文章编号:1000-0887(2010)07-0884-07

新的辅助方程法构造 KdV 方程的行波解*

庞 晶[1], 边春泉[1], 朝 鲁[2]

(1. 内蒙古工业大学 理学院, 呼和浩特 010051;
2. 上海海事大学 数学系, 上海 200315)

(郭兴明推荐)

摘要: 应用一种新的辅助方程法成功地获得了(1+1)维 KdV 方程的多个含有参数的精确行波解,所得的解涵盖了已有结果. 与其它方法相比,所给出的方法具有简单高效、计算量小、速度快、易于求解等特点. 另外,所给的方法还可以用来求解其它的一大类非线性发展方程的精确行波解.

关 键 词: 辅助方程法; 行波法; KdV 方程; 齐次平衡法

中图分类号: O175.29;O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.014

引 言

有关非线性发展方程领域的研究已经有很长的历史了. 到目前为止,已经有很多不同类型的非线性发展方程出现在数学和物理科学领域. 在此期间,已经有很多专家学者在如何求解非线性方程的精确解方面做了大量有效的工作,构造出多种有效的求解方法. 例如:齐次平衡法[1-3]、tanh 函数法[1-2,4-5]、双曲函数法[1-2]、Painleve 展开法[2,3-6]、辅助方程法[7-9]、Jacobi 椭圆函数展开法[1-2,6,10]、Sine-Cosine 函数法[1-2,11]和指数函数法[2,12]等等.

本文中,我们利用一种新的辅助方程法成功获得了(1+1)维 KdV 方程的多个含有参数的精确行波解,所得的解包括了已有解. 结果表明,本文所给的方法不仅具有简单高效、计算量小、速度快、易于求解等特点,而且还可以用来求解数学物理中其它的一大类非线性发展方程的行波解. 值得说明的是,本文所给的方法不仅完全包括了文献[13-17]中所应用的方法,而且比它们更有效. 更重要的是,本文的方法还能够用来求解一些高维或高阶非线性发展方程的精确行波解或者非行波解.

1 方法简介

本节简单介绍一下如何应用本文所给的方法来求解非线性发展方程的行波解. 现给出如下的非线性微分方程:

$$p(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \cdots) = 0. \tag{1}$$

* **收稿日期:** 2009-09-07; **修订日期:** 2010-05-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10461005); 国家教育部博士点基金资助项目(20070128001); 内蒙古高等教育资助课题(NJZY08057)

作者简介: 庞晶(1963—), 男, 山西大同人, 教授(联系人. Tel:+86-471-6576181; E-mail: pang_j@imut.edu.cn;bianchunquan2005@163.com).

本方法将分为如下 4 个步骤:

步骤 1 寻求方程(1)的如下形式的解:

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=x-vt, \tag{2}$$

其中,v 是常数,利用变换(2),方程(1)可化为如下常微分方程:

$$Q(u,u',u'',\cdots)=0. \tag{3}$$

步骤 2 假设方程(3)有如下形式的解:

$$u(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{m}\left[a_i\left(\frac{G(\xi)}{G'(\xi)}\right)^{i}+b_i\left(\frac{G(\xi)}{G'(\xi)}\right)^{-i}\right], \tag{4}$$

其中,a_m 和 b_m 不同时为0,$a_0,a_i,b_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 都是待定常数.式(4)中的整数 m 可以通过平衡式(3)中的 $u(\xi)$ 的最高阶非线性项和线性项来确定.$G=G(\xi)$ 满足如下二阶常微分方程:

$$G''+\lambda G'+\mu G=0, \tag{5}$$

其中,λ 和 μ 都是待定常数.方程(5)的解为

当 $\lambda^2-4\mu>0$, $G(\xi)=c_1\mathrm{e}^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu})\xi/2}+c_2\mathrm{e}^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu})\xi/2}$;

当 $\lambda^2-4\mu=0$, $G(\xi)=(c_1+c_2\xi)\mathrm{e}^{-\lambda\xi/2}$;

当 $\lambda^2-4\mu<0$, $G(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda\xi/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi+c_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)$.

