

新型空间薄壁梁单元*

王晓峰¹, 张其林¹, 杨庆山²

(1. 同济大学 土木学院, 上海 200092;
2. 北京交通大学 土建学院, 北京 100044)

(陈立群推荐)

摘要: 基于 Timoshenko 梁理论和 Vlasov 薄壁杆件约束扭转理论,建立了具有内部结点的新型空间薄壁截面梁单元.通过对弯曲转角和翘曲角采取独立插值的方法,考虑了横向剪切变形,扭转剪切变形及其耦合作用,弯曲变形和扭转变形的耦合以及二次剪应力等因素影响,由 Hellinger-Reissner 广义变分原理,推得单元刚度矩阵.算例表明所建模型具有良好的精度,可用于空间薄壁杆系结构的有限元分析.

关键词: 空间梁; 薄壁截面; 刚度矩阵; 剪切变形; 弯扭耦合; 二次剪应力

中图分类号: TU323.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.09.009

引言

由于钢结构延性好,施工周期短并可以满足空间灵活分割的建筑要求,所以在工业和民用建筑中得到广泛应用.为了充分发挥钢材的高强特性,工程中梁、柱以及支撑等构件通常均制作成薄壁截面.薄壁杆件在外荷载的作用下主要发生弯曲和扭转变形,对于主要承受弯曲荷载的薄壁杆件又称为薄壁梁.

薄壁梁方面的研究已有几十年的历史,近几年来该研究主要集中在以下几个方面:极限状态^[1-3],本构关系^[4],剪切变形和(或)弯扭耦合的影响^[5-6],大转动^[7-8],侧向屈曲^[9-10],弯扭屈曲^[11],后屈曲^[12]以及塑性分歧^[13]等.

对于跨高比较小的梁,剪切变形在横向变形中将占有相当的比重,必须予以考虑,否则会引起很大的误差.薄壁梁有限元模型中考虑剪切变形影响的方法主要有4种:混合有限元法^[14], C^0 连续型 Timoshenko 梁元法^[15-17],以控制微分方程组的齐次解作为单元插值函数的方法^[18]和以修正的 Hermite 多项式作为插值函数的方法^[19].

如果在横力弯曲的同时伴随扭转变形,则横向剪切变形和扭转剪切变形之间会发生耦合作用. Kim 等^[20]根据 Hellinger-Reissner 广义变分原理建立了考虑横向剪切变形和扭转剪切变

* 收稿日期: 2009-11-16; 修订日期: 2010-07-21

基金项目: 国家科技支撑计划资助项目(住宅结构与构造选型设计技术与软件开发, 2008BAJ08B06); 国家高技术研究(863计划)发展计划资助项目(2009AA04Z420); 国家自然科学基金杰出青年基金资助项目(50725826); 上海市博士后科研基金资助项目(10R21416200)

作者简介: 王晓峰(1973—),男,山西人,博士(联系人. E-mail:wangxf822@sohu.com).

形耦合作用的薄壁截面梁单元,但没有考虑约束扭转下扭转角沿轴向坐标的非线性变化。

当截面剪心和形心不重合时,在横向荷载作用下薄壁梁发生弯曲变形的同时将伴有扭转变形,即弯扭耦合现象。Hu 等^[18]和 Kim 等^[20]等通过分析荷载作用下任意截面的运动关系建立了考虑弯曲变形和扭转变形耦合影响的薄壁梁单元模型。

在扭转荷载作用下薄壁截面梁产生翘曲变形,在翘曲受到约束的情况下,产生了翘曲正应力和翘曲剪应力(即二次剪应力),而该剪应力对剪心的扭矩(二次扭矩)必然会对扭转变形产生一定的影响。但考虑二次剪应力对扭转影响的薄壁梁模型在文献中还未见到。而将横向剪切变形,扭转剪切变形及其耦合,弯曲和扭转之间的耦合以及二次剪应力对扭转的影响等这些因素均考虑在内的薄壁梁单元在文献中也未见到。一个好的薄壁梁单元模型应当将这些因素考虑进去才能真实地反映薄壁梁的力学特性,进行准确的有限元分析。

鉴于此,本文基于 Timoshenko 梁理论和 Vlasov 薄壁杆件约束扭转理论,通过设置单元内部结点,对弯曲转角和翘曲角采用独立插值的方法,根据 Hellinger-Reissner 广义变分原理,推得可同时考虑剪切变形及其耦合作用、弯扭耦合、以及二次剪应力等因素影响的空间梁单元刚度矩阵。然后由所建的薄壁梁单元模型采用面向对象语言 C#. NET 编制了相应的有限元程序,并通过算例与有限元软件 ANSYS 的 shell 181 壳单元以及可以考虑翘曲影响的 beam 189 梁单元进行对比验证。

1 插值函数

空间薄壁梁单元坐标如图 1 所示, x 轴通过截面形心, y 轴和 z 轴为单元横截面的形心主惯性轴。单元两端结点分别为 i 和 j 。空间薄壁梁单元位移可以记为

$$\{u_0 \quad v_s \quad w_s \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z \quad \theta\}, \quad (1)$$

其中, u_0 为形心处沿 x 轴的位移; v_s, w_s 分别为截面剪心在 y, z 轴方向的平动位移; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 分别为截面绕 x, y, z 轴的转角; θ 为翘曲角。

