

虚拟解法分析浸入边界法的精度*

宫兆新¹, 鲁传敬^{1,2}, 黄华雄³

- (1. 上海交通大学 力学系, 上海 200240;
2. 海洋工程国家重点实验室, 上海 200030;
3. 多伦多约克大学 数学统计系, M3J 1P3, 加拿大)

(我刊编委鲁传敬来稿)

摘要: 浸入边界法是对流固耦合系统进行建模和模拟的有效工具,在生物力学领域的应用尤为广泛. 该文的工作主要包含两个部分:程序验证和精度分析. 前者证明了程序的正确性,后者给出了浸入边界法的精度. 两部分工作均使用虚拟解法作为研究工具. 在程序验证部分,使用二阶空间离散格式进行数值计算,通过分析各种变量的离散误差,得到的程序计算精度阶是二阶,与理论精度阶一致,证明了数值计算所使用程序的正确性. 精度分析部分工作在此基础上展开. 引入压强跳跃,在动量方程中加入相应源项,通过分析带有源项的控制方程中各物理量的离散误差,证明浸入边界法只具有一阶精度. 同时可以得出以下结论:粗网格无法敏感地捕捉浸入边界的影响;当 Euler 网格固定时,增加 Lagrange 标志点的数目并不会改善计算误差.

关键词: 虚拟解; 浸入边界法; 精度阶; 程序验证; 离散误差

中图分类号: O368; O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.001

引言

在科学与工程中经常会遇到一个形状复杂的弹性结构和流场相互作用问题,尤其在生物流体力学领域. 浸入边界法是解决此类问题的一种有效方法,它最初由 Peskin^[1] 在 1977 年提出,并由 Peskin 和 McQueen^[2] 发展用于模拟人类心脏中的血液流动. 它的基本思想是将复杂结构的边界模化成 Navier-Stokes 动量方程中的一种体力,并使用简单的 Cartesian 网格有效地避开贴体网格生成的困难,提高计算效率. 浸入边界法既是一种数学建模方法,又是一种数值离散方法. 数学建模过程中使用 Euler 变量和 Lagrange 变量,两者之间的信息传递通过含有 Dirac delta 函数的相互作用方程实现. 在数值模拟过程中,使用 Cartesian 网格计算流场,使用曲线网格计算浸入边界的运动,并且在计算过程中需要按照一定的准则将 Dirac delta 函数正则化. 浸入边界法的应用十分广泛,尤其是在生物力学领域,例如细胞、精子和细菌的游泳^[3-5]、变形虫的蠕动^[6]、血小板的凝聚^[7-8] 和红血球运动^[9] 等等.

为了更好地使用浸入边界法,人们开始越来越多地研究浸入边界法本身的性质. Tu 和 Pe-

* 收稿日期: 2010-01-22; 修订日期: 2010-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472070)

作者简介: 宫兆新(1982—),女,黑龙江人,博士生(E-mail: jackyff@sjtu.edu.cn);
鲁传敬,教授(联系人, E-mail: cjlu@mail.sjtu.edu.cn).

skin^[10]使用包括浸入边界法在内的3种不同方法研究动边界问题的稳定性;Stockie等^[11-12]和Gong等^[13]通过研究纤维在流场中的运动,给出了连续和离散形式的浸入边界问题的线性稳定性分析;Beyer和Leveque^[14]使用带有奇性力源项的一维热传导模型,首次分析了浸入边界问题的收敛性.Lai和Peskin^[15]提出了一种形式上的二阶浸入边界法,使用一个圆柱绕流算例证明了其精度阶.Griffith等^[16]介绍了一种新型的二阶浸入边界法,并采用了流固耦合算例,验证了该方法在数值计算时具有二阶收敛率。

目前已有的关于浸入边界法稳定性分析工作的结论都是一致的.但是精度分析方面的工作却存在争议.大多数前人的工作^[14,17-18]都表明当奇性力作用在边界上时,由于正则化的Dirac Delta函数的光滑作用,浸入边界法只具有一阶精度.Lai和Peskin^[15]也强调他们提出的浸入边界法只是“形式上”的二阶,当应用到实际的浸入边界问题时精度只有一阶.Griffith等^[16]表明当使用合适的离散格式时,浸入边界法可以达到二阶精度。

本文的工作目标是使用虚拟解法研究浸入边界法的精度.目前虚拟解法作为有效的程序验证工具得到了广泛应用.本文将虚拟解法发展成为一种精度分析工具.全文的主要工作包括:第1节介绍虚拟解法;第2节运用虚拟解法验证计算程序的正确性;第3节通过引入压力跳跃,利用虚拟解法研究浸入边界法的精度.第4节给出了结论。

