文章编号:1000-0887(2010)07-0874-10

ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

平衡问题变分包含问题及不动点问题的二次极小化*

张石生[1], 李向荣[2], 陈志坚[2]

(1. 宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007;
2. 香港理工大学 应用数学系,香港 九龙)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 借助预解式技巧,寻求二次极小化问题 $\min_{x\in\Omega}\|x\|^2$ 的解,其中 Ω 是 Hilbert 空间中某一广义平衡问题的解集,与一无穷族非扩张映像的公共不动点的集合,以及某一变分包含的解集的交集. 在适当的条件下,逼近上述极小化问题的解的一新的强收敛定理被证明.

关 键 词: 二次极小化问题; 广义平衡问题; 变分包含; 多值极大单调映像; 逆强单调映像; 预解算子; 不动点; 非扩张映像

中图分类号: O177.91　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.013

1 引言及预备知识

本文处处假定 H 是一具内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的实 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空的闭凸子集, $F(T)=\{x\in H: Tx=x\}$ 是 T 的不动点集.

设 $A:H\to H$ 是一单值的非线性映像, $M:H\to 2^H$ 是一多值映像. 所谓的拟-变分包含问题(参见 Noor 和 Chang 的文献[1-3])是求一 $u\in H$ 使得

$$\theta\in A(u)+M(u). \tag{1}$$

由结构分析学、力学、经济学所提出的许多问题,都可归结为在这一类变分包含的框架下进行研究(例如文献[4]).

变分包含问题(1)的解集记为 VI(H,A,M).

特例

(Ⅰ) 如果 $M=\partial\phi: H\to 2^H$,其中 $\phi: H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一真凸的下半连续函数,而 $\partial\phi$ 是 ϕ 的次微分,则变分包含问题(1) 等价于求一 $u\in H$ 使得

$$\langle Au, y-u\rangle+\phi(y)-\phi(u)\geqslant 0,\qquad \forall y\in H. \tag{2}$$

该式称为混合拟-变分不等式[5].

(Ⅱ) 如果 $M=\partial\delta_C$,其中 C 是 H 之一非空闭凸子集,而 $\delta_C: H\to[0,\infty]$ 是 C 的指示函数,即

* **收稿日期:** 2009-11-23; **修订日期:** 2010-05-30

作者简介: 张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(联系人. E-mail: changss@yahoo.cn);
李向荣(E-mail: majlee@polyu.edu.hk);
陈志坚(E-mail: machanck@polyu.edu.hk).

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C, \end{cases}$$

则变分包含问题(1)等价于求 $u \in C$ 使得

$$\langle A(u), v - u \rangle \geqslant 0, \qquad \forall v \in C. \tag{3}$$

这一问题称为 Hartman-Stampacchia 变分不等式(例如文献[6]). 变分不等式(3)的解集记为 $\mathrm{VI}(C,A)$.

一映像 $S:C \to C$ 称为非扩张的,如果

$$\| Sx - Sy \| \leqslant \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in C.$$

定义 1.1 一映像 $A:H \to H$ 称为 α-逆-强单调的(见文献[7-8]),如果存在一 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geqslant \alpha \| Ax - Ay \|^2, \qquad \forall x, y \in H.$$

一多值映像 $M:H \to 2^H$ 称为单调的,如果对任意的 $x, y \in H, u \in Mx, v \in My$ 就有 $\langle u - v, x - y \rangle \geqslant 0$. 一多值映像 $M:H \to 2^H$ 称为极大单调的,如果它是单调的,而且如果对任意的 $(x, u) \in H \times H$, 当 $\langle u - v, x - y \rangle \geqslant 0$ 对每一 $(y, v) \in \mathrm{graph}(M)$ (映像 M 的图像) 成立时,就有 $u \in Mx$.

命题 1.1[9] 设 $A:H \to H$ 是一 α-逆-强单调映像,则

1) A 是一 $(1/\alpha)$-Lipschitz 的、连续的单调映像;

2) 如果 λ 是 $(0, 2\alpha]$ 中的任一常数, 则映像 $I - \lambda A$ 是非扩张的, 其中 I 是 H 上的恒等映像.

设 $B:C \to H$ 是一非线性映像,而 $F:C \times C \to \mathbf{R}$ 是一双变量的函数. 所谓的广义平衡问题是求一点 $u \in C$ 使得

$$F(u, y) + \langle Bu, y - u \rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{4}$$

问题(4)的解集记为 GEP. 如果 $B = 0$, 则问题(4) 化为下面的平衡问题:求 $u \in C$ 使得

$$F(u, y) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{5}$$

问题(5)的解集记为 EP.

