文章编号:1000-0887(2010)08-0992-09

基于应力形式的二维弹性问题的本征展开法*

黄俊杰[1], 阿拉坦仓[1], 王 华[1,2]

(1. 内蒙古大学 数学科学学院,呼和浩特 010021;
2. 内蒙古工业大学 理学院,呼和浩特 010051)

(郭兴明推荐)

摘要: 给出求解基于应力形式的二维弹性问题的本征函数展开方法. 通过引入适当的状态函数,将该问题的基本偏微分方程等价地转化为上三角微分系统,导出相应的上三角算子矩阵. 证明了该矩阵的两个对角块算子均具有规范的正交本征函数系,并得到它们在相应空间中的完备性. 此外,基于本征函数系的完备性,应用本征函数展开法给出了二维弹性问题的一般解.

关 键 词: 本征函数展开法; 二维弹性问题; 上三角微分系统; 一般解

中图分类号: O175.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.08.013

引 言

求解弹性问题的传统方法主要是由 Saint Venant 提出的半逆法,属于 Lagrange 体系[1-2]. 这种方法实际上是一种依赖于所考虑问题的试误法,譬如,在二维弹性问题中我们经常采用基于双调和函数的半逆解法.

应用结构力学与最优控制的模拟理论,钟万勰教授提出了基于 Hamilton 系统的分离变量法,为弹性力学及其相关领域提供了统一的解析方法[3]. 在后续的文献中,学者们利用基于 Hamilton 系统的分离变量法研究了应用力学各领域中出现的大量的非自伴问题[4-8]. 这种方法推广了传统的分离变量法,其数学基础-辛本征函数展开定理还远未解决. 在这方面,文献[9-12]讨论了 Sturm-Liouville 偏微分方程和板弯曲方程等导出的 Hamilton 算子的辛本征函数展开.

本文致力于建立基于应力形式的二维弹性问题的本征函数展开解法. 具体地,将基于应力形式的二维弹性问题的基本方程转化为上三角微分系统,导出相应的上三角算子矩阵 $\boldsymbol{H}$,并证明其两个对角块算子 $\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{A}^*$ 均具有完备的规范正交本征函数系,再应用本征函数展开法给出二维弹性问题的一般解. 我们指出,给定一个力学问题,可以将其转化为许多等价的微分系

* **收稿日期:** 2009-07-28; **修订日期:** 2010-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10962004);高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20070126002);教育部留学回国人员科研启动基金资助项目;教育部‘春晖计划’资助项目(Z2009-1-01010);内蒙古自治区自然科学基金资助项目(2009BS0101);

作者简介: 黄俊杰(1977—),男,内蒙古人,教授,博士(E-mail: hjjwh@sina.com);
阿拉坦仓(1963—),男,内蒙古人,教授,博士,博士生导师(联系人. E-mail: alatanca@imu.edu.cn).

统,其中上三角微分系统在求解问题时具有一定优势. 例如,若基本方程可以写成这种形式,则相应上三角算子矩阵的本征方程是解耦的,可以方便地解出本征值和本征函数. 此外,该方法可以应用于其它数学物理领域.

1　算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的性质

二维弹性问题的基本方程包括几何方程

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0,\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

及本构方程

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y),\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x),\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

众所周知,二维弹性问题有三种求解方法,即应力解法、位移解法和混合解法. 设 Ω 为一个在 x 方向满足 $-h \leqslant x \leqslant h$ 的条形区域,则基于应力解法的基本偏微分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0,\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\nu)\left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中,f_x, f_y 是体力,边界条件是

$$\sigma_x = 0,\ v = 0,\qquad x = \pm h. \tag{2}$$

引入状态函数

$$p = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y},\ q = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}, \tag{3}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -(1+\nu)\left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

是式(1)导出的上三角微分系统,且相应的上三角算子矩阵为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & -1 \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