1 虚拟解法

程序验证最严谨的方法是精度阶验证,而进行精度阶验证最精确的方法是比较数值解与精确解.然而,对于大多数流体问题来说,精确解是无法得到的.因此人们考虑构造一个解析解,将其带入控制方程生成相应的源项,再使用这些源项对控制方程进行修正.此时,这些解析解就是修改后的控制方程的精确解,也称之为虚拟解.而使用虚拟解验证数值解的方法就是虚拟解法.虚拟解只从数学角度出发假设的一个精确解,不具有任何物理意义。

虚拟解法最初由Steinberg和Roache^[19]于1985年提出,并由Roache^[20-21]和Oberkampf等^[22-23]将其发展用于程序验证.随着最近十几年的发展,虚拟解法成为了一种有效的程序验证工具.Roy等^[24]使用虚拟解法验证Euler方程和Navier-Stokes方程求解程序的正确性;Bond等^[25]扩展虚拟解法验证CFD边界条件;Brunner^[26]采用虚拟解法解决热传递验证问题;Eca等^[27]构造涡粘性模型的虚拟解;Tremblay等^[28]将其应用于流固耦合问题。

使用虚拟解法验证计算程序时一般包含以下几个步骤:

步骤1 列出控制方程

控制方程一般是一组连续偏微分方程.与这组方程对应的解称为物理精确解.在流体动力学领域,控制方程大多数为Navier-Stokes方程或Euler方程,而这些方程没有办法得到物理精确解。

步骤2 构造虚拟解

虚拟解在理论上没有任何限制的,但一般提出的虚拟解是光滑的、无限可导的、不违背现实的(例如压强、密度不能为负数).为了测试控制方程中的所有项,虚拟解的形式需要具有一般性,经常采用三角函数表达,如正弦函数、余弦函数和双曲正切函数等。

步骤3 生成解析源项

将步骤2中的虚拟解带入步骤1中的控制方程得到的表达式就是所需的源项.对于复杂的方程,例如Navier-Stokes方程,源项表达式可能非常冗长,所以需要符号处理工具(如Maple, Mathematica)来生成源项。

步骤4 计算数值解

数值解是指离散方程的解. 为了得到精度阶, 方程需要在一系列网格上离散, 数值计算所使用的程序的离散格式的精度阶是给定的. 此精度阶就是理论阶, 在下一个步骤中会作为判别准则. 数值计算时边界条件由虚拟解直接导出.

步骤5 评估计算精度阶

虚拟解法是通过计算离散误差得出数值解的精度, 离散误差是离散方程的数值解与偏微分方程的解析解之差. 定义 r 是网格加密系数, p_r 为计算精度阶. 由于离散误差一般按 $1/r^{p_r}$ 的速度递减, 可得到计算精度阶的计算公式:

$$p_r = \frac{1}{\ln r} \ln \left(\frac{E_{\text{grid1}}}{E_{\text{grid2}}} \right), \quad (1)$$

其中, E_{grid1} 和 E_{grid2} 是两套连续加密网格的全局离散误差, $r = h_{\text{grid1}}/h_{\text{grid2}}$. 全局误差的 $L1$ 范数可以由下式计算得到:

$$E(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N | \varphi_{\text{numer},n} - \varphi_{\text{exact},n} |. \quad (2)$$

步骤6 验证计算程序

如果计算精度阶和理论精度阶吻合, 则证明程序是正确的. 否则, 需要重新检验调试程序, 再返回步骤4.

从上面的程序验证过程可以看出, 虚拟解法的基本判断准则是对于一个零错误的程序, 理论精度阶与计算精度阶必定是一致的. 换句话说, 对于一个已知正确的程序, 计算精度阶一定与其理论精度阶相同. 基于上述理论, 虚拟解法可用于分析浸入边界法的精度. 而且进行精度分析的过程与程序验证的步骤基本相同, 只有步骤6 由于程序是正确的已变成前提条件, 所以略去.

2 程序验证

本文程序采用有限体积法求解 Navier-Stokes 方程, 其中动量方程的对流项和粘性项分别采用二阶对流格式和中心差分格式, 压力修正方程应用二阶差分格式. 因此, 所用程序的理论精度阶为二阶.