平衡问题于 1994 年由 Blum 和 Oettli[10] 引入,它在纯粹和应用科学方面取得巨大的效果和影响. 实践证明,平衡问题理论,为经济学、金融学、图像恢复、生态学、运输、网络、弹性理论及最优化理论等所提出的许多问题,提供一种新的、统一的处理方法.

引理 1.1[11] 设 E 是一严格凸的 Banach 空间, C 是 E 的一闭凸子集. 设 $\{T_n: C \to C\}$ 是一非扩张映像的序列,且 $\cap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$. 设 $\{\lambda_n\}$ 是一正数的序列,且 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. 则由下式所定义的映像 $S:C \to C$:

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n x, \qquad x \in C \tag{6}$$

是适定的、非扩张的且 $F(S) = \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.

在本文中,我们致力于研究下面的二次极小化问题

$$\min_{x \in \Omega} \| x \|^2 \tag{7}$$

解的存在性及解的逼近问题,其中 $\Omega = F(S) \cap \mathrm{GEP} \cap \mathrm{VI}(H, A, M)$, $F(S)$ 是由式(6) 所定义的映像 S 的不动点集, GEP 是广义平衡问题(4) 的解集,而 $\mathrm{VI}(H, A, M)$ 是变分包含问题(1)的解集.

为此,我们首先追述某些定义、结论及符号.

以后,我们用 $x_n \rightharpoonup x$ 和 $x_n \to x$ 分别表示序列 $\{x_n\}$ 的弱收敛和强收敛.

设 H 是一实 Hilbert 空间,C 是 H 的一非空的闭凸子集. 对任意的 $x \in H$,在 C 中存在唯一的最近点,记为 $P_C(x)$, 使得

$$\| x - P_C x \| \le \| x - y \|, \qquad \forall y \in C.$$

由 H 到 C 上的这一映像 P_C 称为度量投影. 众所周知,度量投影 $P_C: H \to C$ 是非扩张的.

定义 1.2 设 H 是一 Hilbert 空间,$M: H \to 2^H$ 是一多值的极大单调映像,则由下式定义的单值映像 $J_{M,\lambda}: H \to H$:

$$J_{M,\lambda}(u) = (I + \lambda M)^{-1}(u), \qquad u \in H$$

称为与 M 相关的预解算子,其中 λ 是任意的正数,而 I 是恒等映像.

命题 1.2[9] 1)与 M 相关的预解算子 $J_{M,\lambda}$ 对一切 $\lambda > 0$ 是单值的和非扩张的,即

$$\| J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \| \le \| x - y \|, \qquad \forall x,y \in H, \forall \lambda > 0.$$

2)预解算子 $J_{M,\lambda}$ 是 1-逆-强单调的,即

$$\| J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \|^2 \le \langle x - y, J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \rangle, \qquad \forall x,y \in H.$$

定义 1.3 一单值映像 $A: H \to H$ 称为半连续的,如果对任意的 $x,y,z \in H$,函数 $t \mapsto \langle A(x + ty), z \rangle$ 在 0 处是连续的.

已知,每一连续映像必是半连续的.

下面的引理,在证明本文主要结果时是必须的.

引理 1.2[12] 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 Banach 空间 X 中的两个有界的序列,设 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列,且 $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$. 假设 $x_{n+1} = (1-\beta_n) y_n + \beta_n x_n, n \ge 0$, 而且

$$\limsup_{n\to\infty} (\| y_{n+1} - y_n \| - \| x_{n+1} - x_n \|) \le 0.$$

则 $\lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = 0$.

引理 1.3[13] 设 X 是一实 Banach 空间,X^* 是 X 的对偶空间,$T: X \to 2^{X^*}$ 是一极大单调映像,而 $P: X \to X^*$ 是一半连续的、有界的单调映像且 $D(P) = X$. 则 $S = T + P: X \to 2^{X^*}$ 是一极大单调的映像.

引理 1.4[14] 设 X 是一致凸的 Banach 空间,C 是 X 的一非空的闭凸子集,而 $T: C \to C$ 是一非扩张映像且有不动点,则 $I - T$ 在下述意义下是“半 - 闭的”,即:如果 $\{x_n\}$ 是 C 中的一序列,使得 $x_n \rightharpoonup x$ 而且 $(I - T)x_n \to 0$,则 $(I - T)x = 0$.

