

# 伴有排水的两相饱和介质动力问题的 LAMB 积分公式\*

丁伯阳<sup>1</sup>, 党改红<sup>2</sup>, 袁金华<sup>1</sup>

(1. 浙江工业大学 减灾防护工程研究所, 杭州 310014;

2. 浙江农林大学 土木工程系, 杭州 311300)

(程昌钧推荐)

**摘要:** 饱和土在动力作用下伴有排水的反应是工程中常见的现象. 由于饱和土以两相饱和介质模拟, 在已经求得的集中力作用下, 两相饱和介质基本解 Green 函数和三项流相 Green 函数基础上, 由 Betti 定理出发, 推出排水问题的 Lamb 积分公式和应力公式, 并代入相关参数, 通过计算得到了中心扩张源问题的位移场、排水状态、孔隙压力等解答. 最后给出了当两相介质蜕化为单相介质后, 与经典解答比较的结果.

**关键词:** 爆炸场; 排水; 动力反应; Lamb 积分

**中图分类号:** O39; TU435 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.09.007

## 引言

饱和土在动力作用下伴有排水的反应是工程中常见的现象, 如在饱和土中打桩会冒水; 饱和砂土在地震作用下液化时也会喷砂冒水. 自从上世纪 70 年代有关的动力问题的 Green 函数边界元法完成后, 人们认识到利用 Green 函数边界元法能够进行饱和土排水动力反应计算, 关键是需要求得模拟饱和土的两相饱和介质动力学方程的有关固相与流相 Green 函数以及相应的 Lamb 积分公式<sup>[1-2]</sup>, 通过离散的边界单元对 Lamb 积分以代数法求解得到结果. 从 1956 年 Biot 提出动力学方程<sup>[3-4]</sup>后, 关于两相饱和介质动力学 Green 函数有着一系列的研究, 如 Cleary<sup>[5]</sup>、Burridge 和 Vargas<sup>[6]</sup>等. 而在上世纪 80 年代中叶, Norris<sup>[7]</sup>在 Burridge(1979)工作的基础上, 根据  $\delta$  函数的性质, 推导出了两相饱和介质在点荷载作用下的快、慢纵波谱, 剪切波谱的 Green 函数解答, 详细讨论了各种条件情况下的近似解, 工作具有开拓性, 可惜所得的仅是两相介质固相的 Green 函数(即基本解  $G_{ij}$ ), 不能计算排水. 其后 Chen<sup>[1-2]</sup>采用了 Biot 方程的 Laplace 变换形式, 根据具有  $\delta$  函数非齐次项方程解的连续, 解的一阶导数不连续特性, 利用修正的 Bessel 函数, 得到了两相饱和介质位移场 Green 函数, 其中包含 3 项流相 Green 函数  $G_{4i}$ ,  $G_{i4}$ ,  $G_{44}$ . 即得到了在源点  $\zeta$  的  $i$  方向作用单位阶跃力, 在场点  $x$  的孔隙中产生的流体压力变化;

\* 收稿日期: 2009-12-24; 修订日期: 2010-07-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572129)

作者简介: 丁伯阳(1949—), 男, 浙江绍兴人, 教授(联系人. E-mail: dingboyang@hzcnec.com).

在源点  $\zeta$  的孔隙中注入单位体积的流体,在场点  $\mathbf{x}$  产生的  $i$  方向的位移和压力的解答.连同基本解  $G_{ij}$ , Chen 给出了 4 项有关两相饱和介质的 Green 函数,并结合 Betti 定理提出了相关的 Lamb 积分,这些公式都具有极其重要的意义.但 Chen 的解答是一个复杂数学表达式,在表达式中难以确立排水与不排水的数学物理条件,并且 Chen 的积分公式也是不排水状态的.有鉴于此,伴随排水的动力反应的相关文章就相对较少.本文借助 Green 函数的时序与互易特性,推出排水问题的 Lamb 积分公式.根据已求得的两相饱和介质的 Green 函数解析解<sup>[8]</sup>,以 Chen 的归一化参数代入计算,得到了中心扩张源问题在球坐标下伴随排水的位移场、排水状态、孔隙压力等解答.最后当两相介质蜕化为单相介质后,本文给出了与经典解答比较的吻合结果.

## 1 两相饱和介质及 Lamb 公式

### 1.1 相关公式的推导与介绍

两相饱和介质 Biot 动力学方程可写为<sup>[1-2]</sup>

$$\sigma_{ij,j} + g_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha p \delta_{ij}, \quad (2)$$