控制方程是二维定常 Navier-Stokes 方程, 其守恒形式的表达式如下所示:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = S_m, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial(u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = S_u, \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot v)}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = S_v, \quad (5)$$

其中, ρ 是密度, μ 是粘度, u 和 v 分别代表 x 和 y 方向的速度. S_m , S_u 和 S_v 是守恒方程的解析源项. 假定流体的密度和粘度是常数, 方程中只有速度和压力为变量. 接下来需要对所有变量构造虚拟解, 假定整个流场中速度和压力的形式为

$$u(x, y) = u_0 + u_1 \sin\left(\frac{1.75\pi x}{L_1}\right) + u_2 \cos\left(\frac{1.5\pi y}{L_2}\right) + u_3 \cos\left(\frac{0.6\pi xy}{L_1 \cdot L_2}\right), \quad (6)$$

$$v(x, y) = v_0 + v_1 \cos\left(\frac{1.5\pi x}{L_1}\right) + v_2 \sin\left(\frac{\pi y}{L_2}\right) + v_3 \cos\left(\frac{0.9\pi xy}{L_1 \cdot L_2}\right), \quad (7)$$

$$p(x, y) = p_0 + p_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L_1}\right) + p_2 \sin\left(\frac{1.25\pi y}{L_2}\right) + p_3 \sin\left(\frac{0.75\pi xy}{L_1 \cdot L_2}\right), \quad (8)$$

其中, $\phi_i (= u, v, p), i = 0, 1, 2, 3$ 是虚拟解常数, L_1, L_2 是参考长度. 将式(6) ~ (8)代入式(3) ~ (5)可以得到解析源项的表达式.

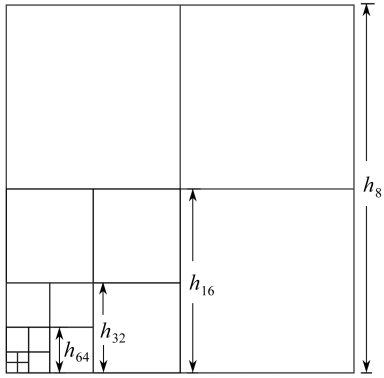


图1 网格加密示意图

在数值计算过程中,计算域选用单位正方形.控制方程在不同尺度的网格上离散.在每一套网格上,均匀分布着 $(N+1) \times (N+1)$ 个网格节点,记 h_N 为节点间距.计算中使用6套网格,网格加密系数 $r = 2$.网格加密过程如图1所示.

为了保证可以验证控制方程的所有项,虚构一种密度 $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ 、粘度 $\mu = 10 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ 的材料作为流场中的介质.表1给出虚拟解常数,由此得到的整个流场的速度和压强的虚拟解如图2(a) ~ 图2(c)所示,相应的质量守恒方程和动量守恒方程的解析源项如图2(d) ~ 图2(f)所示.所有的边界条件都设为速度边界,速度大小由虚拟解得到.

表1 虚拟解常数

ϕ	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
$u/(\text{m/s})$	70	-4	-12	7
$v/(\text{m/s})$	90	20	4	-11
$p/(\text{N/m}^2)$	2 000	600	800	-500

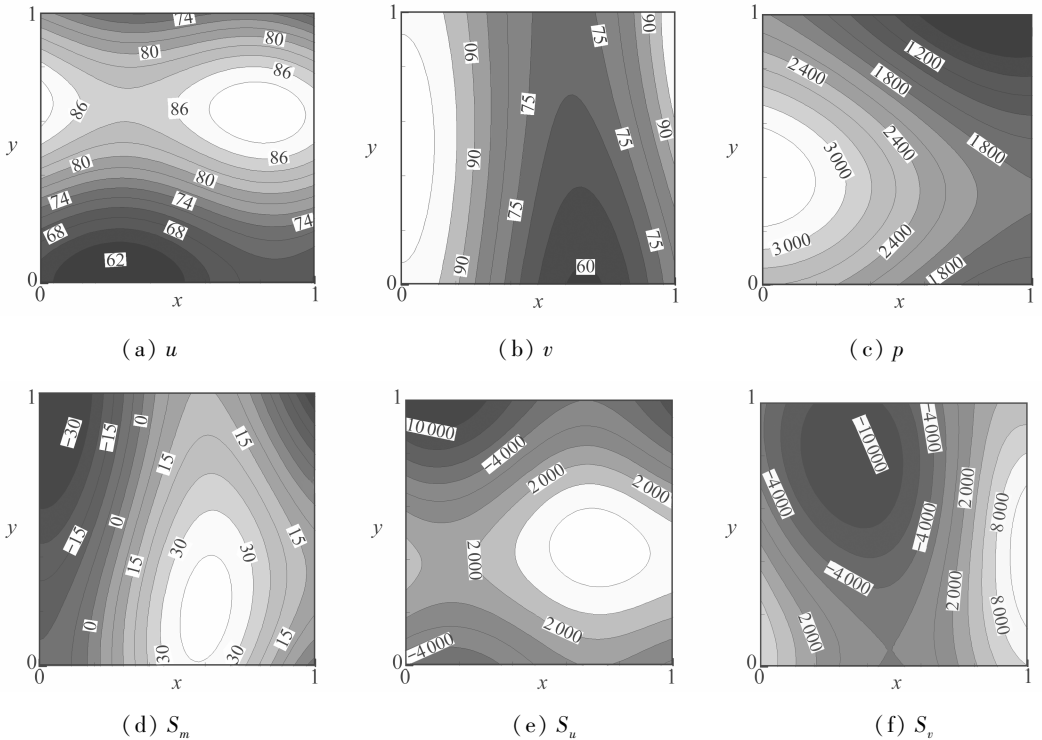


图2 虚拟解和相应的 Navier-Stokes 方程解析源项示意图(图中标记量单位均为国际单位)

