_g^2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} = \varphi(-\beta) \left[ \frac{1}{2} \frac{\theta_g}{\sigma_g^4} H_2(-\beta) + \frac{1}{6} \frac{\eta_g}{\sigma_g^5} H_3(-\beta) + \frac{1}{12} \frac{\theta_g^2}{\sigma_g^7} H_5(-\beta) \right], \quad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{var}(\mathbf{X})} = \frac{1}{2\sigma_g} \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{X}} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{X}} \right], \quad (19)$$

式中  $\varphi(\cdot)$  为正态分布的概率密度函数,代入已知条件,得到可靠度对基本随机变量的灵敏度后,就可以根据基本随机变量对可靠度的影响程度来判断其是否为影响系统可靠度的重要参数。

## 2 灵敏度公式的修正

通过本文研究发现,具有强非线性特征方程时,以上方法的计算结果有时会导致可靠性灵敏度的正负号发生变化;再者特征方程的非线性越明显时,可靠性灵敏度计算结果的误差越大。

因此,为了提高可靠性灵敏度的计算精确度,本文根据矩阵微分方法和 Kronecker 代数理论,对以前的公式进行了修正。由式(5)可知,当极限状态方程  $g(\mathbf{X})$  具有非线性时, $g(\mathbf{X})$  对基本随机变量  $\mathbf{X}$  的均值  $\bar{\mathbf{X}}^T$  的导数为  $\mathbf{X}$  均值的高次函数,则极限状态方程的方差  $\sigma_g$  亦是基本随机变量  $\mathbf{X}$  均值的高次函数,即  $\sigma_g$  对  $\bar{\mathbf{X}}^T$  的导数不为 0,因此在计算可靠度对基本随机变量均值的灵敏度时需要进行修正,表示为

$$\frac{dR}{d(\bar{\mathbf{X}})^T} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial (\bar{\mathbf{X}})^T} + \left[ \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} \right] \frac{\partial \sigma_g}{\partial (\bar{\mathbf{X}})^T}. \quad (20)$$

若状态方程的非线性愈强,则状态方程  $g_d(\mathbf{X})$  对  $\mathbf{X}$  的导数  $\partial g_d(\mathbf{X})/\partial \mathbf{X}^T$  的非线性愈强,方差  $\sigma_g$  对基本随机变量  $\mathbf{X}$  的均值  $\bar{\mathbf{X}}^T$  的导数  $\partial \sigma_g/\partial (\bar{\mathbf{X}})^T$  的非线性亦愈强。因此可以证明,非线性的强弱与该导数是相关的,状态方程的非线性愈强,则方差  $\sigma_g$  对基本随机变量  $\mathbf{X}$  的均值  $\bar{\mathbf{X}}^T$  的导数的非线性亦愈强。

因为极限状态函数的均值  $\mu_g$  和随机变量的方差  $\text{var}(\mathbf{X})$  之间不存在关系,因此在计算可靠度对基本随机变量方差的灵敏度时不需要修正,表示与式(14)相同,为

$$\frac{dR}{d \text{var}(\mathbf{X})} = \left[ \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} \right] \frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{var}(\mathbf{X})}, \quad (21)$$

其中,式(20)和(21)的部分表达式已经在式(15)~(19)中列出。其他的表达式将在下面列出。

通过式(13)和式(20)对比,一个新增项用来修正以前的公式,根据 Kronecker 积的相关代

数理论<sup>[21]</sup>,将式(5)的两侧在均值处对  $\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  分别求导得

$$2\sigma_g \times \frac{\partial \sigma_g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} = \partial \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \otimes \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \right) \text{var}(\mathbf{X}) \right] / \partial \bar{\mathbf{X}}^T =$$

$$\left[ \partial \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \right) / \partial \mathbf{X}^T \right] (\mathbf{I}_n \otimes \text{var}(\mathbf{X})) + \left[ \mathbf{I}_1 \otimes \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \right) \right] \frac{\partial \text{var}(\mathbf{X})}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T}, \quad (22)$$