注 1 如果 $a_i=0, i=0,1,2,\cdots,m$, 方程(4)将化为

$$u(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{m}b_i\left(\frac{G(\xi)}{G'(\xi)}\right)^{-i}. \tag{6}$$

形式(6)已在文献[4-7]中应用,如果 $b_i=0\ (i=1,2,\cdots,m)$, 则式(4)将变为如下形式:

$$u(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{m}a_i\left(\frac{G(\xi)}{G'(\xi)}\right)^{i}. \tag{7}$$

步骤 3 把式(4)代入方程(3)后,令 (G/G') 的各次幂的系数为0,则得到一个以 $a_0,a_i,b_i(i=0,1,2,\cdots,m)$,$\lambda$,$\mu$ 及 v 为未知量的非线性代数方程组.

步骤 4 借助符号计算系统(Mathematica 或 Maple)求借步骤 3 中得到的代数方程组来确定相关的待定常数.另外,方程(5)的解都是我们所熟悉的.将其及 $a_0,a_i,b_i(i=0,1,2,\cdots,m)$, v 代入式(4),便可以得到方程(1)的精确行波解.

2 应用举例

考虑如下 KdV 方程[13]

$$u_t+uu_x+\delta u_{xxx}=0. \tag{8}$$

我们将寻求如下行波变换,并关于 ξ 积分一次,令积分常数为0后得

$$\delta u''+\frac{1}{2}u^2-vu=0. \tag{9}$$

根据步骤 2 可知 $m=2$, 因此,可将方程(9)的解写成如下形式:

$$u(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G}{G'}\right)+a_2\left(\frac{G}{G'}\right)^2+b_1\left(\frac{G}{G'}\right)^{-1}+b_2\left(\frac{G}{G'}\right)^{-2}, \tag{10}$$

其中,a_2 和 b_2 不同时为0,利用方程(5)和(10)有

$$u''=(\lambda a_1+2a_2+\lambda\mu b_1+2\mu^2 b_2)+(\lambda^2 a_1+6\lambda a_2+2\mu a_1)\left(\frac{G}{G'}\right)+$$

$$(8\mu a_2+3\lambda\mu a_1+4\lambda^2 a_2)\left(\frac{G}{G'}\right)^2+(2\mu^2 a_1+10\lambda\mu a_2)\left(\frac{G}{G'}\right)^3+6\mu^2 a_2\left(\frac{G}{G'}\right)^4+$$
$$(2\mu b_1+6\lambda\mu b_2+\lambda^2 b_1)\left(\frac{G}{G'}\right)^{-1}+(3\lambda b_1+4\lambda^2 b_2+8\mu b_2)\left(\frac{G}{G'}\right)^{-2}+$$
$$(2b_1+10\lambda b_2)\left(\frac{G}{G'}\right)^{-3}+6b_2\left(\frac{G}{G'}\right)^{-4}. \tag{11}$$

把方程(10)和(11)代入方程(9),并令 $(G/G')^i$ ($i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4$) 的系数为0后得到如下的代数方程组:

$$\frac{a_2^2}{2}+6\delta\mu^2 a_2=0,$$
$$a_0 b_1+a_1 b_2-vb_1=0,$$
$$\frac{b_2^2}{2}+6\delta b_2=0,$$
$$a_1 a_2+10\lambda\mu\delta a_2+2\delta\mu^2 a_1=0,$$
$$\frac{b_1^2}{2}+a_0 b_2-vb_2+3\lambda\delta b_1+4\lambda^2\delta b_2+8\mu\delta b_2=0,$$
$$b_1 b_2+10\lambda\delta b_2+2\delta b_1=0,$$
$$\frac{a_0^2}{2}+a_1 b_1+a_2 b_2-va_0+2\delta a_2+\lambda\delta a_1+\lambda\mu\delta b_1+2\mu^2\delta b_2=0,$$
$$\frac{a_1^2}{2}+a_0 a_2-va_2+4\lambda^2\delta a_2+8\mu\delta a_2+3\lambda\mu\delta a_1=0,$$
$$a_0 a_1+a_2 b_1-va_1+6\lambda\delta a_2+\lambda^2\delta a_1-\lambda^2\delta b_1+2\mu\delta a_1-2\delta\mu b_1-6\lambda\mu\delta b_2=0.$$