由应力-位移关系

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)$$

和边界条件(2),易知

$$\sigma_y=0,\ p=0,\qquad x=\pm h. \tag{6}$$

引入 Hilbert 空间 $L^2[-h,h]$, 并取

$$V=L^2[-h,h]\times L^2[-h,h]\times L^2[-h,h]\times L^2[-h,h].$$

由式(6),算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的定义域为

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{H})=\left\{\begin{bmatrix}\tau_{xy}\\ \sigma_y\\ p\\ q\end{bmatrix}\in V\left|\begin{array}{l}\sigma_y(\pm h)=0,\ p(\pm h)=0,\ \tau_{xy},\ \sigma_y,\ p,q\\ \text{绝对连续}\ \tau'_{xy},\ \sigma'_y,\ p',\ q'\in L^2[-h,h]\end{array}\right.\right\}. \tag{7}$$

将算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 写为如下块算子表示:

$$\boldsymbol{H}=\left[\begin{array}{cc:cc}0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & -1\\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0\end{array}\right],$$

其中各块算子为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0\end{bmatrix},\ -\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{8}$$

由算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的定义域式(7),有

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{A})=\left\{\begin{bmatrix}\tau_{xy}\\ \sigma_y\end{bmatrix}\in\hat{V}\,\middle|\,\sigma_y(\pm h)=0,\tau_{xy},\sigma_y\ \text{绝对连续},\tau'_{xy},\sigma'_y\in L^2[-h,h]\right\}, \tag{9}$$

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{A}^*)=\left\{\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}\in\hat{V}\,\middle|\,p(\pm h)=0,p,q\ \text{绝对连续},p',q'\in L^2[-h,h]\right\}, \tag{10}$$

且 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为全空间 $\hat{V}=L^2[-h,h]\times L^2[-h,h]$ 上的有界算子. 我们试图利用块算子 $\boldsymbol{A}$ 和 $-\boldsymbol{A}^*$ 求解二维弹性问题. 为此,给出下列完备性定理.

定理 1 块算子 $\boldsymbol{A}$ 在 Hilbert 空间 $\hat{V}$ 中具有规范正交本征函数系. 特别地,$\boldsymbol{A}$ 的本征值和相应本征函数(除了常数因子)可表为

$$\boldsymbol{U}_{2k}=\left[\cos\frac{k\pi}{h}x\quad \sin\frac{k\pi}{h}x\right]^{\mathrm{T}},\qquad \lambda_{2k}=\frac{k\pi}{h}, \tag{11a}$$

$$\boldsymbol{U}_{2k+1}=\left[-\sin\frac{(2k+1)\pi}{2h}x\quad \cos\frac{(2k+1)\pi}{2h}x\right]^{\mathrm{T}},\qquad \lambda_{2k+1}=\frac{(2k+1)\pi}{2h}, \tag{11b}$$

其中 $k=0,\ \pm1,\cdots$.

证明　通过直接计算可得 $\boldsymbol{A}$ 的本征值和相应本征函数式(11).另一方面,

$$\int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{2k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{2j}\mathrm{d}x=2h\delta_{kj},\ \int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{2k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{2j+1}\mathrm{d}x=2h\delta_{kj},\ \int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{2k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{2j+1}\mathrm{d}x=0,$$

其中 δ_{kj} 是通常的 Kronecker 符号.从而本征函数系 $\{\boldsymbol{U}_k\mid k=0,\ \pm1,\cdots\}$ 具有规范正交性.因此,结论得证. □

定理2　块算子 $\boldsymbol{A}$ 的由式(11)定义的本征函数系 $\{\boldsymbol{U}_k\mid k=0,\ \pm1,\cdots\}$ 在 $\hat{V}$ 中按 Cauchy 主值意义完备,即对每个 $\begin{bmatrix}f\\g\end{bmatrix}\in\hat{V}$,都存在常数列 $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 和 $\{C_{-k}\}_{k=1}^{+\infty}$,使得

$$\begin{bmatrix}f\\g\end{bmatrix}=C_0\boldsymbol{U}_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(C_{2k-1}\boldsymbol{U}_{2k-1}+C_{-2k+1}\boldsymbol{U}_{-2k+1}+C_{2k}\boldsymbol{U}_{2k}+C_{-2k}\boldsymbol{U}_{-2k}).\tag{12}$$