式中,  $n$  为矩阵  $\mathbf{X}^T$  的列数,  $1$  为矩阵  $\mathbf{X}^T$  的行数, 很显然,  $\mathbf{X}^T$  为行向量。

因为基本随机变量的方差与其均值无关, 得

$$\frac{\partial \text{var}(\mathbf{X})}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} = 0. \quad (23)$$

将式(23)代入式(22), 式(22)可以简化为

$$2\sigma_g \times \frac{\partial \sigma_g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} = \left[ \partial \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \right) / \partial \mathbf{X}^T \right] (\mathbf{I}_n \otimes \text{var}(\mathbf{X})). \quad (24)$$

式(24)的最终形式整理为

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} = \frac{1}{2\sigma_g} \left[ \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial (\mathbf{X}^T)^2} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} + \left( \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial (\mathbf{X}^T)^2} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} \right) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{U}_{n \times n}) \right] (\mathbf{I}_n \otimes \text{var}(\mathbf{X})), \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{I}_n$  为  $n \times n$  维单位矩阵,  $\mathbf{U}_{n \times n}$  为置换矩阵, 其维数为  $n^2 \times n^2$  并且每行和每列只有一个元素“1”。

将式(15)~(19)、(25)代入方程(20)和(21)就可以得到可靠性灵敏度的数值结果。

## 3 算 例

### 3.1 具有线性状态方程的拉杆的可靠性灵敏度设计

为了证明以前方法可以准确快速地对具有线性与弱非线性状态方程的结构进行可靠性灵敏度设计, 以拉杆为研究对象, 拉杆是可以承受拉力和压力的零件, 根据它的截面形状可以分为圆形、管状等(如图1所示)。

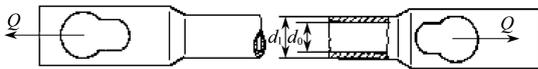


图1 拉杆结构图

拉杆的拉应力定义为

$$\sigma = \frac{4Q}{\pi(d_1^2 - d_0^2)}, \quad (26)$$

式中,  $Q$  为拉杆承受的载荷,  $d_0$  为管状弹簧的内径,  $d_1$  为管状弹簧的外径。

根据应力-强度干涉定理, 拉杆的极限状态方程定义为

$$g(\mathbf{X}) = r - \sigma, \quad (27)$$

式中,  $r$  为拉杆的材料强度. 基本随机变量向量  $\mathbf{X}$  表示为  $\mathbf{X} = (r \quad Q \quad d_1 \quad d_0)^T$ . 并且均值矩阵  $E(\mathbf{X})$ , 方差矩阵  $\text{var}(\mathbf{X})$ , 3 阶矩矩阵  $C3(\mathbf{X})$ , 4 阶矩矩阵  $C4(\mathbf{X})$  是已知的。

汽车中的转向拉杆既承受拉力又承受压力, 其中, 内径  $d_0$  为  $(\mu_{d_0}, \sigma_{d_0}) = (15, 0.075)$  mm, 外径  $d_1$  为  $(\mu_{d_1}, \sigma_{d_1}) = (25, 0.125)$  mm, 均服从正态分布. 随机变量载荷  $Q$  服从任意分布, 前4阶矩为

$$(Q) = (1.1 \times 10^5 \text{ N}, 7.398 \times 10^2 \text{ N}, 8.187 \ 33 \times 10^6 \text{ N}^3, 8.983 \ 88 \times 10^{11} \text{ N}^4).$$

材料强度  $r$  为  $(\mu_r, \sigma_r) = (378, 10)$  MPa, 服从正态分布. 内外径的相关系数为  $\rho = 0.1$ .

通过计算机程序计算, 得到拉杆的可靠性指标, 可靠度为

$$\beta = 2.3784, R_E = 0.999103, R_{MCS} = 0.990925,$$

其中,  $R_E$  为采用 Edgeworth 级数方法得到的可靠度,  $R_{MCS}$  为采用 Monte Carlo 模拟得到的拉杆可靠度, MCS 的抽样次数为  $N = 10^6$ .