式中,  $\lambda, \mu$  是 Lamé 系数;  $\alpha$  是 Biot 在两相介质研究中引入的参量;  $u_i, w_i$  分别为固相位移和流相相对渗流位移矢量,  $\ddot{u}_i, \ddot{w}_i$  为固相和流相相对位移的时间二阶导数;  $\rho, \rho_f$  为两相与流相物质密度;  $\sigma_{ij}$  是两相饱和介质的应力,  $g_i$  是  $i$  方向的体力;  $\delta_{ij}$  是 Kronecker- $\delta$  符号.如果设  $k_s, k_f$  和  $k_b$  分别是固相、流相及两相体积弹性模量,  $\beta_0$  是孔隙度,那么还有<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \lambda_c = (k_s - k_b)^2 / (D - k_b) + k_b - 2\mu/3 = \lambda + \alpha^2 M, & M = k_s^2 / (D - k_b), \\ \alpha = (k_s - k_b) / k_s = 1 - \beta_0, & D = k_s [1 + (k_s/k_f - 1)\beta_0], \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\lambda_c, \mu, \alpha, M$  可视为 4 个独立的弹性常数,  $M$  是 Biot 在两相介质研究中引入的参量.并由文献[9],

$$\gamma(\omega) = \alpha_0(\omega) \rho_f / \beta_0 + \eta_0 i / \omega k_d(\omega), \quad (4)$$

$\alpha_0(\omega)$  为动态孔隙弯曲度,  $\eta_0$  为粘滞系数,  $k_d$  为渗透率,  $\omega$  为频率.另外 Darcy 定律可以表示为<sup>[1-2]</sup>

$$\dot{w}_i = -\kappa (p_{,i} + \rho_f \dot{u}_i + m \dot{w}_i), \quad (5)$$

这里,  $\kappa = k/\eta$  为渗透系数,而  $\eta$  和  $k$  分别是反映动力粘滞性和固体骨架自身渗透率的物理参数,  $m$  是每单位两相介质体积的流体含量,  $m = \rho_f / \beta_0$ <sup>[1]</sup>, 式(5)还可以写为

$$p_{,i} + \rho_f \dot{u}_i + m \dot{w}_i + \dot{w}_i / \kappa = 0. \quad (6)$$

当我们假定

$$m \dot{w}_i + \dot{w}_i / \kappa = \gamma(\omega) \ddot{w}_i, \quad (7)$$

可以得到(注意符号变化)

$$p_{,i} = \rho_f \ddot{u}_i + \gamma(\omega) \ddot{w}_i. \quad (8)$$

孔隙压力  $p$  应该有两部分,即

$$p = p_d + p_f, \quad (9)$$

$p_d$  为变形压力,它维持着两相饱和介质的变形,  $p_f$  是流体压力,它用于流体流进和流出空隙.根据 Biot 参数  $M$  的定义,压力  $p_f$  能够表示为

$$p_f = M \int_{t_1}^{t_2} \chi dt, \quad (10)$$

如式(10)中流量 $\chi$ 保持不变,  $\chi = \text{const}$ , 即流体流进和流出两相饱和介质孔隙时, 流场对于时间的导数没有变化, 是一个稳定的流场, 式(10)能够写成下面的形式:

$$p_f = M\chi t \Big|_{t_1}^{t_2} = M\chi T, \quad (11)$$

这里  $T$  为流进或流出两相介质孔隙的时间. 如果定流进为正, 流出为负, Darcy 定律还能够写为<sup>[1-2]</sup>

$$-\dot{p}/M + \alpha \dot{u}_{k,k} + \dot{w}_{k,k} = \chi. \quad (12)$$

对于  $p$  我们还有<sup>[3-4]</sup>

$$p = \alpha M u_{k,k} + M w_{k,k}. \quad (13)$$

结合式(1)和式(2), 可以得到 Biot 动力学方程<sup>[4,9-10]</sup>:

$$\begin{cases} (\lambda_c + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,ji} + \alpha M w_{j,ij} = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i, \\ \alpha M u_{j,ij} + M w_{j,ij} = \rho_f \ddot{u}_i + \gamma(\omega) \ddot{w}_i, \end{cases} \quad (14)$$

对于式(14), 当  $u_i, w_i$  是无散场分量时, 有<sup>[10-12]</sup>

$$\rho_f \ddot{u}_i + \gamma(\omega) \ddot{w}_i = 0, \quad (15)$$

$$w_i = -\rho_f u_i / \gamma(\omega). \quad (16)$$

对于无旋场, 可以假定  $u_i, w_i$  为<sup>[9-10]</sup>

$$\begin{cases} u_{i1} + u_{i2} = u_i, \\ \xi_1 u_{i1} + \xi_2 u_{i2} = w_i, \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $u_{i1}, u_{i2}$  分别为快纵波和慢纵波的位移, 而<sup>[10]</sup>

$$\xi_n = [\lambda_c + 2\mu - \rho(\alpha n)^2] / [\rho_f(\alpha n)^2 - \alpha M] \quad (n = 1, 2), \quad (18)$$

式中,  $\alpha_1, \alpha_2$  分别为快纵波速与慢纵波速<sup>[9]</sup>.