在本文中,我们处处假定双变量的函数 $F: C \times C \to \mathbf{R}$ 满足下面的条件:

(H1) $F(x,x) = 0$,对所有的 $x \in C$;

(H2) F 是单调的,即 $F(x,y) + F(y,x) \le 0$,对所有的 $x,y \in C$;

(H3) 对每一 $x,y,z \in C, \lim_{t\downarrow 0} F(tz + (1-t)x, y) \ge F(x,y)$;

(H4) 对每一 $x \in C, y \mapsto F(x,y)$ 是凸的和下半连续的.

引理 1.5[15] 设 H 是一实的 Hilbert 空间,C 是 H 的一非空的闭凸子集,$F: C \times C \to \mathbf{R}$ 是满足条件(H1)~(H4)的一双变量函数. 设 $\mu > 0$ 且 $x \in H$. 则存在一点 $z \in C$ 使得

$$F(z,y) + \frac{1}{\mu}\langle y - z, z - x \rangle \ge 0, \qquad \forall y \in C.$$

此外,如果 $T_\mu: H \to C$ 是由下式定义的映像:

$$T_\mu(x) = \left\{ z \in C: F(z,y) + \frac{1}{\mu}\langle y - z, z - x \rangle \ge 0, \forall y \in C \right\}, \qquad x \in H, \tag{8}$$

则下面的结论成立:

1) T_μ 是单值的和强非扩张的,即对任意的 $x,y\in H$,

$$\|T_\mu x-T_\mu y\|^2\leqslant\langle T_\mu x-T_\mu y,x-y\rangle;$$

2) 平衡问题(5)的解集 EP 是闭的和凸的,而且 $\mathrm{EP}=F(T_\mu)$.

2 主要结果

为了证明本文的主要结果,我们先给出下面的引理.

引理 2.1 1)[9] $u\in H$ 是变分包含式(1) 的解,当且仅当 $u=J_{M,\lambda}(u-\lambda Au)$, $\forall\lambda>0$, 即

$$\mathrm{VI}(H,A,M)=F(J_{M,\lambda}(I-\lambda A)),\qquad\forall\lambda>0.$$

2) $u\in C$ 是广义平衡问题(4) 的解,当且仅当 $u=T_\mu(u-\mu Bu)$, $\forall\mu>0$, 即

$$\mathrm{GEP}=F(T_\mu(I-\mu B)),\qquad\forall\mu>0.$$

3) 如果 $A:H\to H$ 是一 α- 逆 - 强单调映像,而 $B:C\to H$ 是一 β- 逆 - 强单调映像. 如果 $\lambda\in(0,2\alpha]$ 且 $\mu\in(0,2\beta]$,则 $\mathrm{VI}(H,A,M)$ 是 H 中的一闭凸子集,而 GEP 是 C 中的一闭凸子集.

证明 2) 事实上,

$$u\in\mathrm{GEP}\Leftrightarrow u\in C \text{ 使得 } F(u,y)+\langle Bu,y-u\rangle\geqslant0,\qquad\forall y\in C$$

$$\Leftrightarrow u\in C \text{ 使得 } F(u,y)+\frac{1}{\mu}\langle y-u,u-(I-\mu B)u\rangle\geqslant0,\qquad\forall y\in C$$

$$\Leftrightarrow u=T_\mu(u-\mu Bu)\Leftrightarrow u\in F(T_\mu(I-\mu B)).$$

3) 众所周知,每一定义在 H 上的非扩张映像的不动点的集合是闭凸的. 于是由命题 1.1 的 2) 和命题 1.2 得知,如果 $\lambda\in(0,2\alpha]$,则映像 $J_{M,\lambda}(I-\lambda A):H\to H$ 是非扩张的. 故由结论 1) 得知 $\mathrm{VI}(H,A,M)=F(J_{M,\lambda}(I-\lambda A))$ 是 H 中的一闭凸子集. 类似地,如果 $\mu\in(0,2\beta]$,则由结论 2) 及引理 1.5 的 1) 得知 $\mathrm{GEP}=F(T_\mu(I-\mu B))$ 是 C 中的一闭凸集.