公式(24)的具体数值为

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T} = [0, 0.245684E-4, -0.636274, 0.456830]. \quad (28)$$

由极限状态方程(27)和式(28)可得到如下结论: 极限状态方程关于某随机变量的次数愈高, 则该导数结果的绝对值愈大, 例如, 极限状态方程是关于随机变量  $r$  的一次函数, 则式(28)中关于  $r$  的结果为 0; 极限状态方程是关于随机变量  $d_0$  的二次函数, 则式(28)中关于  $d_0$  的结果为 0.456830; 虽然极限状态方程是关于随机变量  $Q$  的一次函数, 但是  $Q$  与  $d_0$  和  $d_1$  有函数关系, 因此式(28)中关于  $Q$  的结果为 0.245684E-4, 而且其值要比  $d_0$  和  $d_1$  小得多.

现采用基于摄动法的可靠性灵敏度计算方法 (PRSM)、基于摄动法的可靠性灵敏度的修正方法 (PRSM)、基于中心差分法 (CDM) 和 Monte Carlo 法 (MCS) 4 种方法来计算可靠度对基本随机变量均值处的可靠性灵敏度, 得到的 4 种计算结果如表 1 所示.

通过计算可知, 因为极限状态方程的形式比较简单, 采用 PRSM 方法和 PRSM 方法都可以比较准确地计算可靠性灵敏度, 都可以正确地反映出系统可靠度的变化趋势及系统参数对可靠度的影响程度排序. 通过表 1 的对比分析可以看出, 两种方法均存在误差, PRSM 方法更接近 CDM 方法, PRSM 方法更接近 MCS 方法, 但是误差在允许的范围内. 因此, 对于线性或弱非线性系统, 可以采用 PRSM 方法和 PRSM 方法的任意一种计算可靠性灵敏度.

表 1 4 种方法的计算结果对比

参数	可靠性灵敏度			
	PRSM 法	PRSM 法	CDM 法	MCS 法
$r$	+0.190179E-2	+0.190179E-2	+0.190179E-2	+0.2064E-2
$Q$	-0.605357E-5	-0.625555E-5	-0.610663E-5	-0.6740E-5
$d_1$	+0.832366E-1	+0.884675E-1	+0.845377E-1	+0.9077E-1
$d_0$	-0.499420E-1	-0.536976E-1	-0.508736E-1	-0.3975E-1

### 3.2 具有强非线性状态方程的转子系统的可靠性灵敏度设计

图 2 为一复杂的刚柔混合转子系统模型, 通过有限元建模并进行了动力学分析, 以柔性轴为研究对象, 得到了影响可靠性的最重要的 4 个参数作为基本随机变量.

根据状态函数定义, 非线性转子系统动态应力可靠性分析的首次超限破坏问题定义为

$$g(r, s) = r - s, \quad (29)$$

$$s = \sigma_{\max}(t), \quad (30)$$

式中,  $r$  为材料的屈服极限 600 MPa,  $s$  为系统受到的最大瞬态应力,  $\sigma(t)$  为转子系统受到的动应力. 在这里没有考虑强度退化, 因此认为响应  $s$  与门槛值  $r$  是相互独立的.

通过随机有限元软件分析, 并进行了神经网络的拟合, 得到转轴的最大瞬态应力为

$$\sigma_{\max}(t) = 607.7823 + 27.838968 / (1 + \exp(551.01091 - 10.595358 \times l + 0.13699415E - 2 \times E + 0.82539623E - 1 \times \omega - 0.14552386E - 4 \times u)) -$$