在一系列网格上数值求解控制方程,可以得到相应的数值解.速度离散误差和压强离散误

差分别如图 3(a) ~ 图 3(c) 所示。从图中可以看出,速度 u 和 v 的最大误差分别在计算域的上边界和右边界,压强的最大误差在边界角点附近。表 2 列出 u, v, p 的离散误差并计算了相邻网格的计算精度阶。从中可以看出,随着网格的加密,全局离散误差一直在减少,所有变量精度阶均近似保持在二阶。

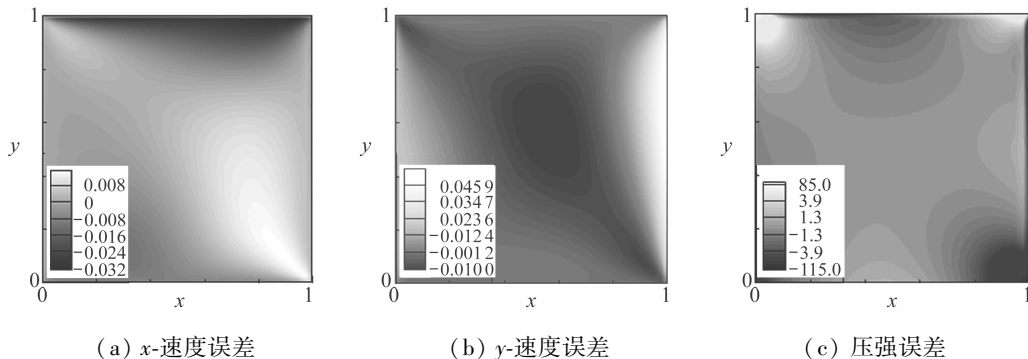


图 3 程序验证时密网格上速度和压强的离散误差 ($N = 128$)

表 2 程序验证的计算精度阶

N	$E(u)$	$p_r(u)$	$E(v)$	$p_r(v)$	$E(p)$	$p_r(p)$
8	0.425	2.0	0.458	2.0	58.0	1.8
16	0.105	2.0	0.116	2.0	16.2	1.9
32	0.026 3	2.0	0.029 3	2.0	4.38	1.9
64	0.006 60	2.0	0.007 35	2.0	1.14	2.0
128	0.001 65	2.0	0.001 84	2.0	0.293	2.0
256	0.000 413	—	0.000 460	—	0.074 5	—

上述数值计算结果表明:程序的计算精度阶为二阶,与理论精度阶一致。由此证明了程序的正确性。基于这个结果,在下面一节中分析浸入边界法的精度。

3 精度分析

假设流体是不可压缩的,密度和压力为常数。浸入边界法的二维数学模型可以描述如下:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{9}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}, \tag{10}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 是浸入边界产生的体积力。由于浸入边界与周围流体运动的速度相同,所以有

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t), t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) d\mathbf{x}, \tag{11}$$

其中 $\mathbf{X}(s, t)$ 代表浸入边界法的运动。 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 可以表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{f}(s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds, \tag{12}$$

其中 $\mathbf{f}(s, t)$ 是浸入边界产生的单位力, δ 是 Dirac Delta 函数。在数值求解过程中,方程(9)和(10)在固定的 Euler 网格上离散,方程(11)由膜上的 Lagrange 标志点显示追踪。方程(11)和(12)中的 Dirac Delta 函数可以在满足一定条件下用不同方法正则化^[29]。本文使用 Peskin^[1]提出的正则化 Dirac Delta 函数的初始形式(如图 4 所示):

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \phi\left(\frac{\mathbf{x}}{h}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mathbf{y}}{h}\right), \tag{13}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \right), & |r| \leq 2, \\ 0, & |r| > 2, \end{cases} \quad (14)$$