证明　对于 $k=0,1,\cdots$, 取

$$C_{\pm2k}=\left\{\int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{\pm2k}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}f\\g\end{bmatrix}\mathrm{d}x\right\}\Big/\left\{\int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{\pm2k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\pm2k}\mathrm{d}x\right\}=$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(f(x)\cos\frac{\pm k\pi}{h}x+g(x)\sin\frac{\pm k\pi}{h}x\right)\mathrm{d}x,$$

$$C_{\pm(2k-1)}=\left\{\int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{\pm(2k-1)}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}f\\g\end{bmatrix}\mathrm{d}x\right\}\Big/\left\{\int_{-h}^{h}\boldsymbol{U}_{\pm(2k-1)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\pm(2k-1)}\mathrm{d}x\right\}=$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(-f(x)\sin\frac{\pm(2k-1)\pi}{2h}x+g(x)\cos\frac{\pm(2k-1)\pi}{2h}x\right)\mathrm{d}x,$$

将其代入式(12),得

$$C_0\boldsymbol{U}_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(C_{2k-1}\boldsymbol{U}_{2k-1}+C_{-2k+1}\boldsymbol{U}_{-2k+1}+C_{2k}\boldsymbol{U}_{2k}+C_{-2k}\boldsymbol{U}_{-2k})=$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(t)\left(\sin\frac{(2k-1)\pi t}{2h}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2h}+\cos\frac{k\pi t}{h}\cos\frac{k\pi x}{h}\right)\mathrm{d}t\\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}g(t)\left(\cos\frac{(2k-1)\pi t}{2h}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2h}+\sin\frac{k\pi t}{h}\sin\frac{k\pi x}{h}\right)\mathrm{d}t\end{bmatrix}.\tag{13}$$

注意到函数列

$$1,\ \sin\frac{\pi}{2h}x,\ \cos\frac{\pi}{h}x,\ \sin\frac{3\pi}{2h}x,\cdots,\ \sin\frac{(2k-1)\pi}{2h}x,\ \cos\frac{k\pi}{h}x,\cdots,$$

$$\cos\frac{\pi}{2h}x,\ \sin\frac{\pi}{h}x,\ \cos\frac{3\pi}{2h}x,\ \sin\frac{2\pi}{h}x,\cdots,\ \cos\frac{(2k-1)\pi}{2h}x,\ \sin\frac{k\pi}{h}x,\cdots,$$

分别是 Sturm-Liouville 问题

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\lambda^2z=0,\qquad z'(\pm h)=0,$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\lambda^2z=0,\qquad z(\pm h)=0$$

的本征函数系.这样,式(13)中等号右端两个分量恰好分别是 f 和 g 在 $L^2[-h,h]$ 中按相应正交系的 Fourier 级数展开.因此,式(12)成立. □

类似地,有如下结论.

定理3　块算子 $-\boldsymbol{A}^*$ 在 Hilbert 空间 $\hat{V}$ 中具有规范正交本征函数系.特别地,不计常数因

子，$-\boldsymbol{A}^*$ 的在 Cauchy 主值意义下完备的规范正交本征函数系可表为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{U}}_{2k}=\left[\sin\frac{k\pi}{h}x \quad \cos\frac{k\pi}{h}x\right]^{\mathrm{T}},\\ \hat{\boldsymbol{U}}_{2k+1}=\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{2h}x \quad -\sin\frac{(2k+1)\pi}{2h}x\right]^{\mathrm{T}},\end{cases}\tag{14}$$

其中，$k=0,\ \pm1,\cdots$，且相应本征值分别为 $\hat{\lambda}_{2k}=k\pi/h$ 和 $\hat{\lambda}_{2k+1}=(2k+1)\pi/(2h)$.