根据材料力学和薄壁结构力学,轴向位移可采用两结点 Lagrange 插值,横向位移和扭转角可采用两结点 Hermite 插值:

$$u_0 = N_{L2}^1 u_{0i} + N_{L2}^2 u_{0j}, \quad (2)$$

$$v_s = N_H^1 v_{si} + N_H^2 v_{sj} + N_H^3 \left. \frac{dv_s}{dx} \right|_i + N_H^4 \left. \frac{dv_s}{dx} \right|_j, \quad (3)$$

$$w_s = N_H^1 w_{si} + N_H^2 w_{sj} + N_H^3 \left. \frac{dw_s}{dx} \right|_i + N_H^4 \left. \frac{dw_s}{dx} \right|_j, \quad (4)$$

$$\theta_x = N_H^1 \theta_{xi} + N_H^2 \theta_{xj} + N_H^3 \left. \frac{d\theta_x}{dx} \right|_i + N_H^4 \left. \frac{d\theta_x}{dx} \right|_j, \quad (5)$$

其中

$$N_{L2}^1 = 1 - \zeta, \quad N_{L2}^2 = \zeta, \quad (6)$$

$$\begin{cases} N_H^1 = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3, & N_H^2 = 3\zeta^2 - 2\zeta^3, \\ N_H^3 = (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)L, & N_H^4 = (-\zeta^2 + \zeta^3)L, \end{cases} \quad (7)$$

$$\zeta = \frac{x}{L}. \quad (8)$$

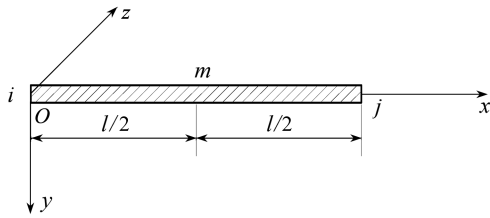


图 1 单元坐标图

为了考虑剪切变形和二次剪应力的影响,对弯曲转角和翘曲角采用了独立插值的方法.考虑到横向位移和弯曲转角同阶插值会造成剪切锁死而减缩积分会导致零能模式,这里引入单元内部结点 m (图 1). 这样弯曲转角和翘曲角可采用三结点 Lgrange 插值得到

$$\theta_y = N_{L3}^1 \theta_{yi} + N_{L3}^2 \theta_{yj} + N_{L3}^3 \theta_{ym}, \tag{9}$$

$$\theta_z = N_{L3}^1 \theta_{zi} + N_{L3}^2 \theta_{zj} + N_{L3}^3 \theta_{zm}, \tag{10}$$

$$\theta = N_{L3}^1 \theta_i + N_{L3}^2 \theta_j + N_{L3}^3 \theta_m, \tag{11}$$

其中

$$N_{L3}^1 = 1 - 3\zeta + 2\zeta^2, N_{L3}^2 = -\zeta + 2\zeta^2, N_{L3}^3 = 4\zeta - 4\zeta^2. \tag{12}$$

式(3) ~ (5)中横向位移在结点处的一阶导数以及式(9) ~ (11)中内部结点 m 对应的转角和翘曲位移,可以看成是与单元间位移协调无关的内部结点位移:

$$\mathbf{u}^i = \left\{ \left. \frac{dv_s}{dx} \right|_i, \left. \frac{dw_s}{dx} \right|_i, \left. \frac{dv_s}{dx} \right|_j, \left. \frac{dw_s}{dx} \right|_j, \left. \frac{d\theta_x}{dx} \right|_i, \left. \frac{d\theta_x}{dx} \right|_j, \theta_{ym}, \theta_{zm}, \theta_m \right\}^T, \tag{13}$$

而外部结点位移向量为

$$\mathbf{u}^e = \{u_{0i}, v_{si}, w_{si}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \theta_i, u_{0j}, v_{sj}, w_{sj}, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}, \theta_j\}^T. \tag{14}$$

这样,单元位移的矩阵形式可以表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_0, \tag{15}$$

其中

$$\mathbf{u}_0 = \{ \mathbf{u}^{eT}, \mathbf{u}^{iT} \}^T, \tag{16}$$

\mathbf{N} 为形函数矩阵,且

$$\mathbf{N} = [N_u^T, N_v^T, N_w^T, N_{\theta_x}^T, N_{\theta_y}^T, N_{\theta_z}^T, N_{\theta}^T]^T. \tag{17}$$

2 位移和应变

截面位移如图 2 所示. y 轴和 z 轴为形心主惯性轴, O 为形心, $S(y_s, z_s)$ 为剪心. 在荷载作用下,梁上任意一点 $P(x, y, z)$ 发生的位移可以分解为以下几个分量:

I) x 轴方向(轴向)的位移

a) 轴向坐标为 x 处的截面沿 x 轴方向平动引起的 $P(x, y, z)$ 点的轴向位移 u_0 ;

b) 该截面绕 y 轴和 z 轴转动引起的 $P(x, y, z)$ 点的轴向位移 $z\theta_y(x) - y\theta_z(x)$;

c) 该截面由于扭转翘曲引起的 $P(x, y, z)$ 点的轴向位移 $-\omega(s)\theta(x)$;

其中, ω 为扇性坐标, s 为沿截面中线的自然坐标. 于是点 $P(x, y, z)$ 的轴向位移可以表示为

$$u(s, x) = u_0(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x) - \omega(s)\theta(x). \tag{18}$$

II) $P(x, y, z)$ 点在其截面平面内的位移,即 y - z 平面内的位移

a) 截面沿 z 轴和 y 轴平动引起的 $P(x, y, z)$ 点横向位移 w_s 和 v_s , 并且有 $w_s = \overline{OO'} = \overline{SS'} =$