其中, $(x, y) \in \mathbf{x}$, h 是网格步长。

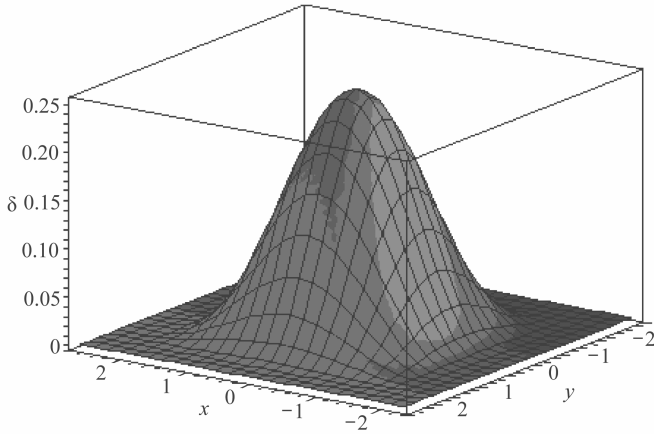


图4 Dirac Delta 函数的余弦近似

浸入边界法用于解决有结构和流体相互作用的问题。在这些问题中, 结构边界两侧一般存在速度梯度和压强的跳跃。在接下来的分析过程中, 我们将问题简化, 假定界面两侧速度连续, 只考虑压强的跳跃。则速度 u 和 v 的虚拟解形式与程序验证部分相同, 而压强 p 的虚拟解需要引入一个跳跃, 其形式可由下式表述:

$$\tilde{p}(x, y) = p(x, y) + P_j \cdot H, \quad (15)$$

其中, H 是单位阶梯函数, P_j 是跳跃幅值。将虚拟解代入控制方程(3) ~ (5) 得到下列方程组:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = S_m, \quad (16)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = S_{u1} = S_u + F_x, \quad (17)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = S_{v1} = S_v + F_y, \quad (18)$$

其中, F_x 和 F_y 满足下面的方程:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int (P_j \mathbf{n}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) ds, \quad (19)$$

其中 \mathbf{n} 是跳跃界面的单位法向量。观测上述方程可以发现, 动量方程中加入了奇性源项。奇性力代表了跳跃的压强场的影响。对比方程组(16) ~ (19) 和(9) ~ (12) 可以发现对于定常流动, 两组方程一致。因此, 上述方程组可以用于检测浸入边界法的精度。跳跃界面可被视为浸入边界。

浸入边界法是一种界面追踪方法, 界面边界由 Lagrange 变量描述, 而流场变量则通过 Euler 网格计算。浸入边界法的 Euler 网格一般选用沿各个方向等间距的 Cartesian 网格, 因此, 可以使用虚拟解法分析浸入边界法的精度。

选取圆 Γ 作为压强跳跃发生边界, 其圆心坐标为(0.5, 0.5), 半径 r 为 0.2。假定圆 Γ 上均匀分布有 N_s 个 Lagrange 标志点, 相邻标志点间距为 s 。图 5 给出数值计算的 Euler 网格和 Lagrange 标志点的示意图。