根据式(14), 我们已求得两相饱和介质在集中力作用下的位移 Green 函数为<sup>[10-11]</sup>

$$G_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, \omega) = \frac{1}{4\pi\omega^2} \left\{ \frac{1}{\rho - \rho_f^2/\gamma} \delta_{ikm} \delta_{mlj} (e^{-ik\beta r}/r)_{j,ik} + (-1)^n \frac{\lambda_n}{\rho + \rho_f \xi_n} (e^{-ik\alpha n r}/r)_{j,ji} \right\}, \quad (19)$$

这里,  $\lambda_n = (1 + \xi_n) / (\xi_1 - \xi_2)$  ( $n = 1, 2$ );  $r$  是源点到场点的距离,  $r^2 = (x_i - \zeta_i)(x_i - \zeta_i)$ ,  $r_i = x_i - \zeta_i$ ;  $\delta_{ijk}$  为置换张量,  $i$  是虚数单位; 另外  $n$  为脚码时要作求和下标处理. 当  $\rho_f = 0, \lambda_c = \lambda$  时, 式(18)也会蜕化为 Aringen 所给的单相介质形式<sup>[13]</sup>, 即

$$G_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, \omega) = \left\{ - (e^{-ik\alpha r}/r)_{j,ji} + \delta_{ikm} \delta_{mlj} (e^{-ik\beta r}/r)_{j,ik} \right\} / (4\pi\rho\omega^2). \quad (20)$$

已证明对于工程问题  $\gamma(\omega)$  与频率无关<sup>[10-11]</sup>, 动力学方程(14)中第2式的 Fourier 变换形式为

$$\tilde{w}_i = (\delta_{ij} \tilde{p}_{,j} - \rho_f \omega^2 \tilde{u}_i) / (\gamma \omega^2), \quad (21)$$

亦即

$$\tilde{w}_i = (\tilde{p}_{,i} - \rho_f \omega^2 \tilde{u}_i) / (\gamma \omega^2), \quad (22)$$

$\gamma$  是  $\gamma(\omega)$  的常数值, 根据式(13)可得

$$\tilde{w}_{k,k} - \tilde{p}/\alpha + M \tilde{u}_{k,k} = 0. \quad (23)$$

## 1.2 Betti 定理与 Lamb 积分公式

在式(1)中, 如果令第一状态体积力为  $\mathbf{g}^{(1)}$ , 位移解为  $\mathbf{u}^{(1)}$ , 相应边界面上的面力为  $\mathbf{t}^{(1)}$ ; 而第二状态体积力为  $\mathbf{g}^{(2)}$ , 位移解是  $\mathbf{u}^{(2)}$ , 相应边界面上的面力为  $\mathbf{t}^{(2)}$ , 且令  $w_{i,i}^{(n)} = \xi^{(n)}$ ,  $\xi$  为流相

体应变. 我们有

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + \delta_{ij}\alpha M\xi_{,j}^{(n)} + g_i^{(n)} = \rho\ddot{u}_i^{(n)} + \rho_f\ddot{w}_i^{(n)}, \quad (24)$$

这样可得

$$\begin{aligned} & \iiint_v (g_i^{(1)} - \rho\ddot{u}_i^{(1)} - \rho_f\ddot{w}_i^{(1)} + \delta_{ij}\alpha M\xi_{,i}^{(1)})\ddot{u}_i^{(2)} dv + \iint_s t_i^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)} ds = \\ & - \iiint_v \sigma_{ij,j}^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)} dv + \iint_s \sigma_{ij}^{(1)} n_j\ddot{u}_i^{(2)} ds = \\ & - \iiint_v \sigma_{ij,j}^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)} dv - \iint_v (\sigma_{ij}^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)})_{,j} dv = \\ & - \iiint_v \sigma_{ij,j}^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)} dv + \iiint_v \sigma_{ij,j}^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)} dv + \iiint_v \sigma_{ij}^{(1)}\ddot{u}_{i,j}^{(2)} dv = \\ & \iiint_v c_{ijpq}u_{p,q}^{(1)}\ddot{u}_{i,j}^{(2)} dv, \end{aligned} \quad (25)$$

式中  $c_{ijpq}$  为弹性系数张量, 根据 Biot 推导<sup>[3-4]</sup>

$$\begin{aligned} c_{ikpq} &= \lambda_c \delta_{ik} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{kq} + \delta_{iq} \delta_{kp}) - \alpha p \delta_{ik} \delta_{pq} = \\ & (\lambda_c - \alpha p) \delta_{ik} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{kq} + \delta_{iq} \delta_{kp}). \end{aligned} \quad (26)$$

同理可证

$$\begin{aligned} & \iiint_v (g_i^{(2)} - \rho\ddot{u}_i^{(2)} - \rho_f\ddot{w}_i^{(2)} + \delta_{ij}\alpha M\xi_{,i}^{(2)})\ddot{u}_i^{(1)} dv + \iint_s t_i^{(2)}\ddot{u}_i^{(1)} ds = \\ & \iiint_v c_{ijpq}u_{p,q}^{(2)}\ddot{u}_{i,j}^{(1)} dv. \end{aligned} \quad (27)$$