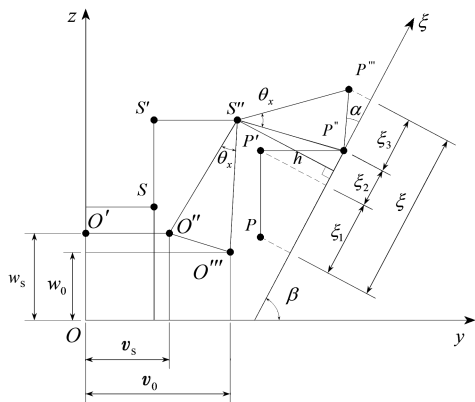


图 2 截面位移图

$\overline{PP'}$, $v_s = \overline{O'O'} = \overline{S'S''} = \overline{P'P''}$, 这时, O, S, P 点分别经点 O', S', P' 移动到 O'', S'', P'' ;

b) 截面绕剪心 S 转动引起的 $P(x, y, z)$ 点沿 y 轴和 z 轴方向的位移 $-(z - z_s)\theta_x$ 和 $(y - y_s)\theta_x$, 这时点 O'', P'' 移动到 O''', P''' , 并且有 $\angle O''S''O''' = \angle P''S''P''' = \theta_x$.

于是点 $P(x, y, z)$ 的横向位移可以表示为

$$v(y, z) = v_s - (z - z_s)\theta_x, \quad (19)$$

$$w(y, z) = w_s + (y - y_s)\theta_x. \quad (20)$$

由于薄壁截面形状一般比较复杂, 通常采用曲线坐标来描述其上点的位移、应变和应力. 这样, 在不考虑沿截面厚度方向的剪应力和剪应变的情况下, P 点横向位移可以用该点处的切向位移 ξ 来表示, 并假定 ξ 与 y 轴的夹角为 β . 于是有

$$\begin{aligned} \xi(s, x) &= v \cdot \cos \beta + w \cdot \sin \beta = \\ &= -(z - z_s)\theta_x \cos \beta + (y - y_s)\theta_x \sin \beta + v_s \cos \beta + w_s \sin \beta = \\ &= h\theta_x + v_s \frac{\partial y}{\partial s} + w_s \frac{\partial z}{\partial s}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中, h 为剪心 S 到点 P 处切线方向的距离. 式(18)和(21)写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u \\ \xi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & -\omega \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} & h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} = \Phi \cdot \mathbf{u} = \Phi \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_0 = \Psi \cdot \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\Psi = \Phi \cdot \mathbf{N}. \quad (23)$$

所以纵向正应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \Phi_u \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \cdot \mathbf{u}_0. \quad (24)$$

截面中线上切向的剪应变为

$$\gamma_{sx} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial s} \cdot \mathbf{N} + \Phi_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{u}_0. \quad (25)$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{sx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_0, \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \Phi_u \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \left\{ -\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-3 + 4\zeta}{L} z \quad \frac{-3 + 4\zeta}{L} y \quad \frac{-3 + 4\zeta}{L} \omega \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-1 + 4\zeta}{L} z \quad \frac{1 - 4\zeta}{L} y \quad \frac{1 - 4\zeta}{L} \omega \quad 0 \quad 0 \right. \\ &\quad \left. 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-4z(-1 + 2\zeta)}{L} \quad \frac{4y(-1 + 2\zeta)}{L} \quad \frac{4\omega(-1 + 2\zeta)}{L} \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= \frac{\partial \Phi_u}{\partial s} \cdot \mathbf{N} + \Phi_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \left\{ 0 \quad \frac{6(-1 + \zeta)\zeta y'}{L} \quad \frac{6(-1 + \zeta)\zeta z'}{L} \quad \frac{6(-1 + \zeta)\zeta h}{L} \right. \\ &\quad \left. (1 - 3\zeta + 2\zeta^2)z' \quad -(1 - 3\zeta + 2\zeta^2)y' \quad -(1 - 3\zeta + 2\zeta^2)h \quad 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{6(-1+\zeta)\zeta y'}{L} - \frac{6(-1+\zeta)\zeta z'}{L} - \frac{6(-1+\zeta)\zeta h}{L} \\ & \zeta(-1+2\zeta)z' - \zeta(-1+2\zeta)y' - \zeta(-1+2\zeta)h \\ & (1-4\zeta+3\zeta^2)y' (1-4\zeta+3\zeta^2)z' \zeta(-2+3\zeta)y' \\ & \zeta(-2+3\zeta)z' (1-4\zeta+3\zeta^2)h \zeta(-2+3\zeta)h \\ & -4(-1+\zeta)\zeta z' - 4(-1+\zeta)\zeta y' - 4(-1+\zeta)\zeta h \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

式中 $y' = \frac{dy}{ds}$, $z' = \frac{dz}{ds}$.

3 单元余能

根据材料力学和薄壁杆件理论,开口薄壁梁单元某点正应力和剪应力可以用其所在横截面内力分别表示为

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} - \frac{B\omega}{I_\omega}, \quad (29)$$

$$\tau_{sx} = -\frac{Q_y S_z}{I_z t} - \frac{Q_z S_y}{I_y t} - \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega t}, \quad (30)$$

其中, N 为截面轴力, M_y 和 M_z 分别为截面绕 y 轴和 z 轴的弯矩, B 为双力矩, A 为截面面积, I_y 和 I_z 分别为截面对 y 轴和 z 轴的惯性矩, I_ω 为扇性惯性矩, Q_y 和 Q_z 分别为 y 轴和 z 轴方向的剪力, M_ω 为二次扭矩或者弯扭力矩, S_y 和 S_z 分别为对 y 轴和 z 轴的面积静矩, t 为截面厚度.