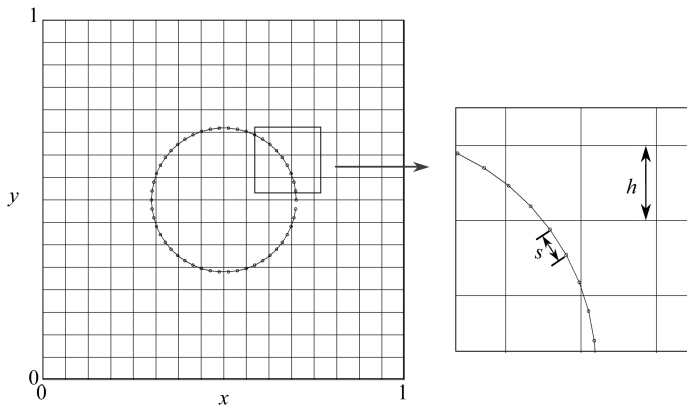


图5 Euler 网格和 Lagrange 标志点的示意图

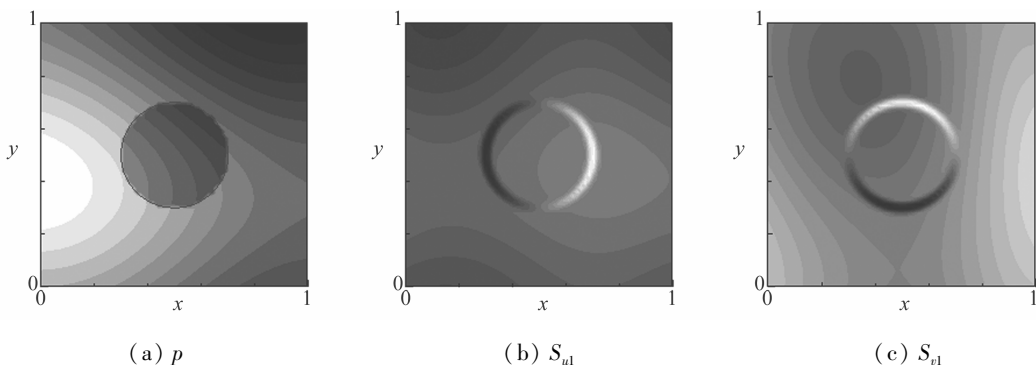


图6 精度分析时压强和动量方程源项示意图

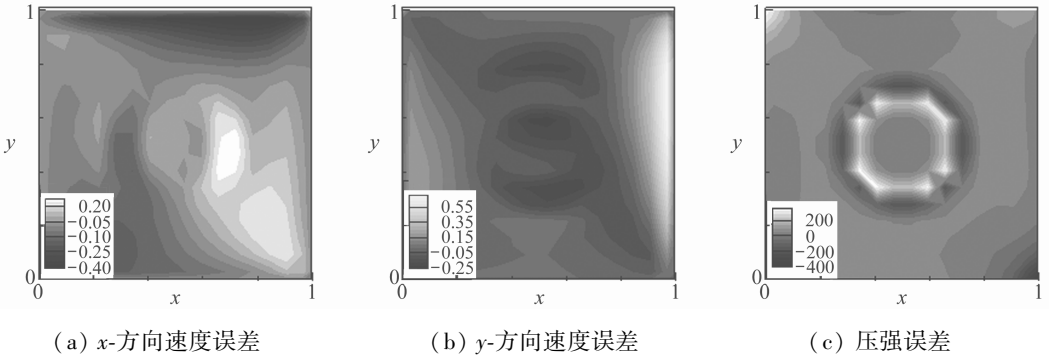
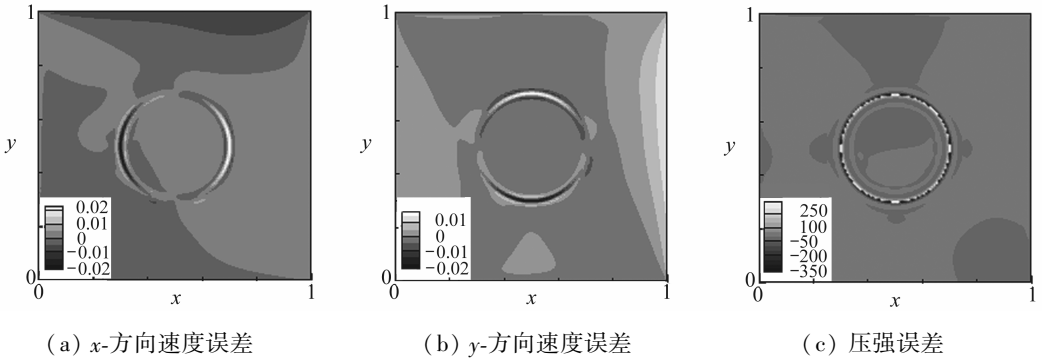
方程(16) ~ (18)中常数取值与表1相同。因此,除了压强跳跃界面附近,方程(16)和(17)中的源项分别与方程(4)和(5)中的源项相同。选取 $P_j = 800 \text{ Pa}$ 。图6给出了压强和动量方程源项的全局分布图,从中可以清楚地看到压强的跳跃以及相应源项的跳跃。

表3 细网格上速度压强的离散误差 ($N = 128$)

q	$E(u)$	$E(v)$	$E(p)$
2.5	0.001 884 072 697	0.002 051 719 825	5.469 958 282
5	0.001 884 072 697	0.002 051 786 001	5.470 830 339
10	0.001 884 627 610	0.002 051 771 778	5.480 498 415
15	0.001 884 638 405	0.002 051 771 499	5.480 831 774
20	0.001 884 636 028	0.002 051 771 538	5.480 497 949

定义 $q (> 2)$ 为 Euler 网格步长 h 与 Lagrange 标志点间距 s 之比。当网格加密过程中, q 保持不变。表3给出使用细网格 ($N = 128$) 时, q 从 2.5 变化到 20 的过程中, 流场速度和压强的离散误差值。从中可以看出误差的变化可以忽略。在其他几套网格上, 也可以观测到相同的现象。也就是说, 一旦 Euler 网格确定, 加密 Lagrange 标志点并不会改善任何变量的离散误差。因此, 对与任意 Euler 网格, Lagrange 标志点的个数只需要满足 $q > 2$ 即可。

在下面的数值模拟过程中选取 $q = 2.5$ 。图7和图8分别给出在两种不同网格上, 速度和压力的离散误差。在粗网格上 ($N = 16$), 最大误差出现在边界上; 然而在细网格上 ($N = 128$), 最大误差出现在跳跃界面附近。在浸入边界法中, 压力的跳跃以一个过渡层代替, 随着网格的逐渐加密, 过渡区域不断变窄, 数值计算的压力场越来越接近理论的跳跃压力场。对于粗网格来

图7 粗网格上速度、压强的离散误差分布图 ($N = 16, q = 2.5$)图8 细网格上速度、压强的离散误差分布图 ($N = 128, q = 2.5$)