借助 Mathematica 求解上述方程组得

$$a_0=-12\delta\mu,\ a_1=-12\lambda\mu\delta,\ a_2=-12\delta\mu^2,\ b_1=b_2=0,\ v=\delta(\lambda^2-4\mu), \tag{12}$$
$$\begin{cases}a_0=-2(\lambda^2\delta+2\delta\mu),\ a_1=-12\lambda\mu\delta,\ a_2=-12\delta\mu^2,\\ b_1=b_2=0,\ v=-\delta(\lambda^2-4\mu),\end{cases} \tag{13}$$
$$a_0=-24\delta\mu,\ a_1=0,\ a_2=-12\delta\mu^2,\ b_1=0,\ b_2=-12\delta,\ v=-16\delta\mu,\ \lambda=0, \tag{14}$$
$$a_0=8\delta\mu,\ a_1=0,\ a_2=-12\delta\mu^2,\ b_1=0,\ b_2=-12\delta,\ v=16\delta\mu,\ \lambda=0, \tag{15}$$
$$a_0=-12\delta\mu,\ a_1=0,\ a_2=0,\ b_1=0,\ b_2=-12\delta,\ v=-4\delta\mu,\ \lambda=0, \tag{16}$$
$$a_0=-4\delta\mu,\ a_1=a_2=0,\ b_1=0,\ b_2=-12\delta,\ v=4\delta\mu,\ \lambda=0, \tag{17}$$
$$\begin{cases}a_0=-2\delta(\lambda^2+2\mu),\ a_1=a_2=0,\\ b_1=-12\lambda\delta,\ b_2=-12\delta,\ v=-2\delta(\lambda^2+2\mu),\end{cases} \tag{18}$$
$$a_0=-12\delta\mu,\ a_1=a_2=0,\ b_1=-12\lambda\delta,\ b_2=-12\delta,\ v=-12\delta\mu, \tag{19}$$

其中,μ 和 δ 都是任意常数. 利用式(12)~(19),式(10)便可以写成如下形式:

$$u(\xi)=-12\delta\mu-12\lambda\mu\delta\left(\frac{G}{G'}\right)-12\delta\mu^2\left(\frac{G}{G'}\right)^2,\ \xi=x-\delta(\lambda^2-4\mu)t, \tag{20}$$
$$u(\xi)=-2(\lambda^2\delta+2\delta\mu)-12\lambda\mu\delta\left(\frac{G}{G'}\right)-12\delta\mu^2\left(\frac{G}{G'}\right)^2,\ \xi=x+\delta(\lambda^2-4\mu), \tag{21}$$
$$u(\xi)=-24\delta\mu-12\delta\mu^2\left(\frac{G}{G'}\right)^2-12\delta\left(\frac{G}{G'}\right)^{-2},\ \xi=x+16\delta\mu t, \tag{22}$$
$$u(\xi)=8\delta\mu-12\delta\mu^2\left(\frac{G}{G'}\right)^2-12\delta\left(\frac{G}{G'}\right)^{-2},\ \xi=x-16\delta\mu t, \tag{23}$$

$$u(\xi)=-12\delta\mu-12\delta\left(\frac{G}{G'}\right)^{-2},\ \xi=x+4\delta\mu t,\tag{24}$$

$$u(\xi)=-4\delta\mu-12\delta\left(\frac{G}{G'}\right)^{-2},\ \xi=x-4\delta\mu t,\tag{25}$$

$$u(\xi)=-2\delta(\lambda^2+2\mu)-12\lambda\delta\left(\frac{G'}{G}\right)-12\delta\left(\frac{G'}{G}\right)^2,\ \xi=x+2\delta(\lambda^2+2\mu)t,\tag{26}$$

$$u(\xi)=-12\delta\mu-12\lambda\delta\left(\frac{G'}{G}\right)-12\delta\left(\frac{G'}{G}\right)^2,\ \xi=x+12\delta\mu t.\tag{27}$$

将方程(5)的解代入式(20)和(21),便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\lambda^2-4\mu>0$ 时,

$$u_1(\xi)=\frac{48\delta\mu M^2c_1c_2\operatorname{sech}^2(M\xi/2)}{(-\lambda c_1-Mc_2+(\lambda c_2+Mc_1)\tanh(M\xi/2))^2},\tag{28}$$

其中, $M=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$, $\xi=x-(\lambda^2\delta-4\delta\mu)t$;

$$u_2(\xi)=-2\delta(\lambda^2+2\mu)-\frac{48\delta\mu^2(c_1-c_2\tanh(M\xi/2))^2}{(-\lambda c_1-Mc_2+(\lambda c_2+Mc_1)\tanh(M\xi/2))^2}-\frac{24\lambda\mu\delta(c_1-c_2\tanh(M\xi/2))}{-Mc_2-\lambda c_1+(\lambda c_2+Mc_1)\tanh(M\xi/2)},\tag{29}$$

其中, $M=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$, $\xi=x+\delta(\lambda^2-4\mu)t$.