于是正应力对应的余能可以写成

$$\Pi_{C1} = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_0^l \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M_y^2}{I_y} + \frac{M_z^2}{I_z} + \frac{B^2}{I_\omega} \right) dx. \quad (31)$$

剪应力对应的余能为

$$\begin{aligned} \Pi_{C2} &= \int_V \frac{\tau_{sx}^2}{2G} dV = \int_0^l \int_A \frac{1}{2G} \left(-\frac{Q_y S_z}{I_z t} - \frac{Q_z S_y}{I_y t} - \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega t} \right)^2 dA dx = \\ & \int_0^l \frac{1}{2G} (Q_y^2 S_{yy} + Q_z^2 S_{zz} + M_\omega^2 S_{\omega\omega} + 2Q_y Q_z S_{yz} + \\ & 2Q_y M_\omega S_{y\omega} + 2Q_z M_\omega S_{z\omega}) dx, \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} S_{yy} &= \frac{1}{I_z^2} \int_A S_z^2 \frac{dA}{t^2}, \quad S_{zz} = \frac{1}{I_y^2} \int_A S_y^2 \frac{dA}{t^2}, \quad S_{\omega\omega} = \frac{1}{I_\omega^2} \int_A S_\omega^2 \frac{dA}{t^2}, \quad S_{yz} = \frac{1}{I_y I_z} \int_A S_y S_z \frac{dA}{t^2}, \\ S_{y\omega} &= \frac{1}{I_z I_\omega} \int_A S_z S_\omega \frac{dA}{t^2}, \quad S_{z\omega} = \frac{1}{I_y I_\omega} \int_A S_y S_\omega \frac{dA}{t^2}. \end{aligned}$$

由此可以看出, S_{yz} , $S_{y\omega}$, $S_{z\omega}$ 与剪切变形耦合相关, 如果 $S_{yz} \neq 0$ 则说明在 y, z 轴方向的横向剪切变形间存在耦合作用, 如果 $S_{y\omega} \neq 0$ 或(和) $S_{z\omega} \neq 0$, 则表示 y 轴方向和(或) z 轴方向的横向剪切变形与扭转剪切变形之间存在耦合现象.

而沿截面厚度线性分布的 Saint-Venant 剪应力所对应的余能可以写成

$$\Pi_{C3} = \int_0^l \frac{1}{2G} \cdot \frac{M_t^2}{J} dx, \quad (33)$$

其中, M_t 为 Saint-Venant 扭矩, J 为 Saint-Venant 扭转惯性矩. 这样单元总余能为

$$\Pi_C = \Pi_{C1} + \Pi_{C2} + \Pi_{C3}. \quad (34)$$

4 单元刚度矩阵

根据 Hellinger-Reissner 广义变分原理,修正泛函 Π_{H-R} 的张量形式为

$$\begin{aligned} \Pi_{H-R}(u_i, \sigma_{ij}) = & \int_V \left[\sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - V_C(\sigma_{ij}) - \bar{f}_i u_i \right] dV - \\ & \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_u} T_i u_i dS, \end{aligned} \quad (35)$$

其中, $V_C(\sigma_{ij}) = (1/2) C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$, C_{ijkl} 为对称张量,且满足 $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl}$; \bar{f}_i 为体力张量, \bar{T}_i 为应力边界 S_σ 上的面力张量, T_i 为位移边界 S_u 上的面力张量.

考虑到 $\Pi_C = \int_V V_C(\sigma_{ij}) dV$, 并将式(34)代入式(35), 可得

$$\Pi_{H-R}(u_i, \sigma_{ij}) = \Pi_{in} - \Pi_C - \Pi_{ex}, \quad (36)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Pi_{in}(u_i, \sigma_{ij}) = & \int_0^l \left[N \frac{\partial u_0}{\partial x} + M_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + B \frac{\partial \theta}{\partial x} + Q_y \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} - \theta_z \right) + \right. \\ & \left. Q_z \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} + \theta_y \right) + M_\omega \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \theta \right) + M_\Gamma \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] dx, \end{aligned} \quad (37)$$

Π_C 为余能方程,由式(34)确定; Π_{ex} 为外荷载所做的功,当只有结点力 \mathbf{F} 作用时,可以写成

$$\Pi_{ex} = \mathbf{u}_0^T \mathbf{F}. \quad (38)$$

根据广义变分原理的驻值条件, $\delta \Pi_{H-R} = 0$, 可得

$$N = EA \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad M_y = EI_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad M_z = EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, \quad B = EI_\omega \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad M_\Gamma = GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad (39)$$

$$\frac{1}{G} \begin{bmatrix} S_{yy} & S_{yz} & S_{y\omega} \\ S_{yz} & S_{zz} & S_{z\omega} \\ S_{y\omega} & S_{z\omega} & S_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_s}{\partial x} - \theta_z \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \theta \end{Bmatrix}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right)^T N + \left(\frac{\partial N_{\theta_y}}{\partial x} \right)^T M_y + \left(\frac{\partial N_{\theta_z}}{\partial x} \right)^T M_z + \left(\frac{\partial N_\theta}{\partial x} \right)^T B + \left(\frac{\partial N_v}{\partial x} - N_{\theta_z} \right)^T Q_y + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial N_w}{\partial x} + N_{\theta_y} \right)^T Q_z + \left(\frac{\partial N_{\theta_x}}{\partial x} - N_\theta \right)^T M_\omega + \left(\frac{\partial N_{\theta_x}}{\partial x} \right)^T M_\Gamma \right] dx - \mathbf{F} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