所以

$$\begin{aligned} & \iiint_v (g_i^{(1)} - \rho\ddot{u}_i^{(1)} - \rho_f\ddot{w}_i^{(1)} + \delta_{ij}\alpha M\xi_{,i}^{(1)})\ddot{u}_i^{(2)} dv + \iint_s t_i^{(1)}\ddot{u}_i^{(2)} ds = \\ & \iiint_v (g_i^{(2)} - \rho\ddot{u}_i^{(2)} - \rho_f\ddot{w}_i^{(2)} + \delta_{ij}\alpha M\xi_{,i}^{(2)})\ddot{u}_i^{(1)} dv + \iint_s t_i^{(2)}\ddot{u}_i^{(1)} ds, \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)也是两相饱和介质的 Betti 定理. 另外 Chen 已得 Betti 定理(倒易定理)的 Fourier 变换形式<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} & \iint_s i\omega \tilde{t}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} ds + \iiint_v i\omega \tilde{g}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} dv + \iint_s \tilde{p}^{(1)} \ddot{w}_i^{(2)} ds - \iint_v \tilde{\chi}^{(1)} \tilde{p}^{(2)} dv = \\ & \iint_s i\omega \tilde{t}_i^{(2)} \tilde{u}_i^{(1)} ds + \iiint_v i\omega \tilde{g}_i^{(2)} \tilde{u}_i^{(1)} dv + \iint_s \tilde{p}^{(2)} \tilde{w}_i^{(1)} ds - \iint_v \tilde{\chi}^{(2)} \tilde{p}^{(1)} dv, \end{aligned} \quad (29)$$

其时域还有

$$\begin{aligned} & \iiint_v (g_i^{(2)} * \dot{u}_i^{(1)} - g_i^{(1)} * \dot{u}_i^{(2)}) dv = \\ & \iint_s [ (t_i^{(1)} * \dot{u}_i^{(2)} - t_i^{(2)} * \dot{u}_i^{(1)}) + (p^{(1)} * w_i^{(2)} - p^{(2)} * w_i^{(1)}) ] ds - \\ & \iiint_v (\chi^{(1)} * p^{(2)} - \chi^{(2)} * p^{(1)}) dv. \end{aligned} \quad (30)$$

这里 \* 是卷积符号. 如令  $u_{i3} = 0, \xi_3 = 0$ , 式(17) 可写为  $u_i = u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}$ , 则  $w_i = \xi_k u_{ik}$ . 由流体力学知  $\chi = w_{i,i} = \xi_k u_{ik,i}$ <sup>[8]</sup>, 因此有

$$\begin{aligned} & \iiint_v (g_i^{(2)} * \dot{u}_i^{(1)} - g_i^{(1)} * \dot{u}_i^{(2)}) dv = \\ & \iint_s [ (t_i^{(1)} * \dot{u}_i^{(2)} - t_i^{(2)} * \dot{u}_i^{(1)}) + (p^{(1)} * \xi_k u_{ik}^{(2)} - p^{(2)} * \xi_k u_{ik}^{(1)}) ] ds - \end{aligned}$$

$$\iiint_v (\xi_k u_{ik,i}^{(1)} * p^{(2)} - \xi_k u_{ik,i}^{(2)} * p^{(1)}) dv. \quad (31)$$

当在源点作用集中力,

$$g_i^{(2)}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}) \delta(t), \quad (32)$$

Boit 动力方程解为

$$\dot{u}_i^{(2)} = \dot{G}_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t), \quad p^{(2)} = G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t). \quad (33)$$

由 Green 函数的时序性, 初始条件为  $\tau \leq t$  及  $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\zeta}$ , 有

$$G_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t)|_{t=0} = 0, \quad \dot{G}_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t)|_{t=0} = 0.$$

在自然构形状态<sup>[14]</sup>,  $G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t)|_{t=0} = 0$  可得

$$\begin{aligned} u_m = & \int_0^t \left\{ \iiint_v g_i^{(1)} * \dot{G}_{im} dv + \iint_s [(t_i^{(1)} * \dot{G}_{im} - t_i^{(2)} * \dot{u}_i^{(1)}) + \right. \\ & (p^{(1)} * \xi_k G_{(ik)m} - G_{4i} * \xi_k u_{ik}^{(1)})] ds - \\ & \left. \iiint_v [\xi_k u_{(ik),i}^{(1)} * G_{4i} - \xi_k G_{(ik)m,i} * p^{(1)}] dv \right\} dt. \end{aligned} \quad (34)$$

由于倒易定理的两组力学量可以互易, 且不必在同一时刻, 所以对场点进一步可以写为

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{x}) = & \int_0^t \left\{ \iiint_v g_i * \dot{G}_{im} dv + \right. \\ & \left. \iint_s [(t_i * \dot{G}_{im} - \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}) * c_{ikpq} l_k G_{pm,q}) + (p * \xi_k G_{(ik)m} - G_{4i} * \xi_k u_{ik}(\boldsymbol{\zeta}))] ds - \right. \\ & \left. \iiint_v [\xi_k u_{(ik),i}(\boldsymbol{\zeta}) * G_{4i} - \xi_k G_{(ik)m,i} * p] dv \right\} dt. \end{aligned} \quad (35)$$