2 一般解

本节给出二维弹性问题(1)和(2)的一般解. 令

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\tau_{xy}\\ \sigma_y\end{bmatrix},\ \hat{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-q-f_x\\ -f_y\end{bmatrix},\ \hat{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}-(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\\ 0\end{bmatrix},$$

则式(4)可写为

$$\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{F},\tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{Z}}=-\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{Z}}+\hat{\boldsymbol{F}}.\tag{16}$$

为了得到问题(1)和(2)的一般解，我们应用本征函数展开方法.

根据定理3，对问题(16)应用分离变量法. 首先，考虑相应的齐次情况

$$\frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{Z}}=-\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{Z}}.\tag{17}$$

我们寻求形如 $\hat{\boldsymbol{Z}}(x,y)=\hat{T}(y)\hat{\boldsymbol{U}}(x)$ 的解，将其代入齐次方程，有

$$\frac{\hat{T}'(y)}{\hat{T}(y)}=\frac{-\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{U}}(x)}{\hat{\boldsymbol{U}}(x)}.$$

因此，两边都是常数，设为 $\hat{\lambda}$. 因而

$$\hat{T}'(y)=\hat{\lambda}\hat{T}(y),\quad -\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{U}}(x)=\hat{\lambda}\hat{\boldsymbol{U}}(x).$$

注意到对式(17)分离变量将得到算子 $-\boldsymbol{A}^*$ 的本征值问题. 定理3表明 $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_k(k=0,\ \pm1,\cdots)$，$\hat{\boldsymbol{U}}(x)$ 是向量值函数 $\hat{\boldsymbol{U}}_k(x)$ 的常数倍，且 $\hat{T}(y)$ 为 $\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_k y}$ 的常数倍. 由叠加原理，有如下形式的解：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{Z}}(x,y)=\hat{T}_0(y)\hat{\boldsymbol{U}}_0(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}(&\hat{T}_{2k-1}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{2k-1}(x)+\hat{T}_{-2k+1}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{-2k+1}(x)+\\ &\hat{T}_{2k}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{2k}(x)+\hat{T}_{-2k}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{-2k}(x)).\end{aligned}\tag{18}$$

以下对非齐次问题(16)应用分离变量法. 由叠加原理，仍有形如式(18)的解. 由定理3可知式(16)中的非齐次项 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 有如下 Fourier 展开：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{F}}=\hat{F}_0(y)\hat{\boldsymbol{U}}_0(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}(&\hat{F}_{2k-1}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{2k-1}(x)+\hat{F}_{-2k+1}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{-2k+1}(x)+\\ &\hat{F}_{2k}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{2k}(x)+\hat{F}_{-2k}(y)\hat{\boldsymbol{U}}_{-2k}(x)),\end{aligned}\tag{19}$$

其中，对 $k=0,1,\cdots$，

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\pm2k}(y)=&\left\{\int_{-h}^{h}\hat{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}_{\pm2k}\begin{bmatrix}-(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}x\right\}\Bigg/\left\{\int_{-h}^{h}\hat{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}_{\pm2k}\hat{\boldsymbol{U}}_{\pm2k}\mathrm{d}x\right\}=\\ &-\frac{1+\nu}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f_y(x,y)}{\partial y}\right)\sin\frac{\pm k\pi}{h}x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\hat{F}_{\pm(2k-1)}(y)=\left\{\int_{-h}^{h}\hat{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}_{\pm(2k-1)}\begin{bmatrix}-(1+\nu)\left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x}+\dfrac{\partial f_y}{\partial y}\right)\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}x\right\}\Big/\left\{\int_{-h}^{h}\hat{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}_{\pm(2k-1)}\hat{\boldsymbol{U}}_{\pm(2k-1)}\mathrm{d}x\right\}=$$

$$-\frac{1+\nu}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f_y(x,y)}{\partial y}\right)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2h}x\mathrm{d}x.$$

将式(18)和(19)代入式(16),有

$$\hat{T}_k'(y)=\hat{\lambda}_k\hat{T}_k(y)+\hat{F}_k(y),\qquad k=0,\ \pm1,\cdots,$$