式(40)可以写成

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_\omega \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} A_{yy} & A_{yz} & A_{y\omega} \\ A_{yz} & A_{zz} & A_{z\omega} \\ A_{y\omega} & A_{z\omega} & A_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_s}{\partial x} - \theta_z \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \theta \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

其中

$$\begin{bmatrix} A_{yy} & A_{yz} & A_{y\omega} \\ A_{yz} & A_{zz} & A_{z\omega} \\ A_{y\omega} & A_{z\omega} & A_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{yy} & S_{yz} & S_{y\omega} \\ S_{yz} & S_{zz} & S_{z\omega} \\ S_{y\omega} & S_{z\omega} & S_{\omega\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad (43)$$

$\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 为 3×3 的单位阵。

将式(39)和式(42)代入式(41)可得

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}, \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \int_0^l & \left[EA \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} + EI_y \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_y}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_y}}{\partial x} + EI_z \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_z}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_z}}{\partial x} + \right. \\ & EI_\omega \left(\frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} + GJ \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} + GA_{yy} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x} - \mathbf{N}_{\theta_z} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x} - \mathbf{N}_{\theta_z} \right) + \\ & GA_{zz} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} + \mathbf{N}_{\theta_y} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} + \mathbf{N}_{\theta_y} \right) + GA_{\omega\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right) + \\ & GA_{yz} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x} - \mathbf{N}_{\theta_z} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} + \mathbf{N}_{\theta_y} \right) + GA_{yz} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} + \mathbf{N}_{\theta_y} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x} - \mathbf{N}_{\theta_z} \right) + \\ & GA_{y\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x} - \mathbf{N}_{\theta_z} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right) + GA_{y\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x} - \mathbf{N}_{\theta_z} \right) + \\ & \left. GA_{z\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} + \mathbf{N}_{\theta_y} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right) + GA_{z\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\theta_x}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} + \mathbf{N}_{\theta_y} \right) \right] dx. \quad (45) \end{aligned}$$

这样得到的刚度矩阵中还包括内部结点参数对应的元素,所以要通过方程(44)将单元刚度矩阵中内部结点参数对应的元素凝聚掉。

5 算例验证

根据本文推导的单元模型由 C#. NET 编制了相应的有限元计算程序,通过算例与 beam 189 梁单元和 shell 181 壳单元进行对比和验证。

5.1 算例 1

图 3 所示悬臂薄壁截面梁在自由端受扭矩 $T = 1\,000\text{ N}\cdot\text{cm}$ 和横向力 $Q = -1\,000\text{ N}$ 作用,材料弹性模量 $E = 2.1 \times 10^7\text{ N/cm}^2$, Poisson 比 $\mu = 0.25$. 单元划分及计算结果对比如表 1 所示,同时表中给出了由材料力学和薄壁杆件理论计算的解析解。

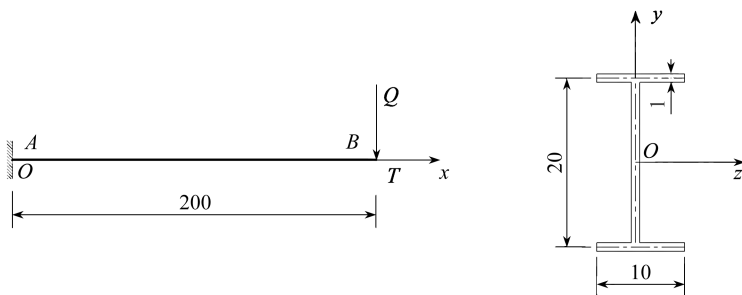


图 3 悬臂梁及其截面参数(单位:cm)

表 1 表明与精确的解析解相比,在 y 向位移上,本文所建单元模型较 beam 189 梁单元更准确;而在扭转位移和翘曲位移上,本文所建单元模型不仅较 beam 189 梁单元更准确,而且也

优于 shell 181 壳单元,几乎得到精确解。

表 1

计算结果对比

	单元数 N	竖向位移 v_s/cm^2	扭转角 θ_x/rad	翘曲角 θ/rad
解析解	-	-4.76×10^{-2}	1.29×10^{-3}	8.43×10^{-6}
Shell 181	1 280	-4.89×10^{-2}	1.32×10^{-3}	8.51×10^{-6}
本文模型	2	-4.97×10^{-2}	1.29×10^{-3}	8.42×10^{-6}
beam 189	2	-5.67×10^{-2}	1.33×10^{-3}	8.51×10^{-6}

翘曲角沿梁长度的分布对比如图 4 所示。

从图 4 可以看出,按照本文模型计算的梁单元翘曲角与按照薄壁杆件约束扭转理论的初参数法计算的结果基本一致,beam 189 梁单元计算的翘曲角精度在中间部分要略差一些。