式(35)已将上角标(1)和(2)全部省略. 同时上两式中  $G_{(ik)m}$  表示  $G_{im}$  中与  $u_{ik}$  对应的项.  $l_k$  为所在面的法线方向余弦. 式(35)也可写为

$$\begin{aligned} c_m(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x}, t) = & \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iiint_v g_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) dv + \right. \\ & \left. \iint_s [(t_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \sigma_{im}(\mathbf{x}, \tau) \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)) + \right. \\ & (p(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \xi_k G_{(ik)m}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) \xi_k u_{ik}(\boldsymbol{\zeta}, \tau))] ds - \\ & \left. \iiint_v [\xi_k u_{(ik),i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau) G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \right. \\ & \left. \xi_k G_{(ik)m,i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) p(\boldsymbol{\zeta}, \tau)] dv \right\} d\tau dt. \end{aligned} \quad (36)$$

如果不计体力, 则

$$\begin{aligned} c_m(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x}, t) = & \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iiint_s [(t_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \right. \\ & \sigma_{im}(\mathbf{x}, \tau) \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)) + (p(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \xi_k G_{(ik)m}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \\ & G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) \xi_k u_{ik}(\boldsymbol{\zeta}, \tau))] ds - \iiint_v [\xi_k u_{(ik),i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau) G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \\ & \left. \xi_k G_{(ik)m,i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) p(\boldsymbol{\zeta}, \tau)] dv \right\} d\tau dt, \end{aligned} \quad (37)$$

这里,  $\sigma_{ij}$  是所求域的应力, 而  $c_m(\mathbf{x})$  是积分参数, 它分别等于 0 (场点在积分域外), 0.5 (场点在积分域边界上), 1 (场点在积分域内). 相似于位移的求解, 在不计体力的情况下同样可得

$$c_m(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iiint_v [\xi_k u_{(ik),i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau) G_{44}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)] dv + \right.$$

$$\iint_s \left[ (t_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \sigma_{i4}(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)) + (p(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \xi_k G_{(ik)4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - G_{44}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) \xi_k u_{ik}(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)) \right] ds \} d\tau, \quad (38)$$

式(37)与式(38)即为伴有排水的 Lamb 公式. 当  $G_{i4}, G_{44}$  为 0 即为不排水的状态<sup>[1]</sup>.

应力解的形式可写为

$$\sigma_{il}^k = \lambda_c G_{mk,m} \delta_{il} + \mu (G_{ik,l} + G_{lk,i}) - \alpha p \delta_{il}, \quad (39)$$

$\sigma_{il}^k$  是一个 3 阶张量, 它表示着源点  $\boldsymbol{\zeta}$  作用着  $k$  方向的集中力, 在  $\mathbf{x}$  场点的  $i$  方向面内  $l$  方向应力, 由于源点的 3 个作用力方向都可产生应力  $\sigma_{il}$ , 应力可由式(40)表达.

$$\sigma_{il} = [\lambda_c G_{mk,m} \delta_{il} + \mu (G_{ik,l} + G_{lk,i})] l_k - \alpha p \delta_{il}, \quad (40)$$

式中  $l_k$  是前面所定义的平面法向余弦. 将式(19)的 Green 函数时域表达式<sup>[15]</sup>代入式(40), 再经较为繁琐的演算, 并记  $\sigma_{ij} = \sigma_{il}$ , 有

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (4\pi)^{-1} \left\{ \lambda_1 d_{ij}(r) g\left(t - \frac{r}{\alpha 1}\right) + \lambda_2 d'_{ij}(r) g\left(t - \frac{r}{\alpha 2}\right) + e_{ij}(r) g\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \right. \\ & f_{ij}(r) \left[ A \int_{r/\alpha 1}^{\infty} g(t - \tau) \tau d\tau - B \int_{r/\beta}^{\infty} g(t - \tau) \tau d\tau + C \int_{r/\alpha 2}^{\infty} g(t - \tau) \tau d\tau \right] + \\ & \left. \lambda_1 g_{ij}(r) \dot{g}\left(t - \frac{r}{\alpha 1}\right) + \lambda_2 g'_{ij}(r) \dot{g}\left(t - \frac{r}{\alpha 2}\right) + h_{ij}(r) \dot{g}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} d_{ij}(r) = & \left( \frac{2}{(\alpha 1)^2} \frac{\mu}{\rho + \rho_t \xi_1} - \frac{1}{(\alpha 1)^2} \frac{\lambda_c}{\rho + \rho_t \xi_1} \right) \frac{r_j l_i}{r^3} - \\ & \frac{\mu}{\rho + \rho_t \xi_1} \frac{1}{(\alpha 1)^2} \left( 12 \frac{r_i r_j r_m l_m}{r^5} - 2 \frac{r_j l_i + r_i l_j + \delta_{ij} r_m l_m}{r^3} \right), \quad (42a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'_{ij}(r) = & \left( \frac{2}{(\alpha 2)^2} \frac{\mu}{\rho + \rho_t \xi_2} - \frac{1}{(\alpha 2)^2} \frac{\lambda_c}{\rho + \rho_t \xi_2} \right) \frac{r_j l_i}{r^3} - \\ & \frac{\mu}{\rho + \rho_t \xi_2} \frac{1}{(\alpha 2)^2} \left( 12 \frac{r_i r_j r_m l_m}{r^5} - 2 \frac{r_j l_i + r_i l_j + \delta_{ij} r_m l_m}{r^3} \right), \quad (42b) \end{aligned}$$