定理 2.1 设 H 是一实 Hilbert 空间,C 是 H 中的一非空闭凸子集,$A:H\to H$ 是一 α- 逆 - 强单调映像,而 $B:C\to H$ 是一 β- 逆 - 强单调映像. 设 $M:H\to2^H$ 是一极大单调映像, $\{T_n:C\to C\}$ 是一非扩张映像的序列,且 $\cap_{n=1}^\infty F(T_n)\neq\emptyset$. 设 $S:C\to C$ 是由式(6) 定义的非扩张映像. 设 $F:C\times C\to\mathbf{R}$ 是一双变量函数,其满足条件(H1) ~ (H4). 设 $\{x_t\}$ 是由下式定义的序列:

$$x_t=SP_C[(1-t)J_{M,\lambda}(I-\lambda A)T_\mu(I-\mu B)]x_t,\qquad t\in(0,1),\tag{9}$$

其中 $T_\mu:H\to C$ 是由式(8) 定义的映像,而 λ,μ 是两个常数使得 $\lambda\in(0,2\alpha)$,$\mu\in(0,2\beta)$. 如果集 $\Omega:=F(S)\cap\mathrm{VI}(H,A,M)\cap\mathrm{GEP}\neq\emptyset$,其中 $\mathrm{VI}(H,A,M)$ 和 GEP 分别是变分包含问题(1) 和广义平衡问题(4) 的解集. 则存在 $x^*\in\Omega$, 是下面的二次极小化问题的解:

$$\|x^*\|^2=\min_{x\in\Omega}\|x\|^2,\tag{10}$$

而且由式(9)定义的网 $\{x_t\}$ 强收敛于 $x^*\in\Omega$(当 $t\to0$ 时).

证明 (Ⅰ) 先证网 $\{x_t\}\subset C$ 是适定的.

事实上,对每一 $t\in(0,1)$ 定义一映像 $W_t:C\to C$ 如下:

$$W_tx=SP_C[(1-t)J_{M,\lambda}(I-\lambda A)T_\mu(I-\mu B)]x,\qquad x\in C.$$

由定理的假定, $\lambda\in(0,2\alpha)$,$\mu\in(0,2\beta)$. 故由命题1.1 的2)、命题1.2、引理1.1 及引理1.5 得知,映像 SP_C, $J_{M,\lambda}$, $I-\lambda A$, $I-\mu B$ 及 T_μ 都是非扩张的. 从而有

$$\|W_tx-W_ty\|\leqslant(1-t)\|x-y\|,\qquad\forall x,y\in C,\ t\in(0,1),$$

这就推出对每一 $t\in(0,1)$,$W_t:C\to C$ 是一压缩映像. 由 Banach 压缩映像定理,存在唯一的不动点 $x_t\in C$ 使得 $x_t=W_tx_t$.

(Ⅱ) 现在我们证明序列 $\{x_t\}$ 是有界的.

令

$$u_t = T_\mu(I-\mu B)x_t;\ y_t = J_{M,\lambda}(I-\lambda A)u_t, \qquad t\in(0,1). \tag{11}$$

取 $z\in\Omega$, 于是由引理 2.1 得知

$$z = T_\mu(z-\mu Bz) = J_{M,\lambda}(z-\lambda Az). \tag{12}$$

因 T_μ 和 $J_{M,\lambda}$ 都是非扩张的,A 和 B 分别是α-逆-强单调的和β-逆-强单调的,于是由命题 1.1,有

$$\begin{aligned}
&\|u_t - z\|^2 = \|T_\mu(I-\mu B)x_t - T_\mu(z-\mu Bz)\|^2 \leqslant \\
&\quad \|(I-\mu B)x_t - (z-\mu Bz)\|^2 \leqslant \\
&\quad \|x_t - z\|^2 + \mu(\mu-2\beta)\|Bx_t - Bz\|^2
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\|y_t - z\|^2 = \|J_{M,\lambda}(I-\lambda A)u_t - J_{M,\lambda}(I-\lambda A)z\|^2 \leqslant \\
&\quad \|(I-\lambda A)u_t - (I-\lambda A)z\|^2 \leqslant \\
&\quad \|u_t - z\|^2 + \lambda(\lambda-2\alpha)\|Au_t - Az\|^2 \leqslant \\
&\quad \|x_t - z\|^2 + \lambda(\lambda-2\alpha)\|Au_t - Az\|^2 + \mu(\mu-2\beta)\|Bx_t - Bz\|^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