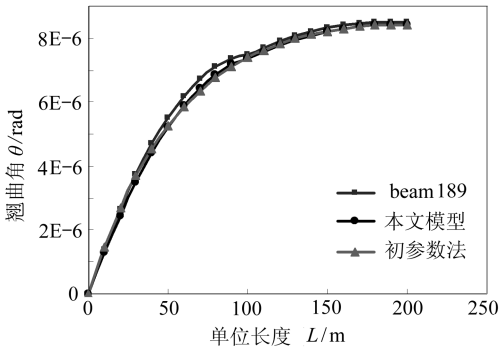


图 4 翘曲角沿梁长的分布

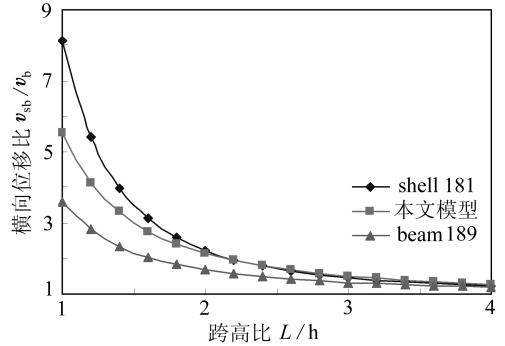


图 5 剪切变形影响

5.2 算例 2

5.2.1 剪切变形

对于图 3 所示的悬臂梁受横向荷载 $Q = -1\ 000\text{ N}$ 作用,如果将梁长视为变量,可得到不同跨高比(梁跨度与横截面高度的比值)情况下剪切变形影响的变化规律(如图 5 所示)。图中,横坐标为跨高比,纵坐标为本文模型、shell 181 和 beam 189 计算的横向位移与由材料力学计算的横向位移之比。

从图 5 可以看出,在跨高比较小的情况下,本文模型计算的结果更接近 shell 181 壳单元的计算结果,精度明显优于 beam 189 梁单元。

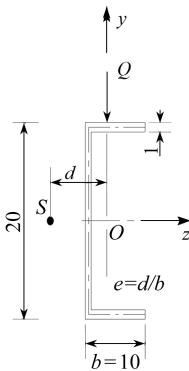


图 6 槽型截面(单位:cm)

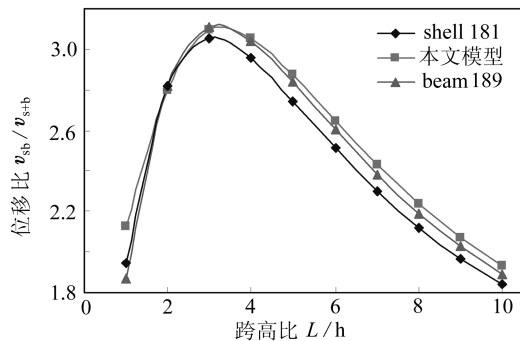


图 7 剪切变形耦合影响

5.2.2 耦合剪切变形

对于图 3 所示的悬臂梁, 如果是槽型截面(图 6), 并在自由端的截面形心处作用横向荷载 $Q = -1\ 000\ \text{N}$, 可得剪切变形耦合影响随跨高比的变化规律如图 7 所示. 图中, 横坐标为跨高比, 纵坐标为本文模型、shell 181 以及 beam 189 计算的横向位移与材料力学的横向位移之比.

从图 7 可以看出, 由于本文模型考虑了耦合剪切变形的影响, 所以其计算结果非常接近于 shell 181 的计算结果, 与 beam 189 相比, 具有更好的精度.