讲,由于过渡区域过大,无法准确地捕捉奇性力的影响。

表4 用于精度分析的离散误差和计算精度阶

N	$E(u)$	$p_r(u)$	$E(v)$	$p_r(v)$	$E(p)$	$p_r(p)$
8	0.459	2.1	0.474	2.0	146	1.0
16	0.110	2.0	0.117	2.0	76.0	1.6
32	0.027 9	1.9	0.030 2	1.9	24.5	1.0
64	0.007 24	1.9	0.007 93	2.0	11.7	1.1
128	0.001 88	1.9	0.002 05	2.0	5.47	1.0
256	0.000 489	—	0.000 529	—	2.59	—

表4给出 u, v, p 误差的 $L1$ 范数和计算精度阶。从中可以看出全局离散误差随着网格的加密过程不断减小。对于速度变量 u 和 v ,计算精度阶仍然保持二阶;然而对于压强 p ,计算精度阶变为一阶。因为在前一节中已经验证过程序的正确性,所以计算精度阶等于理论精度阶。由于只在压强场存在跳跃,而生成的奇性力源项只和压强有关,因此速度 u 和 v 的计算精度阶应与数值离散格式的理论精度阶一致,而压强 p 的计算精度阶就是浸入边界法的理论精度阶。因此,浸入边界法只具有一阶精度。

以上结果与前人的大多数结论^[14,17-18]一致。Griffith等^[16]得到二阶精度的结论,是使用细网格上的数值解代替精确解作为计算离散误差的标准而得到的。 δ 函数作为一种特殊的函数,精细网格也无法准确地数值模拟其性质。所以Griffith等^[16]的结论无法真实地反映浸入边界法的精度。

通过上述分析可以得出以下结论:浸入边界法只具有一阶精度。

4 结 论

本文使用虚拟解法分析浸入边界法的精度. 虚拟解法作为研究工具, 不仅验证了程序的正确性, 而且提供了算法的精度阶. 虚拟解法的主要判别准则是理论精度阶与计算精度阶是否一致, 若两者吻合, 则证明程序正确; 若两者不符, 则说明程序中存在语句错误.

在程序验证部分, 在一系列网格上离散控制方程, 通过数值计算可以得到相应的离散误差. 由误差的 L_1 范数的随着网格的变化, 得到计算精度阶为二阶, 与离散格式的理论精度阶一致, 由此证明程序的正确性.

在精度分析部分, 引入压强的跳跃, 在程序中加入相应的奇性力源项. 奇性力代表了浸入边界的作用, 离散过程中使用正则化的 δ 函数光滑压强跳跃区域. 分析离散误差的变化可以观察到: 在网格加密的过程中, 误差的最大值首先出现计算域的边界附近, 然后出现在浸入边界附近, 这意味着较粗的网格无法很好的捕捉浸入边界的影响. 并且证明了浸入边界法只具有一阶精度, 此结果与前人的工作^[14, 17-18]一致. 同时得到以下结论: 当 Euler 网格确定后, 增加 Lagrange 标志点并不会改善离散误差.

虚拟解法是精度分析的有效工具, 其主要优势在于可以提供不连续物理量的精确解. 这在使用数值方法分析含有跳跃物理量的问题的精度时是必不可少的. 虚拟解法的优点还包括其数学机理明了易懂, 实施应用简单方便. 未来, 相关的工作可以继续下去, 例如研究不同的正则化 Dirac Delta 函数的方法对浸入边界法精度的影响.

参考文献:

- [1] Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. *J Comput Phys*, 1977, **25**(3): 220-252.
- [2] Peskin C S, McQueen D M. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart I—immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid[J]. *J Comput Phys*, 1989, **81**(2): 372-405.
- [3] Dillion R, Fauci L J, Gaver D. A microscale model of bacteria swimming, chemotaxis, and substrate transport[J]. *J Theor Biol*, 1995, **177**(4): 325-340.
- [4] Fauci L J, McDonald A. Sperm motility in the presence of boundaries[J]. *B Math Biol*, 1995, **57**(5): 679-699.
- [5] Fauci L J, Peskin C S. A computational model of aquatic animal locomotion[J]. *J Comput Phys*, 1988, **77**(1): 85-108.
- [6] Bottino D C. Modeling viscoelastic networks and cell deformation in the context of the immersed boundary method[J]. *J Comput Phys*, 1998, **147**(1): 86-113.
- [7] Fogelson A L. Continuum models of platelet aggregation: formulation and mechanical properties[J]. *SIAM J Appl Math*, 1992, **52**(4): 1089-1110.
- [8] Fauci L J, Fogelson A L. Truncated Newton's methods and the modeling of complex immersed elastic structures[J]. *Comm Pur Appl Math*, 1993, **46**(6): 787-818.
- [9] Eggleton C D, Popel A S. Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow [J]. *Phys Fluids*, 1998, **10**(8): 1834-1845.
- [10] Tu C, Peskin C S. Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries: a comparison of three methods[J]. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1992, **13**(6): 1361-1376.