当 $\lambda^2-4\mu=0$ 时,

$$u_3(\xi)=\frac{12\delta\mu(\lambda^2(c_1+c_2\xi)^2-4(c_2^2+\mu(c_1+c_2\xi)^2))}{(-2c_2+\lambda(c_1+c_2\xi))^2},\tag{30}$$

其中, $\xi=x-(\lambda^2\delta-4\delta\mu)t$.

$$u_4(\xi)=-2\delta(\lambda^2+2\mu)-\frac{48\delta\mu^2(c_1+c_2\xi)^2}{(-2c_2+\lambda(c_1+c_2\xi))^2}+\frac{24\delta\lambda\mu(c_1+c_2\xi)}{-2c_2+\lambda(c_1+c_2\xi)},\tag{31}$$

其中, $\xi=x+\delta(\lambda^2-4\mu)t$.

当 $\lambda^2-4\mu<0$ 时,

$$u_5(\xi)=-12\delta\mu\left(1+\frac{2\lambda(c_1+c_2\tan(M\xi/2))}{M(c_2-c_1\tan(M\xi/2))}+\frac{4\mu(c_1+c_2\tan(M\xi/2))^2}{M^2(c_2-c_1\tan(M\xi/2))^2}\right),\tag{32}$$

其中, $M=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$, $\xi=x-(\lambda^2\delta-4\delta\mu)t$.

$$u_6(\xi)=-2\delta(\lambda^2+2\mu)-\frac{24\lambda\delta\mu(c_1+c_2\tan(M\xi/2))}{M(c_2-c_1\tan(M\xi/2))}-\frac{48\delta\mu^2(c_1+c_2\tan(M\xi/2))^2}{M^2(c_2-c_1\tan(M\xi/2))^2},\tag{33}$$

其中, $M=\sqrt{4\mu-\lambda^2}$, $\xi=x+(\lambda^2\delta-4\delta\mu)t$.

将方程(5)的解代入式(22),便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\mu>0$ 时,

$$u_7(\xi)=-\frac{12\delta\mu(c_1^2+c_2^2)^2\sec^4(\sqrt{\mu}\xi)}{(c_2-c_1\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2(c_1+c_2\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2},\ \xi=x+16\delta\mu t.\tag{34}$$

当 $\mu<0$ 时,

$$u_8(\xi)=\frac{12\delta\mu(c_1^2-c_2^2)^2\operatorname{sech}^4(\sqrt{-\mu}\xi)}{(c_2+c_1\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2(c_1+c_2\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2},\ \xi=x+16\delta\mu t.\tag{35}$$

将方程(5)的解代入式(23),便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\mu > 0$ 时,

$$u_9(\xi)=4\delta\mu\left(2-\frac{3(c_2-c_1\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2}{(c_1+c_2\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2}-\frac{3(c_1+c_2\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2}{(c_2-c_1\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2}\right),\quad \xi=x-16\delta\mu t. \tag{36}$$

当 $\mu < 0$ 时,

$$u_{10}(\xi)=4\delta\mu\left(2+\frac{3(c_2+c_1\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2}{(c_1+c_2\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2}+\frac{3(c_1+c_2\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2}{(c_2+c_1\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2}\right),\quad \xi=x-16\delta\mu t. \tag{37}$$

将方程(5)的解代入(24)式,便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\mu > 0$ 时,

$$u_{11}(\xi)=-\frac{12\delta\mu(c_1^2+c_2^2)}{(c_1\cos(\sqrt{\mu}\xi)+c_2\sin(\sqrt{\mu}\xi))^2},\ \xi=x+4\delta\mu t. \tag{38}$$

当 $\mu < 0$ 时,

$$u_{12}(\xi)=-\frac{12\delta\mu(c_1^2-c_2^2)}{(c_1\cosh(\sqrt{-\mu}\xi)+c_2\sinh(\sqrt{-\mu}\xi))^2},\ \xi=x+4\delta\mu t. \tag{39}$$