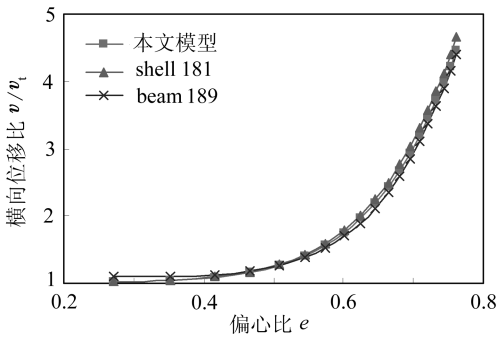


图 8(a) 弯扭耦合影响

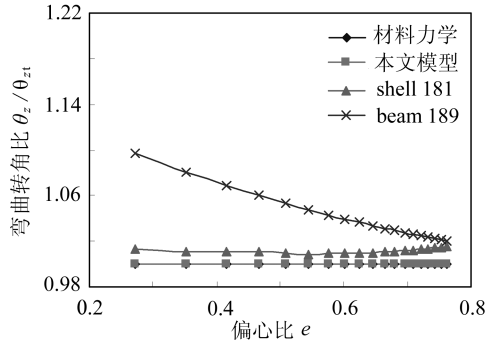


图 8(b) 弯扭耦合影响

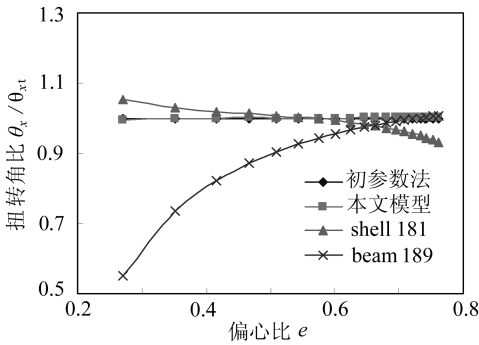


图 8(c) 弯扭耦合影响

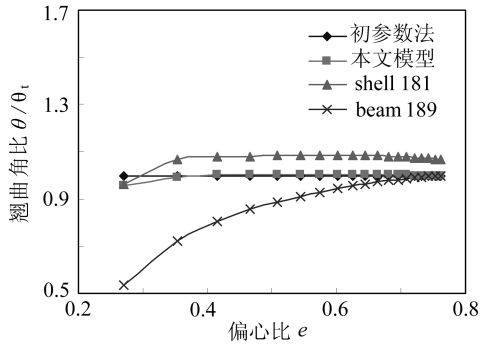


图 8(d) 弯扭耦合影响

5.2.3 弯扭耦合

对于图 6 所示的槽型截面的悬臂梁, 在自由端形心处受横向力 $Q = -1\ 000\ \text{N}$ 作用. 如果将梁长固定为 $l = 200\ \text{cm}$, 而翼缘宽度看为变量, 则可以得到弯扭耦合影响随偏心比(形心和剪心的距离与翼缘宽度的比值)的变化规律(图 8 所示). 图中横坐标为偏心比, 纵坐标分别为本文模型、shell 181 以及 beam 189 计算的横向位移、弯曲转角、扭转角和翘曲角与材料力学和薄壁杆件理论计算的相应广义位移的比值.

从图 8(a)可以看出本文模型、shell 181 以及 beam 189 计算的横向位移是基本一致的. 而从图 8(b)~8(d)可看到, 在考虑弯扭耦合的情况下, 本文计算的结果与解析解基本一致, 也非常接近 shell 181 壳单元的计算结果, 而与 beam 189 计算的结果有较大的差距, 尤其是在偏心比较小, beam 189 计算的弯曲转角偏大, 扭转角和翘曲角偏小, 也就是说在偏心

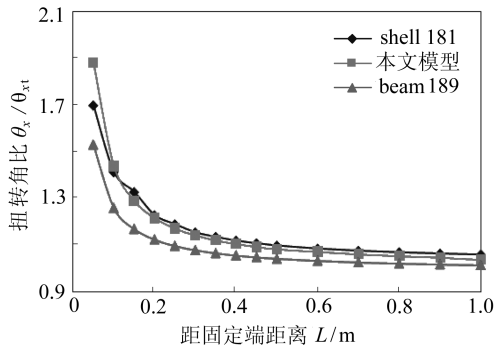


图 9 二次剪应力影响

比较小的情况下,beam 189 显得弯曲刚度过小而扭转刚度和翘曲刚度过大.这样,由 beam 189 计算的相应广义位移会有明显的误差.

5.2.4 二次剪应力

对于图 3 所示的工字型截面悬臂梁,自由端在扭矩 $T = 1\,000\text{ N}\cdot\text{cm}$ 作用下,由本文模型、shell 181,以及 beam 189 计算的扭转角与初参数法计算的扭转角的比值随与固端约束的距离变化曲线如图 9 所示.

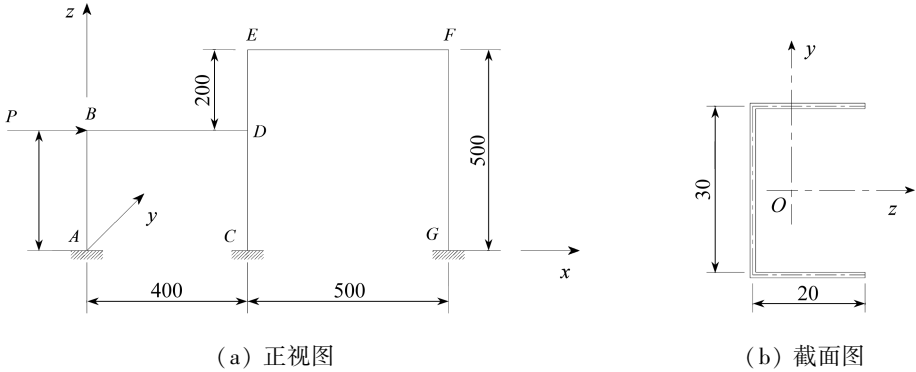


图 10 平面框架(单位:cm)

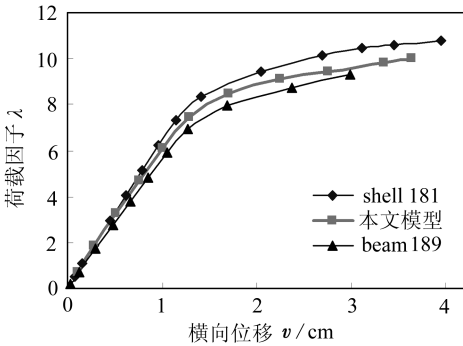


图 11(a) 荷载与 B 点 y 方向横向位移关系曲线

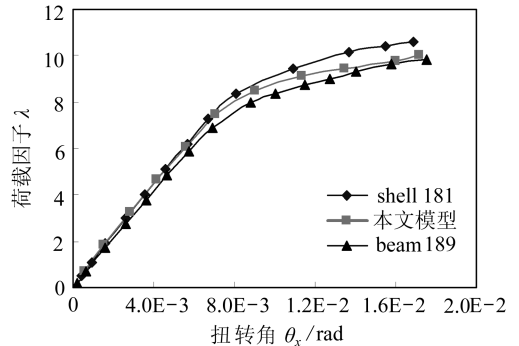


图 11(b) 荷载与 B 点扭转角关系曲线

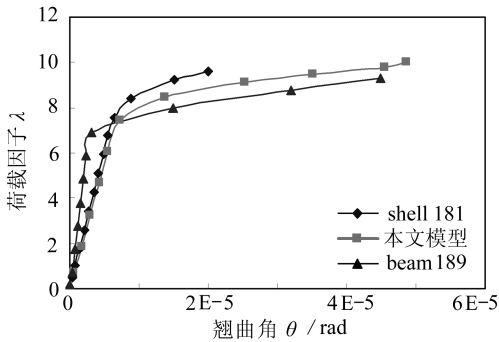


图 11(c) 荷载与 B 点翘曲关系曲线

从图 9 可以看出,本文模型由于考虑了二次剪应力的影响其计算结果与 beam 189 相比更接近 shell 181 壳单元的计算结果.