$$e_{ij}(r) = \frac{\mu}{\rho - \rho_t^2/\gamma(w)} \frac{1}{\beta^2} \left( 12 \frac{r_i r_j r_m l_m}{r^5} - 2 \frac{r_j l_i}{r^3} - 3 \frac{r_i l_j + \delta_{ij} r_m l_m}{r^3} \right), \quad (42c)$$

$$f_{ij}(r) = -6 \left( 5 \frac{r_i r_j r_m l_m}{r^5} - \frac{r_j l_i + r_i l_j + \delta_{ij} r_m l_m}{r^3} \right), \quad (42d)$$

$$g_{ij}(r) = -\frac{1}{(\alpha 1)^3} \frac{2\mu}{\rho + \rho_t \xi_1} \frac{r_i r_j r_m l_m}{r^4} + \frac{1}{(\alpha 1)^3} \left( \frac{2\mu}{\rho + \rho_t \xi_1} - \frac{\lambda_c}{\rho + \rho_t \xi_1} \right) \frac{r_j l_i}{r^2}, \quad (42e)$$

$$h_{ij}(r) = \frac{2}{\beta^3} \frac{\mu}{\rho - \rho_t^2/\gamma} \frac{r_i r_j r_m l_m}{r^4} - \frac{1}{\beta^3} \frac{\mu}{\rho - \rho_t^2/\gamma} \frac{r_i l_j + \delta_{ij} r_m l_m}{r^2}, \quad (42f)$$

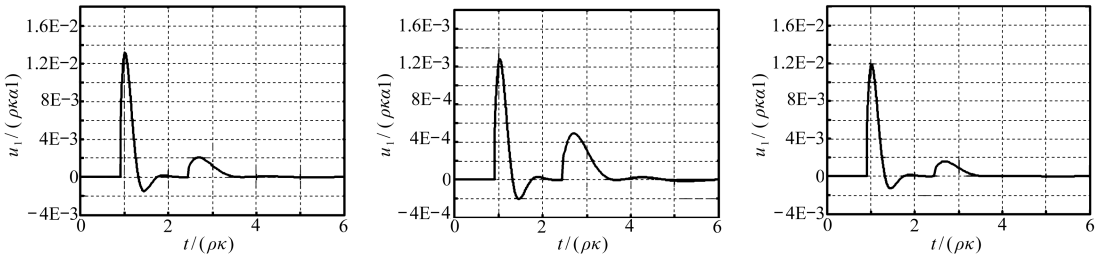
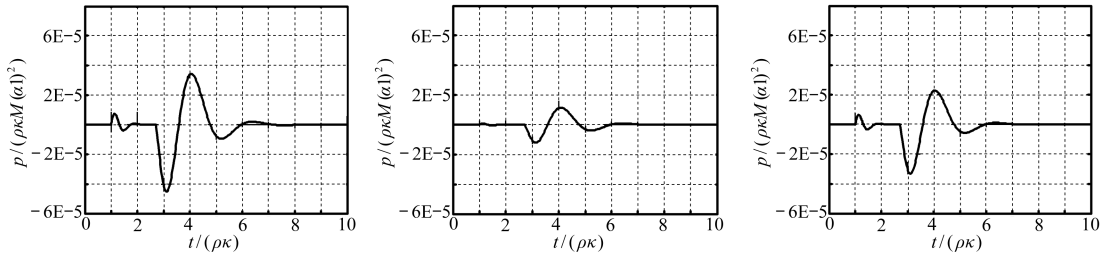
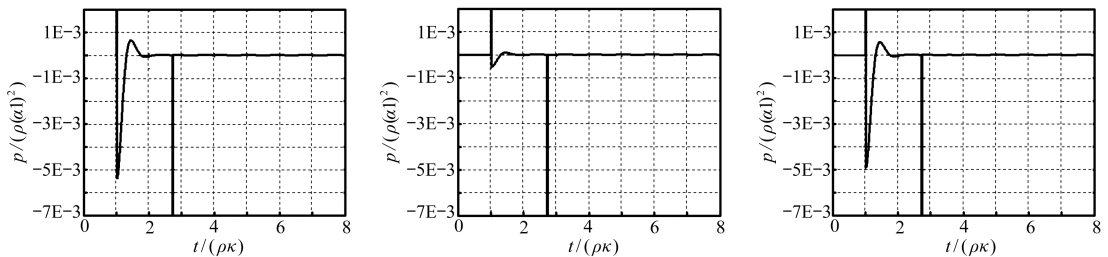
$$A = \frac{\mu}{\rho - \rho_t \xi_1}, \quad B = \frac{\mu}{\rho - \rho_t^2/\gamma}, \quad C = \frac{\mu}{\rho - \rho_t \xi_2}. \quad (42g)$$

另外,  $r_i, r_j$  的定义见文献[13].