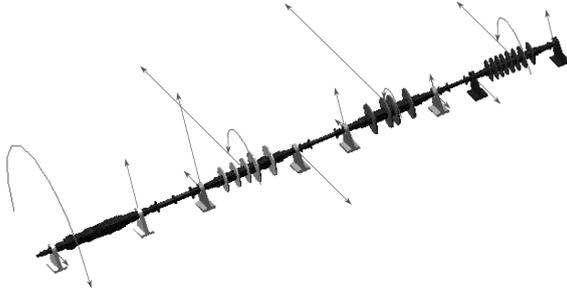


图2 转子系统的动力学模型

$$\begin{aligned}
 & 50.020908 / (1 + \exp(754.10134 - 5.8024418 \times l + \\
 & 0.61089737E - 4 \times E - 0.58010301 \times \omega - 0.12004108E - 4 \times u)) - \\
 & 22.720238 / (1 + \exp(994.96917 - 8.0490436 \times l + 0.26611013E - 3 \times \\
 & E - 0.38809923 \times \omega - 0.33946898E - 4 \times u)) - \\
 & 20.619301 / (1 + \exp(-124.64.861 + 18.740081 \times l + 0.18158665E - 1 \times \\
 & E + 19.455678 \times \omega - 0.98295210E - 4 \times u)) - \\
 & 11.869729 / (1 + \exp(251.8.0715 + 9.9924494 \times l - 0.97723241E - 2 \times \\
 & E - 7.3816375 \times \omega + 0.20188775E - 3 \times u)) - \\
 & 3.2228136 / (1 + \exp(-1294.3764 + 26.816824 \times l + 0.64882738E - 2 \times \\
 & E - 15.295304 \times \omega + 0.47276604E - 3 \times u)) + \\
 & 32.598691 / (1 + \exp(1683.2625 - 8.3454093 \times l - 0.16561301E - 2 \times \\
 & E - 1.9532089 \times \omega + 0.81315958E - 5 \times u)) - \\
 & 12.229349 / (1 + \exp(-1061.0380 + 12.387346 \times l - 0.47732826E - 2 \times \\
 & E - 1.5290504 \times \omega + 0.18919033E - 3 \times u)) + \\
 & 344.11278 / (1 + \exp(-1623.9902 - 8.3628946 \times l + 0.67612671E - 2 \times \\
 & E + 0.53592550 \times \omega + 0.53384951E - 4 \times u)) - \\
 & 349.94426 / (1 + \exp(-1320.0857 - 7.3296887 \times l + 0.48184237E - 2 \times \\
 & E + 0.27182323 \times \omega + 0.68192526E - 4 \times u)) + \\
 & 200.51799 / (1 + \exp(4688.5419 - 10.833131 \times l - 0.20041522E - 1 \times \\
 & E - 1.5359378 \times \omega + 0.96336502E - 4 \times u)), \tag{31}
 \end{aligned}$$

式中,  $l$  为受动应力最大处的轴段的长度,  $E$  为轴段的弹性模量,  $\omega$  为转子系统的转速,  $u$  为不平衡量。

在工程实际中,很难具有足够的信息来确定基本随机变量和极限状态方程的概率密度函数或联合概率密度函数,但是通过对数据的统计分析,可以确定基本随机变量的前4阶矩,即均值、方差、3阶矩、4阶矩。本例中,基本随机变量向量  $\mathbf{X}$  定义为  $\mathbf{X} = (l, E, \omega, u)^T$ , 其前4阶矩  $E(\mathbf{X})$ ,  $\text{var}(\mathbf{X})$ ,  $C3(\mathbf{X})$ ,  $C4(\mathbf{X})$  均已知。轴段的长度  $l$  为  $(\mu_l, \sigma_l) = (68, 0.34)$  mm, 弹性模量  $E$  为  $(\mu_E, \sigma_E) = (2.1 \times 10^5, 1050)$  MPa, 转速  $\omega$  为  $(\mu_\omega, \sigma_\omega) = (432, 2.16)$  rad/s, 均服从正态分布。不平衡量  $u$  服从任意分布,其前4阶矩是已知的,为  $(u) = (1 \times 10^7(\text{N}\cdot\text{m}), 4.9857 \times 10^4(\text{N}\cdot\text{m}), 1.85890 \times 10^{12}(\text{N}\cdot\text{m})^3, 1.85296 \times 10^{19}(\text{N}\cdot\text{m})^4)$ 。每个变量都是相关的,相关系数为  $\rho = 0.5$ 。

通过本文方法得到的可靠度为

$$R_E = 0.967\ 305\ 86, R_{MCS} = 0.967\ 203,$$

其中,  $R_E$  为通过 Edgeworth 级数得到的可靠度,  $R_{MCS}$  为 Monte Carlo 模拟得到的可靠度, 抽样次数为  $N = 10^6$ .