将方程(5)的解代入式(25),便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\mu > 0$ 时,

$$u_{13}(\xi)=-4\delta\mu\left(1+\frac{3(c_2-c_1\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2}{(c_1+c_2\tan(\sqrt{\mu}\xi))^2}\right),\ \xi=x-4\delta\mu t. \tag{40}$$

当 $\mu < 0$ 时,

$$u_{14}(\xi)=-4\delta\mu\left(1-\frac{3(c_2+c_1\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2}{(c_1+c_2\tanh(\sqrt{-\mu}\xi))^2}\right),\ \xi=x-4\delta\mu t. \tag{41}$$

将方程(5)的解代入式(26),便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\lambda^2-4\mu > 0$ 时,

$$u_{15}(\xi)=-\frac{2\delta M[-4c_1+c_2(\cosh(M\xi)+\sinh(M\xi))]\operatorname{sech}^2(M\xi/2)}{[c_1+c_2\tanh(M\xi/2)]^2}; \tag{42}$$

当 $\lambda^2-4\mu=0$ 时,

$$u_{16}(\xi)=\frac{\delta(\lambda^2(c_1+c_2\xi)^2-4(3c_2^2+\mu(c_1+c_2\xi)^2))}{(c_1+c_2\xi)^2}; \tag{43}$$

当 $\lambda^2-4\mu < 0$ 时,

$$u_{17}=\delta\left[-2(\lambda^2+2\mu)-\frac{3M[c_2-c_1\tan(M\xi/2)]^2}{[c_1+c_2\tan(M\xi/2)]^2}-\frac{6\lambda M[c_2-c_1\tan(M\xi/2)]}{c_1+c_2\tan(M\xi/2)}\right], \tag{44}$$

其中, $M=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$, $\xi=x+2\delta(\lambda^2+2\mu)t$, $\lambda=\pm 2\mathrm{i}\sqrt{2\mu}$.

将方程(5)的解代入式(27),便可以得到方程(8)的如下行波解:

当 $\lambda^2-4\mu > 0$ 时,

$$u_{18}=\frac{12\delta c_1 M\operatorname{sech}^2(M\xi/2)}{[c_1+c_2\tanh(M\xi/2)]^2}; \tag{45}$$

当 $\lambda^2-4\mu=0$ 时,

$$u_{19}=\frac{3\delta[\lambda^2c_1-4(c_2+\mu c_1)^2]}{(c_1+c_2\xi)^2};\tag{46}$$

当 $\lambda^2-4\mu<0$ 时,

$$u_{20}=3\delta\left[-4\mu-\frac{M[c_2-c_1\tan(M\xi/2)]^2}{[c_1+c_2\tan(M\xi/2)]^2}-\frac{2\lambda M[c_2-c_1\tan(M\xi/2)]}{c_1+c_2\tan(M\xi/2)}\right],\tag{47}$$

其中, $M=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$, $\xi=x+12\delta\mu t$, $\lambda=\pm 2\mathrm{i}\sqrt{2\mu}$.

注 2　如果 c_1,c_2,λ 及 μ 都赋予特殊值的话,便可以得到一些已知解. 特别地,如果令 $c_2=0$,$c_1\neq 0$,$\mu<0$,则解 $u_{12}(\xi)$ 和 $u_{14}(\xi)$ 可化为如下形式:

$$u_{21}(\xi)=-12\delta\mu\operatorname{sech}^2(\sqrt{-\mu}\xi),\ \xi=x+4\delta\mu t,\tag{48}$$

$$u_{22}(\xi)=-4\delta\mu+12\delta\mu\tanh^2(\sqrt{-\mu}\xi),\ \xi=x-4\delta\mu t.\tag{49}$$

注 3　$u_{21}(\xi)$,$u_{22}(\xi)$ 都是大家熟知的解(可查看文献[1]). 而解 $u_1(\xi)-u_{20}(\xi)$ 在文献[1-3,6-7,9-11,18-21]及其它文献中并没有给出,这里是第一次给出.