5.3 算例 3

图 10 所示的槽型截面刚架在 A, C, G 点处固定,在 B 点作用一水平荷载 P,过截面形心且 $P = 25\,000\text{ N}$,方向沿 x 轴正向.在考虑双重非线性情况下计算的位移曲线对比如图 11 所示.

从图 11 可以看出本文模型与 beam 189 相比更接近 shell 181 的计算结果,表现出良好的计算精度.

6 结 语

本文基于 Timoshenko 梁理论和 Vlasov 薄壁杆件约束扭转理论,建立了具有内部结点自由度的新型空间薄壁截面梁单元。通过对弯曲转角和翘曲角采用独立插值的方法,考虑了剪切变形及其耦合作用、弯扭耦合以及二次剪应力等因素的影响。由 Hellinger-Reissner 广义变分原理,推得单元刚度矩阵。根据所建模型,由面向对象语言 C#. NET 编制了相应的有限元程序。算例表明,本文模型是精确的、可靠的,计算结果非常接近理论解和 shell 181 的数值解。由于考虑了上述各个因素的影响,在计算精度和应用范围方面要优于 beam 189 梁单元。可用于薄壁梁不同跨高比的情况及其截面具有对称轴和不具有对称轴的情况。而且其分析结果在翘曲约束附近也是正确的,具有良好的精度。

参考文献:

- [1] Magnucka-Blandzi E. Critical state of a thin-walled beam under combined load[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(7): 3093-3098.
- [2] Setiyono H. An alternative approach to the analytical determination of the moment capacity of a thin-walled channel steel section beam[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, **50**(8): 1280-1291.
- [3] Setiyono H. Plastic mechanism and elastic-analytical approaches applied to estimate the strength of an axially compressed-thin-walled channel steel section beam[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, **49**(3): 257-266.
- [4] Bottoni M, Mazzotti C, Savoia M. A finite element model for linear viscoelastic behaviour of pultruded thin-walled beams under general loadings[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(3/4): 770-793.
- [5] Wang X F, Yang Q S. Geometrically nonlinear finite element model of spatial thin-walled beams with general open cross section[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2009, **22**(1): 64-72.
- [6] Emre E R, Mohareb M. Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects[J]. *Thin-Walled Structures*, 2007, **44**(10): 1096-1108.
- [7] Mohri F, Damil N, Ferry M P. Large torsion finite element model for thin-walled beams[J]. *Computers and Structures*, 2008, **86**(7/8): 671-683.
- [8] Mohri F, Eddinari A, Damil N, Potier F M. A beam finite element for non-linear analyses of thin-walled elements[J]. *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(7/9): 981-990.
- [9] Yau J D. Lateral buckling analysis of angled frames with thin-walled I-beams[J]. *Journal of Marine Science and Technology*, 2009, **17**(1): 29-33.
- [10] Mohri F, Bouzerira C, Potier-Ferry M. Lateral buckling of thin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads[J]. *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(3): 290-302.
- [11] Ruta G C, Varano V, Pignataro M, Rizzi N L. A beam model for the flexural-torsional buckling of thin-walled members with some applications[J]. *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(7/9): 816-822.
- [12] Machado S P. Non-linear buckling and postbuckling behavior of thin-walled beams considering shear deformation[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, **43**(5): 345-365.
- [13] Goncalves R, Camotim D. Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalised

- beam theory[J]. *Advances in Engineering Software*, 2007, **38**(8/9): 637-646.
- [14] Tralli A. Simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams[J]. *Computers and Structures*, 1986, **22**(4):649-658.
- [15] Back S Y, Will K M. Shear-flexible element with warping for thin-walled open beams[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **43**(7): 1173-1191.
- [16] Gendy A S, Saleeb A F, Chang T Y P. Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis[J]. *Computers and Structures*, 1992, **42**(4):531-550.
- [17] Hong C, Blandford G E. C_0 finite element formulation for thin-walled beams[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, **28**(10):2239-2255.
- [18] Hu Y R, Jin X D, Chen B Z. Finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections[J]. *Computers and Structures*, 1996, **61**(5): 897-908.
- [19] Minghini F, Tullini N, Laudiero F. Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **72**(7): 808-834.
- [20] Kim N, Kim M Y. Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects[J]. *Thin-Walled Structures*, 2005, **43**(5):701-734.

New Finite Element of Spatial Thin-Walled Beams

WANG Xiao-feng¹, ZHANG Qi-lin¹, YANG Qing-shan²

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University,
Beijing 100044, P. R. China)

Abstract: Based on the theories of Timoshenko's beams and Vlasov's thin-walled members, a new spatial thin-walled beam element with an interior node was developed. By independently interpolating bending angles and warp, factors such as transverse shear deformation, torsional shear deformation and their coupling, coupling of flexure and torsion, and second shear stress were all considered. According to the generalized variational theory of Hellinger-Reissner, the element stiffness matrix was deduced. Examples manifest that the developed model is accurate and can be applied in the finite element analysis of thin-walled structures.

Key words: spatial beams; thin-walled section; stiffness matrix; shear deformation; coupling of flexure and torsion; second shear stress