公式(24)的具体数值为

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \bar{X}^T} = [55.298\ 9, 0.212\ 674E - 3, 5.903\ 83, 0.884\ 214E - 4]. \quad (32)$$

由式(32)可以看出, PRSMM 方法对系统参数  $l$  和  $\omega$  的灵敏度修正较大, 说明系统对这两个参数的非线性较大, PRSMM 方法对系统参数  $E$  和  $u$  的修正较小, 说明系统对这两个参数的非线性较小.

可靠度随基本随机变量均值的可靠性变化曲线, 如图 3 至 6 所示.

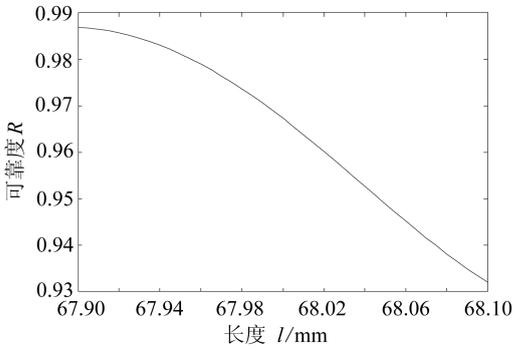


图 3 可靠度  $R$  对  $l$  的均值的变化曲线

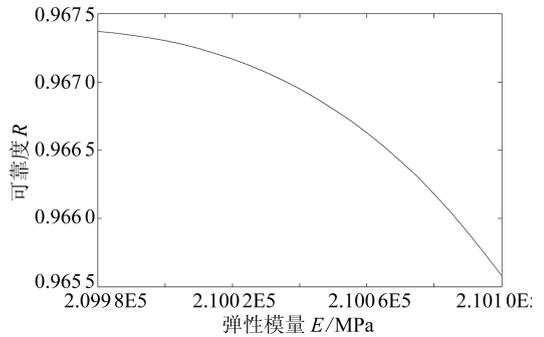


图 4 可靠度  $R$  对  $E$  的均值的变化曲线

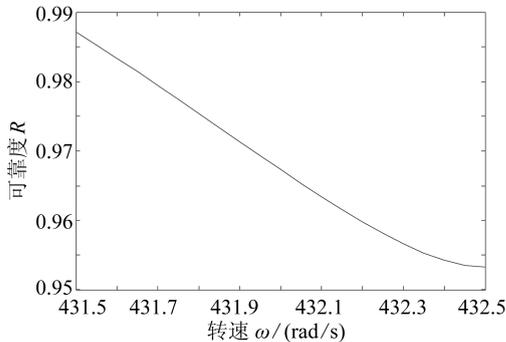


图 5 可靠度  $R$  对  $\omega$  的均值的变化曲线

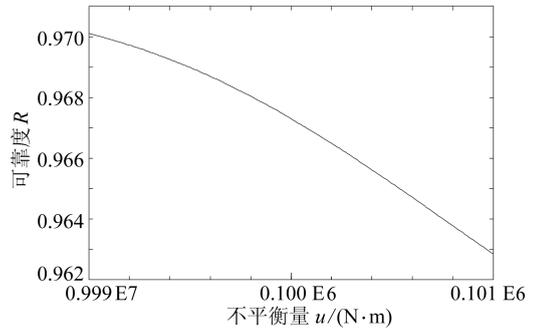


图 6 可靠度  $R$  对  $u$  的均值的变化曲线

通过图 3 至图 6 的变化趋势可知, 可靠度随基本随机变量  $l, E, \omega, u$  的增大而减小, 即可靠度对基本随机变量的灵敏度值均为负值.