进而

$$\hat{T}_k(y)=\hat{d}_k\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_k y}+\int_0^y\hat{F}_k(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_k(y-t)}\mathrm{d}t,\qquad k=0,\ \pm1,\cdots,$$

其中 $\hat{d}_k$ 是待定常数. 因此,问题(16)的一般解为

$$\hat{\boldsymbol{Z}}(x,y)=\begin{bmatrix}0\\ \hat{d}_0\end{bmatrix}+$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\begin{bmatrix}\begin{aligned}&\Big(\hat{d}_{2k-1}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}y}+\hat{d}_{-2k+1}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}y}+\\&\quad\int_0^y(\hat{F}_{2k-1}(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)}+\hat{F}_{-2k+1}(t)\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)})\mathrm{d}t\Big)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2h}x+\\&\quad\Big(\hat{d}_{2k}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}y}-\hat{d}_{-2k}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}y}+\\&\quad\int_0^y(\hat{F}_{2k}(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}(y-t)}-\hat{F}_{-2k}(t)\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}(y-t)})\mathrm{d}t\Big)\sin\frac{k\pi}{h}x\\ &-\Big(\hat{d}_{2k-1}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}y}-\hat{d}_{-2k+1}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}y}+\\&\quad\int_0^y(\hat{F}_{2k-1}(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)}-\hat{F}_{-2k+1}(t)\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)})\mathrm{d}t\Big)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2h}x+\\&\quad\Big(\hat{d}_{2k}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}y}+\hat{d}_{-2k}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}y}+\\&\quad\int_0^y(\hat{F}_{2k}(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}(y-t)}+\hat{F}_{-2k}(t)\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}(y-t)})\mathrm{d}t\Big)\cos\frac{k\pi}{h}x\end{aligned}\end{bmatrix},\qquad(20)$$

其中

$$\hat{F}_{2k}(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}(y-t)}\pm\hat{F}_{-2k}(t)\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}(y-t)}=$$

$$-\frac{1+\nu}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial f_x(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial f_y(x,t)}{\partial y}\right)\sin\frac{k\pi}{h}x(\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}(y-t)}\mp\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}(y-t)})\mathrm{d}x,$$

$$\hat{F}_{2k-1}(t)\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)}\pm\hat{F}_{-2k+1}(t)\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)}=$$

$$-\frac{1+\nu}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial f_x(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial f_y(x,t)}{\partial y}\right)\cos\frac{2k-1}{2h}\pi x(\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)}\pm\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)})\mathrm{d}x.$$

其次,将式(20)中 $\hat{\boldsymbol{Z}}$ 的分量 q 代入式(15)便可得到一个非齐次问题. 由定理 1 和 2,知式(15)有如下形式的解:

$$\boldsymbol{Z}(x,y)=T_0(y)\boldsymbol{U}_0(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}(T_{2k-1}(y)\boldsymbol{U}_{2k-1}(x)+T_{-2k+1}(y)\boldsymbol{U}_{-2k+1}(x)+$$
$$T_{2k}(y)\boldsymbol{U}_{2k}(x)+T_{-2k}(y)\boldsymbol{U}_{-2k}(x)),\qquad(21)$$