3　总　结

本文应用一种新的辅助方程法成功的获得了(1+1)维 KdV 方程的 22 个含有参数 c_1 和 c_2 的精确行波解,其中包括一些新解和已知解. 与其它方法相比,本文所给的方法具有简单易懂、高效、计算量小、速度快、易于求解等特点. 值得说明的是,本文所给的方法不仅完全包括了文献[13-17]中应用的方法,而且更加有效. 另外,本文的方法还可以用来求解数学物理领域中其它的一大类非线性发展方程的行波解. 更重要的是,本文的方法还能够用来求解一些高维或高阶非线性发展方程的精确行波解或者非行波解,有关这方面的内容我们将在其它文章中给出.

参考文献:

[1]　李志斌. 非线性数学物理方程的行波解[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[2]　刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[3]　楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[4]　李翊神. 孤子与可积系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999.

[5]　M·B·A·曼索. 非线性耗散-色散方程行波解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(4): 479- 483.

[6]　Wazwaz A M. The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **154**(3):713-723.

[7]　邓镇国, 马和平. 广义 KdV 方程 Fourier 谱逼近的最优误差估计 [J]. 应用数学和力学, 2009 , **30**(1) :30-39.

[8]　套格图桑, 斯仁道尔吉. 新的辅助方程法构造非线性发展方程的孤立波解[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2004, **35**(3):0246-0251.

[9]　ZHANG Sheng, XIA Tie-cheng. A generalized new auxiliary equation method and its applications to nonlinear partial differential equations[J]. *Phys Lett A*, 2007, **363**(5/6):356-360.

[10]　李保安, 尤国伟, 秦青. BBM 方程的周期波解和孤立波解[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2004, **25**(5):70-73.

[11]　Wazwaz A M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations[J]. *Math Comput Modelling*, 2004, **40**(5/6): 499-508.

[12] ZHANG Sheng. Application of Exp-function method for (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations[J]. *Computers Mathematics with Applications*, 2008, **56**(5): 1451-1456.

[13] WANG Ming-liang, LI Xiang-zheng, ZHANG Jing-liang. The (G/G')-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. *Phys Lett A*, 2008 , **372**(4):417- 423.

[14] Bekir A. Application of the (G/G')-expansion method for nonlinear evolution equations[J]. *Phys Lett A*, 2008, **372**(19): 3400-3406.

[15] ZHANG Jiao, WEI Xiao-li, LU Yong-jie. A generalized (G/G')-expansion method and its applications[J]. *Phys Lett A*, 2008, **372**(20): 3653-3658.

[16] ZHANG Sheng, TONG Jing-lin, WANG Wei. A generalized (G/G')-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients[J]. *Phys Lett A*, 2008, **372**(13): 2254-2257.

[17] BIAN Chun-quan, PANG Jing, JIN Ling-hua, YING Xiao-mei. Solving two fifth order strong nonlinear evolution equations by using the (G/G')-expansion method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, **15**(9): 2337-2343.

[18] Wazwaz A M. Compactons, solitons and periodic solutions for variants of the KdV and the KP equations[J]. *Appl Math Comput*, 2005, **161**(2):561-575.

[19] Schiesser W E. Method of lines solution of the Korteweg-de Vries equation[J]. *Comput Math Appl*, 1994, **28**(10/12):147-154.

[20] Yomba E. The extended Fan's sub-equation method and its application to KdV-mKdV, BKK and variant Boussinesq equations[J]. *Phys Lett A*, 2005 , **336**(6):463-476.

[21] Wazwaz A M. Distinct variants of the KdV equation with compact and noncompact structures [J]. *Appl Math Comput*, 2004, **150**(2):365-377.

New Auxiliary Equation Method for Solving the KdV Equation

PANG Jing[1], BIAN Chun-quan[1], CHAO Lu[2]

(1. *College of Science*, *Inner Mongolia University of Technology*, *Hohhot* 010051, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics of Shanghai Maritime University*, *Shanghai* 200315, *P. R. China*)

Abstract: A new auxiliary equation method was used to find exact travelling wave solutions to the (1+1)-dimensional KdV equation. Some exact travelling wave solutions with parameters have been obtained, which cover the existing solutions. Compared to other methods, the presented method is more direct, more concise, more effective, and easier for calculations. In addition, it can be used to solve other nonlinear evolution equations in mathematical physics.

Key words: auxiliary equation method; travelling wave solution; KdV equation; homogeneous balance method