## 2 公式计算结果

相似于不排水问题<sup>[15-17]</sup>, 式(36)、式(38)和式(41)可用于排水动力反应计算. 图 1 是无

限两相饱和和介质中,排水爆炸振动位移  $U_i = u_i/(\rho\kappa\alpha_1)$  与时间  $\tau = t/(\rho\kappa)$  (横轴)关系的无量纲计算结果.在计算中利用文献[8]两相饱和介质 Green 函数解析解在球坐标下的结果.爆炸力无量纲量为  $T_r/P_0$ .遵照文献[1]取其余无量纲量为  $\lambda^* = \lambda/(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)$ ,  $\mu^* = \mu/(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)$ ,  $M^* = M/(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)$ ,  $\rho^* = 1$ ,  $\rho_f^* = \rho_f/\rho$ ,  $R^* = 1$ ,  $P_0^* = 1$ ,  $k^* = 1$ .而:  $\lambda^* = 0.1715$ ,  $\mu^* = 0.3007$ ,  $M^* = 0.3742$ ,  $\rho^* = 1.0$ ,  $\rho_f^* = 0.4325$ ,  $\kappa^* = 1.0$ ,  $\alpha = 0.779$ , 则无量纲快纵波 P1 波速  $\alpha_1 = 1.0$ , 慢纵波 P2 波速  $\alpha_2 = 0.368$ , 另取,  $\xi_1 = -0.1548$ ,  $\xi_2 = -1.0076$ ,  $\lambda_1 = 0.991$ ,  $\lambda_2 = -0.009$ .图 2 是与图 1 对应的无量纲振动排水量  $\Gamma = p/(\rho\kappa M(\alpha_1)^2)$  相对于时间  $\tau = t/(\rho\kappa)$  (横轴)变化的无量纲结果.图 3 是无量纲流体空隙压力  $P = p/\rho(\alpha_1)^2$  相对于时间  $\tau = t/(\rho\kappa)$  (横轴)变化的无量纲结果.当  $\rho_f = 0$ ,两相饱和介质蜕化为单相介质,将结果与经典的单相介质中心扩张源(爆炸源,取无量纲值  $\alpha = \alpha_1$ ,  $r_0 = r = 1$ )式(43)(Sharpe1942)<sup>[18]</sup>结果相比较,两者曲线较为吻合,示于图 4 中.

(a) 当  $T_r = P_0$ (b) 当  $T_r = P_0(1 - e^{-st})$ (c) 当  $T_r = P_0 e^{-st}$ 图 1 两相饱和介质中中心扩张源(爆炸源)场位移计算结果图象( $T_r$ 为爆炸作用力)(a) 当  $T_r = P_0$ (b) 当  $T_r = P_0(1 - e^{-st})$ (c) 当  $T_r = P_0 e^{-st}$ 图 2 两相饱和介质中中心扩张源(爆炸源)场的排水计算结果图象( $T_r$ 为爆炸作用力)(a) 当  $T_r = P_0$ (b) 当  $T_r = P_0(1 - e^{-st})$ (c) 当  $T_r = P_0 e^{-st}$ 图 3 两相饱和介质中中心扩张源(爆炸源)场的孔隙压力计算结果图象( $T_r$ 为爆炸作用力)

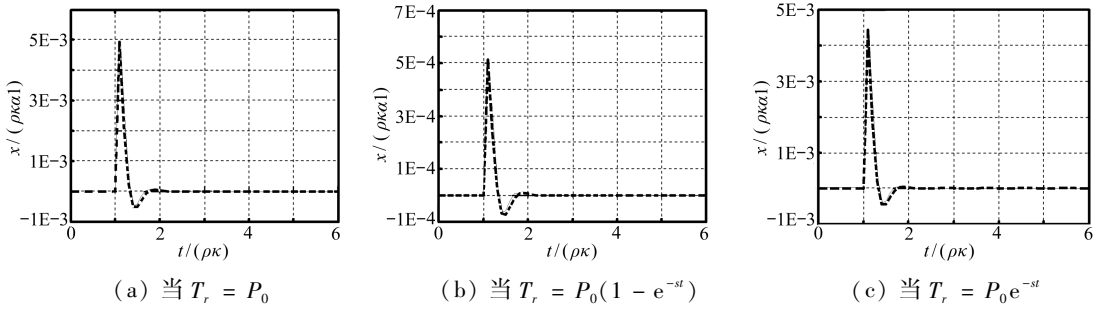


图4 两相饱和介质中中心扩张源(爆炸源)位移场计算公式蜕化后结果  
与经典公式比较(虚线为本文计算公式结果)

$$u_r' = \frac{\sqrt{2} T_r r_0^2}{4\mu r} e^{-(\sqrt{2}/2)(2\sqrt{2}\alpha/(3r_0))(t-r/\alpha)} \sin\left(\frac{2\sqrt{2}\alpha}{3r_0}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)\right). \quad (43)$$