且非齐次项 $\boldsymbol{F}$ 有 Fourier 展开

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} = & F_0(y)\boldsymbol{U}_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(F_{2k-1}(y)\boldsymbol{U}_{2k-1}(x) + F_{-2k+1}(y)\boldsymbol{U}_{-2k+1}(x) + \\
& F_{2k}(y)\boldsymbol{U}_{2k}(x) + F_{-2k}(y)\boldsymbol{U}_{-2k}(x)),
\end{aligned} \tag{22}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F_{\pm 2k}(y) = & -\frac{1}{2}\Bigg(\hat{d}_{2k}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}y} + \hat{d}_{-2k}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}y} - \frac{1+\nu}{2h}\int_0^y \mathrm{d}t\int_{-h}^h(\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k}(y-t)} - \mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k}(y-t)}) \times \\
& \left(\frac{\partial f_x(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x,t)}{\partial y}\right)\sin\frac{k\pi}{h}x\mathrm{d}x\Bigg) - \\
& \frac{1}{2h}\int_{-h}^h\left(f_x(x,y)\cos\frac{k\pi}{h}x \pm f_y(x,y)\sin\frac{k\pi}{h}x\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\pm(2k-1)}(y) = & \mp\frac{1}{2}\Bigg(\hat{d}_{2k-1}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}y} - \hat{d}_{-2k+1}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}y} - \\
& \frac{1+\nu}{2h}\int_0^y \mathrm{d}t\int_{-h}^h(\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)} - \mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_{2k-1}(y-t)}) \times \\
& \left(\frac{\partial f_x(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x,t)}{\partial y}\right)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2h}x\mathrm{d}x\Bigg) + \\
& \frac{1}{2h}\int_{-h}^h\left(f_x\sin\frac{\pm(2k-1)\pi}{2h}x - f_y\cos\frac{\pm(2k-1)\pi}{2h}x\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

类似于式(16)的方法,直接计算得到

$$
T_k(y) = d_k\mathrm{e}^{\lambda_k y} + \int_0^y F_k(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_k(y-\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \qquad k = 0, \pm 1, \cdots,
$$

其中 d_k 是待定常数. 因此,问题(15)的一般解为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}(x,y) = & \begin{bmatrix} d_0 - \hat{d}_0 y - \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_0^y\mathrm{d}\xi\int_{-h}^h f_x(x,\xi)\,\mathrm{d}x \\ 0 \end{bmatrix} + \\
& \sum_{k=1}^{+\infty}\begin{bmatrix}
-\Big(d_{2k-1}\mathrm{e}^{\lambda_{2k-1}y} - d_{-2k+1}\mathrm{e}^{-\lambda_{2k-1}y} + \\
\quad\displaystyle\int_0^y(F_{2k-1}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_{2k-1}(y-\xi)} - F_{-2k+1}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_{2k-1}(y-\xi)})\,\mathrm{d}\xi\Big)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2h}x + \\
\quad\Big(d_{2k}\mathrm{e}^{\lambda_{2k}y} + d_{-2k}\mathrm{e}^{-\lambda_{2k}y} + \\
\quad\displaystyle\int_0^y(F_{2k}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_{2k}(y-\xi)} + F_{-2k}(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_{2k}(y-\xi)})\,\mathrm{d}\xi\Big)\cos\frac{k\pi}{h}x \\
\\
\Big(d_{2k-1}\mathrm{e}^{\lambda_{2k-1}y} + d_{-2k+1}\mathrm{e}^{-\lambda_{2k-1}y} + \\
\quad\displaystyle\int_0^y(F_{2k-1}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_{2k-1}(y-\xi)} + F_{-2k+1}(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_{2k-1}(y-\xi)})\,\mathrm{d}\xi\Big)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2h}x + \\
\quad\Big(d_{2k}\mathrm{e}^{\lambda_{2k}y} - d_{-2k}\mathrm{e}^{-\lambda_{2k}y} + \\
\quad\displaystyle\int_0^y(F_{2k}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_{2k}(y-\xi)} - F_{-2k}(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_{2k}(y-\xi)})\,\mathrm{d}\xi\Big)\sin\frac{k\pi}{h}x
\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

注 一般解 $\boldsymbol{Z}(x,y)$ 的两个分量 $\tau_{xy}(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ 分别是式(1) 中的剪应力和正应力;进一步,正应力 $\sigma_x(x,y)$ 可由式(1)和(2)确定.

3 数值算例

考虑矩形域 $\Omega = \{(x,y) \mid -h \leqslant x \leqslant h, 0 \leqslant y \leqslant l\}$. 令 $h=1, l=4$, 另两边的边界条件是

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \qquad y = 0,$$

$$\sigma_y = x,\ \tau_{xy} = 0, \qquad y = l.$$

根据上面条件,可确定一般解中的待定常数 $\hat{d}_k, d_k$. 计算结果见表 1($k=20$).