但是, 采用 PRSM 方法计算得到的可靠度对基本随机变量的可靠性灵敏度结果如下:

$$\frac{dR}{d\bar{X}^T} = \begin{bmatrix} \partial R / \partial \mu_l \\ \partial R / \partial \mu_E \\ \partial R / \partial \mu_\omega \\ \partial R / \partial \mu_u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} +0.237\ 821 \\ -0.309\ 902E - 5 \\ +0.217\ 994E - 1 \\ +0.536\ 698E - 6 \end{bmatrix}^T. \quad (33)$$

上述结果中的符号为+, -, +, +, 说明可靠度随着  $l, \omega, u$  的增大而增大, 随着  $E$  的增大而减

小,这不但和中心差分法不同,和实际情况也相违背。可靠性灵敏度的正负号反映了基本随机变量的变化对可靠度的影响趋势,如果符号为正,说明结构随基本随机变量的增大趋于安全,相反,则趋于失效。因此,正负号为判断可靠度趋势的关键,很显然,采用 PRSM 方法在计算此例时给出了错误的结论。因此,PRSM 方法是不适合用来计算具有强非线性极限状态方程的结构。

采用 PRSM 方法,计算得到的可靠度对基本随机变量均值的灵敏度结果为

$$\frac{dR}{d\bar{X}^T} = \begin{bmatrix} \partial R / \partial \mu_l \\ \partial R / \partial \mu_E \\ \partial R / \partial \mu_\omega \\ \partial R / \partial \mu_u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.346432 \\ -0.534599E-5 \\ -0.405768E-1 \\ -0.397507E-6 \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

表 2 4 种方法的计算结果对比

参数	可靠性灵敏度			
	PRSM 法	PRSM 法	CDM 法	MCS 法
$l$	+0.237821	-0.346432	-0.339154	-0.1004
$E$	-0.309902E-5	-0.534599E-5	-0.494048E-5	-0.5867E-4
$\omega$	+0.217994E-1	-0.405768E-1	-0.397476E-1	-0.1709E-1
$u$	+0.536698E-6	-0.397507E-6	-0.388382E-6	-0.8072E-6

采用 PRSM 方法得到的结果与实际情况和中心差分法的趋势均一致,本文还和 MCS 方法进行了对比,4 种方法的计算结果对比如表 2 所示。由表可知,PRSM 方法、CDM 法和 MCS 法 3 种方法的正负号一致,说明可靠度的变化趋势一致,而 PRSM 方法的计算结果正负号发生了变化;PRSM 方法和 CDM 法的结果数值吻合程度高,因为两种方法的根本理论一致;PRSM 方法和 MCS 法由于算法的误差导致了结果有一定的误差,但是系统参数对可靠性灵敏度的排序结果以及可靠度的变化趋势是一样的,所以误差是在允许范围内的。

## 4 结 论

在计算具有任意分布参数的系统可靠性灵敏度时,通过 PRSM 方法和 PRSM 方法的公式计算结果的比较分析,得到结论如下:

1) PRSM 方法和 PRSM 方法均适合用来计算线性系统或弱非线性系统的可靠性灵敏度。两种方法均存在误差,PRSM 方法更接近 CDM 方法,PRSM 方法更接近 MCS 方法,但是误差在允许的范围。因此,对于线性系统或弱非线性系统,可以采用 PRSM 方法和 PRSM 方法的任意一种计算可靠性灵敏度。

2) 对于有些强非线性系统,PRSM 方法无法正确判断可靠度的变化趋势。而 PRSM 方法可以解决此类难题,在计算可靠度对基本随机变量均值的灵敏度时,采用 PRSM 方法可以大大提高其计算精度,正确判断可靠度的变化趋势,是一个十分有效且实用的方法。因此,对于强非线性系统采用 PRSM 方法计可靠性灵敏度更为适合。

### 参考文献:

- [1] Ben-Haim Y. Robust reliability of structures[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1997, 31:

- 1-41.
- [2] Liaw L D, DeVries R I. Reliability-based optimization for robust design[J]. *International Journal of Vehicle Design*, 2001, **25**(1/2): 64-77.
- [3] Zhang Y M, He X D, Liu Q L, Wen B C. Reliability-based optimization and robust design of coil tube-spring with non-normal distribution parameters[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science*, 2005, **219**(6): 567-576.
- [4] de Lataillade A, Blanco S, Clergent Y, Dufresne J L, Hafi M El, Fournier R. Monte Carlo method and sensitivity estimations[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2002, **75**(5): 529-538.
- [5] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. *Computers & Structures*, 2004, **82**(1): 55-61.
- [6] Shiraiishi F, Tomita T, Iwata M, Berrada A A, Hirayama H. A reliable Taylor series-based computational method for the calculation of dynamic sensitivities in large-scale metabolic reaction systems: algorithm and software evaluation[J]. *Mathematical Biosciences*, 2009, **222**(2): 73-85.
- [7] Karamchandani A, Cornell C A. Sensitivity estimation within first and second order reliability methods[J]. *Structural Safety*, 1991, **11**(2): 95-107.
- [8] Zhao Y G, Ono T. Moment methods for structural reliability[J]. *Structural Safety*, 2001, **23**(1): 47-55.
- [9] Wu Y T, Shah C R, Baruah A K D. Progressive advanced-mean-value method for CDF and reliability analysis[J]. *International Journal of Materials and Product Technology*, 2002, **17**(5/6): 303-318.
- [10] Zhang Y M, He X D, Liu Q L, Wen B C, Zheng J X. Reliability sensitivity of automobile components with arbitrary distribution parameters[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D-Journal of Automobile Engineering*, 2005, **219**(D2): 165-182.
- [11] Zhang Y M, Wen B C, Chen S H. PFEM formalism in Kronecker notation[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1996, **1**(4): 445-461.
- [12] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. Reliability sensitivity for rotor-stator systems with rubbing [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **259**(5): 1095-1107.
- [13] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. First passage of uncertain single degree-of-freedom nonlinear oscillators[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, **165**(1/4): 223-231.
- [14] Zhang Y M, Liu Q L, Wen B C. Quasi-failure analysis on resonant demolition of random structural systems[J]. *AIAA Journal*, 2002, **40**(3): 585-586.
- [15] Wu Y T, Mohanty S. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, **91**(6): 634-647.
- [16] Kreinovich V, Beck J, Ferregut C, Sanchez A, Keller G R, Averill M, Starks S A. Monte-Carlo-type techniques for processing interval uncertainty, and their potential engineering applications[J]. *Reliable Computing*, 2007, **13**(1): 25-69.
- [17] Wu Y. Adaptive importance sampling (AIS)-based system reliability sensitivity analysis method[C]// *Proceedings of the IUTAM Symposium*, June 7-10, 1993. New York: Springer-Ver-

- lag, 1993: 550.
- [18] Kim C, Wang S, Choi K K. Efficient response surface modeling by using moving least-squares method and sensitivity[J]. *AIAA Journal*, 2005, **43**(11): 2404-2411.
- [19] Youn B D, Choi K K. A new response surface methodology for reliability-based design optimization[J]. *Computers & Structures*, 2004, **82**(2/3): 241-256.
- [20] Lee S H, Kwak B M. Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 2006, **28**(3): 261-272.
- [21] Brewer John W. Kronecker products and matrix calculus in system theory[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1978, **25**(9): 772-781.

## Advanced Method to Estimate the Reliability-Based Sensitivity of Mechanical Components With Strongly Nonlinear Performance Function

ZHANG Yi-min, ZHU Li-sha, WANG Xin-gang

(School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University,  
Shenyang 110819, P. R. China)

**Abstract:** Based on the random perturbation technique of reliability sensitivity design, some realistic reliability-based sensitivity issues were discussed, with some of them having a structure of high nonlinear performance function. Combining the relating theories of moment method of reliability analysis, matrix differential and Kronecker algebra, the reliability-based sensitivity method based on perturbation method was modified, given that the first four moments of random variables. Meanwhile, a reliability-based sensitivity computing methodology also was put forward. Some examples were adopted to prove that using this methodology could highly improve the accuracy of reliability-based sensitivity computation and this methodology also offers some more dependable theoretic basis for engineering.

**Key words:** reliability; sensitivity; non-linear; perturbation theory; moment method