另外需指出,在半无限空间和二维问题等的计算中亦可使用式(36)、式(38)和式(41)<sup>[19-20]</sup>。

### 参考文献:

- [1] Chen J. Time domain function solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity part II: two dimensional solution [J]. *Int J Solid Struct*, 1994, **31**(10): 1447-1490.
- [2] Chen J. Time domain function solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity part I: three dimensional solution [J]. *Int J Solid Struct*, 1994, **31**(2): 169-202.
- [3] Biot M A. Theory of propagation of elastic wave in a fluid-saturated soil [J]. *J Acoust Soc Am*, 1956, **28**(2): 168-178.
- [4] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media [J]. *J Appl Phys*, 1962, **33**(4): 1482-1498.
- [5] Cleary M P. Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid [J]. *Int J Solid Struct*, 1977, **13**(4): 785-806.
- [6] Burridge R, Vargas C A. The fundamental solutions in dynamic poroelasticity [J]. *Geophys J R Astr Soc*, 1979, **58**(1): 61-90.
- [7] Norris A N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid saturated porous solid [J]. *J Acoust Soc Amer*, 1985, **77**(6): 2012-2023.
- [8] 丁伯阳, 宋新初, 袁金华. 关于两相饱和介质中流相 Green 函数的解析解[J]. *地球物理学报*, 2009, **52**(7): 1858-1866.
- [9] 刘银斌, 李幼铭, 吴如山. 横向各向同性多孔介质中的地震波传播[J]. *地球物理学报*, 1994, **37**(4): 499-514.
- [10] 丁伯阳, 樊良本, 吴建华. 两相饱和介质中的集中力点源位移场解与应用[J]. *地球物理学报*, 1999, **42**(6): 800-808.
- [11] 丁伯阳, 丁翠红, 孟凡丽. 集中力作用下的两相饱和介质位移场 Green 函数[J]. *力学学报*, 2001, **33**(2): 234-241.
- [12] 丁伯阳, 孟凡丽, 胡敏云. 两相饱和介质中的静态位移场与震源矢量[J]. *地震学报*, 2001, **23**(3): 239-245.
- [13] 艾龙根, 舒胡毕. 弹性动力学[M]. 戈革译. 北京: 石油工业出版社, 1984, 71-132.
- [14] 苗天德, 朱久江, 丁伯阳. 对饱和和多孔介质波动问题中本构关系的探讨[J]. *力学学报*, 1995, **27**



- (5): 536-543.
- [15] 丁伯阳, 宋新初, 袁金华. 饱和土隧道内集中荷载作用下振动位移反应的 Green 函数解答[J]. 工程力学, 2009, **30**(3):153-157.
- [16] 丁伯阳, 党改红, 袁金华. Green 函数对饱和土隧道内集中荷载作用振动位移反应的计算[J]. 振动与冲击, 2009, **28**(11):110-114.
- [17] 丁伯阳, 袁金华, 潘晓东. 饱和土动力学问题 Green 函数计算的抽象集成与 OPP 实现[J]. 中国科学 G 辑, 2009, **39**(2):284-292.
- [18] Sharp J A. The production of elastic waves by explosion pressures—I theory and empirical observations[J]. *Geophysics*, 1942, **7**:1-26.
- [19] 丁伯阳, 樊良本, 孟凡丽, 丁翠红, 曹云中. 两相饱和和介质半无限空间位错位移场[J]. 地球物理学报, 2003, **46**(3):408-414.
- [20] 丁伯阳, 丁翠红, 陈禹, 陶海冰. 集中力作用下两相饱和和介质二维位移场 Green 函数[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(8):869-874.

## Lamb's Integral Formulas of Two-Phase Saturated Medium for Soil Dynamic Problems With Drainage

DING Bo-yang<sup>1</sup>, DANG Gai-hong<sup>2</sup>, YUAN Jin-hua<sup>1</sup>

(1. *College of Civil Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, P. R. China;*

2. *Department of Civil Engineering, Zhejiang Agriculture and Forest University, Hangzhou 311300, P. R. China)*

**Abstract:** It's an ordinary phenomenon to vibration response with drainage when the dynamic force acts upon the saturated soil in the project site. The saturated soil was simulated with the two-phase saturated medium in theory, the Lamb's integral formulas (representative theorem) with drainage and the stress formulas on the two-phase saturated medium had been shown based on Biot's equation and Betti's theorem (reciprocal theorem). According to the basic solution of Green's function and three items of Green's function on the flow-phase of the two-phase saturated medium subjected to a concentrated force, the displacement field with drainage, the magnitude of drainage and the pore pressure of the center explosion source and so on were computed. Moreover, the comparative results of classical Sharpe's solutions and calculated solutions that the two-phase saturated medium decays to the single-phase medium had given out. A good agreement can be observed from the figures.

**Key words:** explosive field; drainage; dynamic response; Lamb's integral formula