表 1　　计算结果

(x,y)	τ_{xy}	σ_y
(−0.4, 1.7)	−0.000 77	0.001 91
(0.6, 2.9)	0.005 18	−0.158 10
(−0.9, 3.3)	0.767 39	2.578 78
(0.8, 3.8)	2.650 93	−5.334 32

4 结　　论

为克服自伴性的限制,推广 Hilbert-Schmidt 定理,并采用统一的方法求解应用力学问题,很多学者发展了基于 Hamilton 系统的分离变量法. 然而,这种方法的数学基础还有待于进一步探讨. 对基于应力形式的二维弹性问题(1)和(2),本文得到如下结论: (i) 给出相应的上三角算子矩阵 $\boldsymbol{H}$; (ii) 利用算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中的块算子,得到两个完备性定理; (iii) 得到所考虑问题的一般解.

致谢　本文研究中得到内蒙古大学'211 工程'创新人才培养基金资助,特此感谢.

参考文献:

[1] Saint Venant A J C B de. Memoire sur la torsion des prismes[J]. *Paris Memoires des Savants Etrangers*, 1856,**14**: 233-560.

[2] Timoshenko S, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Co,1970.

[3] 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系[J]. 计算结构力学及其应用,1991,**8**(3):229-239.

[4] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连:大连理工大学出版社,1995.

[5] 徐新生,王尕平,孙发明. 二维矩形域内 Stokes 流问题的辛解析和数值方法[J]. 应用数学和力学,2008,**29**(6):639-648.

[6] Zhou Z H, Xu X S, Leung A Y T. The mode III stress electric intensity factors and singularities analysis for edge-cracked circular piezoelectric shafts[J]. *International Journal of Solids and Structures*,2009,**46**: 3577-3586.

[7] 姚伟岸,隋永枫. Reissner 板弯曲的辛求解体系[J]. 应用数学和力学, 2004,**25**(2):159-165.

[8] 姚征,张洪武,王晋宝,钟万勰. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析[J]. 固体力学学报,2008,**29**(1): 13-22.

[9] 黄俊杰,阿拉坦仓,陈阿茹娜. 一类无穷维 Hamilton 算子特征函数系的完备性[J]. 应用数学学报,2008,**31**(3):457-466.

[10] Wang H, Alatancang, Huang J J. Double symplectic eigenfunction expansion method of free vibration of rectangular thin plates[J]. *Commun Theor Phys*, 2009,**52**(6): 1087-1092.

[11] 张鸿庆,阿拉坦仓,钟万勰. Hamilton 体系与辛正交系的完备性[J]. 应用数学和力学,1997,**18**(3):217-221.

[12] 张鸿庆,阿拉坦仓. 辛正交系的完备性问题[J]. 大连理工大学学报, 1995, **35**(6): 754-758.

[13] Alatancang, Huang J J, Fan X Y. Structure of the spectrum for infinite dimensional Hamiltonian operators[J]. *Science in China Series A—Mathematics*, 2008, **51**(5): 915-924.

Eigenfunction Expansion Method and Its Application to Two-Dimensional Elasticity Problems Based on Stress Formulation

HUANG Jun-jie[1], Alatancang[1], WANG Hua[1,2]

(1. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021, *P. R. China*;
2. *College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *P. R. China*)

Abstract: Eigenfunction expansion method of solving two-dimensional elasticity problems was proposed based on stress formulation. By introducing appropriate state functions, the fundamental system of partial differential equations of the above two-dimensional problems was rewritten as an upper triangular differential system. For the associated operator matrix, the existence and completeness of two normed orthogonal eigenfunction systems in some space are obtained, which belong to the two block operators arising in the operator. Moreover, the general solution of the proceeding two-dimensional problem is given by the eigenfunction expansion method.

Key words: eigenfunction expansion method; two-dimensional elasticity problem; upper triangular differential system; general solution