- [11] Stockie J M, Wetton B R. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes[J]. *J Comput Phys*, 1999, **154**(1): 41-64.
- [12] Stockie J M, Wetton B R. Stability analysis for the immersed fiber problem[J]. *SIAM J Appl Math*, 1995, **55**(6): 1577-1591.
- [13] Gong Z X, Huang H X, Lu C J. Stability analysis of the immersed boundary method for a two-dimensional membrane with bending rigidity[J]. *Communications in Computational Physics*, 2008, **3**(3): 704-723.
- [14] Beyer R P, Leveque R J. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method[J]. *SIAM J Num Anal*, 1992, **29**(2): 332-364.
- [15] Lai M C, Peskin C S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity[J]. *J Comput Phys*, 2000, **160**(2): 705-719.
- [16] Griffith B E, Peskin C S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: higher order convergence rates for sufficiently smooth problems[J], *J Comput Phys*, 2005, **208**(1): 75-105.
- [17] Lai M C. Simulations of the flow past an array of circular cylinders as a test of the immersed boundary method[D]. Ph D thesis. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1998.
- [18] Leveque R J, Li Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1994, **31**(4): 1019-1044.
- [19] Steinberg S, Roache P J. Symbolic manipulation and computation fluid dynamics[J]. *J Comput Phys*, 1985, **57**(2): 251-284.
- [20] Roache P J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*[M]. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers, 1998.
- [21] Roache P J. Code verification by the method of manufactured solutions [J]. *J Fluid Eng*, 2002, **124**(1): 4-10.
- [22] Oberkampf W L, Trucano T G. Validation methodology in computational fluid dynamics[R]. AIAA Paper 2000-2549, Denver, CO. 19-22, June, 2000.
- [23] Oberkampf W L, Trucano T G. Verification and validation in computational fluid dynamics [J]. *AIAA Progress in Aerospace Sciences*, 2002, **38**(3): 209-272.
- [24] Roy C J, Nelson C C, Smith T M, Ober C C. Verification of Euler/Navier-Stokes codes using the method of manufactured solutions[J]. *Int J Numer Mech Fluids*, 2004, **44**(6): 599-620.
- [25] Bond R B, Ober C C, Knupp P M. A manufactured solution for verifying CFD boundary conditions—part III [C]//*36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. San Francisco, CA, 2006, 1966-1982.
- [26] Brunner T A. Development of a grey nonlinear thermal radiation diffusion verification problem [J]. *Transactions of the American Nuclear Society*, 2006, **95**: 876-878.
- [27] Eca L, Hoekstra M, Hay A, Pelletier D. On the construction of manufactured solutions for one- and two-equation eddy-viscosity models[J]. *Int J Num Mech Fluids*, 2007, **54**(2): 119-154.
- [28] Tremblay D, Etienne S, Pelletier D. Code verification and the method of manufactured solutions for fluid-structure interaction problems [C]//*36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, San Francisco, CA. 2. 2006, 882-892.
- [29] Peskin C S. The immersed boundary method [J]. *Acta Numerica*, 2002, **11**: 435-477.

Accuracy Analysis of the Immersed Boundary Method Using the Method of Manufactured Solutions

GONG Zhao-xin¹, LU Chuan-jing^{1,2}, HUANG Hua-xiong³

(1. *Department of Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200240, P. R. China.*

2. *State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai 200030, P. R. China.*

3. *Department of Mathematics and Statistics, York University,
Toronto, Ontario, M3J 1P3, Canada)*

Abstract: The immersed boundary method is an effective technique for modeling and simulating fluid-structure interactions especially in the area of biomechanics. The principle work was to analyze the accuracy of the immersed boundary method. The whole procedure contained two parts: code verification and accuracy analysis. The code verification part provided the confidence that the code used here was mistake free and the accuracy analysis part gave the order of accuracy of the immersed boundary method. The method of manufactured solutions was taken as the research means for both parts. In the first part, the numerical code employed a second order discretization scheme, i. e. , the theoretical order of accuracy was second order. It was matched by the calculated order of accuracy obtained by numerical calculation for all variables. This meant that the code contained no mistake, which was the premise of the following work. The second part introduced a jump in the manufactured solution for pressure and added corresponding singular forcing terms in the momentum equations. By analyzing the discretization errors, the accuracy of the immersed boundary method was proved to be first order, even though the discretization scheme was second order. In the meantime, it was found that the coarser mesh might be not sensitive enough to capture the influence of the immersed boundary and that refinement on the Lagrangian markers barely had any effects on the numerical calculation.

Key words: manufactured solutions; immersed boundary method; order of accuracy; code verification; discretization error