于是有

$$\|y_t - z\| \leqslant \|u_t - z\| \leqslant \|x_t - z\|. \tag{14}$$

由式(9)和(14)得知

$$\begin{aligned}
&\|x_t - z\| = \|SP_C[(1-t)y_t] - SP_C z\| \leqslant \|(1-t)y_t - z\| \leqslant \\
&\quad (1-t)\|y_t - z\| + t\|z\| \leqslant (1-t)\|x_t - z\| + t\|z\|,
\end{aligned} \tag{15}$$

即

$$\|x_t - z\| \leqslant \|z\|, \qquad \forall t\in(0,1).$$

这就证明了 $\{x_t\}$ 是有界的. 故由式(14) 得知网 $\{u_t\}$ 和 $\{y_t\}$ 也是有界的. 记

$$\begin{aligned}
M = \sup_{t\in(0,1)} \{&2\|z\|\|y_t - z\| + \|z\|^2 + 2[\lambda\|u_t - y_t\| + \\
&\mu\|x_t - u_t\| + \|y_t\|^2]\} < \infty.
\end{aligned}$$

(Ⅲ) 现在证明

$$\begin{cases}
\lim\limits_{t\to0}\|x_t - u_t\| = \lim\limits_{t\to0}\|u_t - y_t\| = \lim\limits_{t\to0}\|x_t - y_t\| = 0,\\
\lim\limits_{t\to0}\|x_t - Sx_t\| = 0.
\end{cases} \tag{16}$$

事实上,由式(9)和(13)有

$$\begin{aligned}
&\|x_t - z\|^2 \leqslant \|(1-t)y_t - z\|^2 = \|(1-t)(y_t - z) - tz\|^2 = \\
&\quad (1-t)^2\|y_t - z\|^2 - 2t(1-t)\langle z, y_t - z\rangle + t^2\|z\|^2 \leqslant \\
&\quad \|y_t - z\|^2 + tM \leqslant \\
&\quad \|x_t - z\|^2 + \lambda(\lambda-2\alpha)\|Au_t - Az\|^2 + \\
&\quad \mu(\mu-2\beta)\|Bx_t - Bz\|^2 + tM,
\end{aligned} \tag{17}$$

即

$$\lambda(2\alpha-\lambda)\|Au_t - Az\|^2 + \mu(2\beta-\mu)\|Bx_t - Bz\|^2 \leqslant tM \to 0 \qquad (\text{当 } t\to0).$$

由定理的假定, $\lambda\in(0,2\alpha)$ 和 $\mu\in(0,2\beta)$, 故有

$$\lim_{t\to0}\|Au_t - Az\| = \lim_{t\to0}\|Bx_t - Bz\| = 0. \tag{18}$$

由引理 1.5 的 1) 及式(9),有

$$
\begin{aligned}
\| u_t - z \|^2 &= \| T_\mu(x_t - \mu B x_t) - T_\mu(z - \mu B z) \|^2 \leqslant \\
&\langle (x_t - \mu B x_t) - (z - \mu B z), u_t - z \rangle = \\
&\frac{1}{2}\{ \| (x_t - \mu B x_t) - (z - \mu B z) \|^2 + \| u_t - z \|^2 - \\
&\| (x_t - z) - \mu(B x_t - B z) - (u_t - z) \|^2 \} \leqslant \\
&\frac{1}{2}\{ \| x_t - z \|^2 + \| u_t - z \|^2 - \| (x_t - u_t) - \mu(B x_t - B z) \|^2 \} = \\
&\frac{1}{2}\{ \| x_t - z \|^2 + \| u_t - z \|^2 - \| x_t - u_t \|^2 + \\
&2\mu \langle x_t - u_t, B x_t - B z \rangle - \mu^2 \| B x_t - B z \|^2 \}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

简化后,即得

$$
\begin{aligned}
\| u_t - z \|^2 &\leqslant \| x_t - z \|^2 - \| x_t - u_t \|^2 + \\
&2\mu \langle x_t - u_t, B x_t - B z \rangle - \mu^2 \| B x_t - B z \|^2 \leqslant \\
&\| x_t - z \|^2 - \| x_t - u_t \|^2 + 2\mu \| x_t - u_t \| \, \| B x_t - B z \| \leqslant \\
&\| x_t - z \|^2 - \| x_t - u_t \|^2 + M \| B x_t - B z \|.
\end{aligned} \tag{20}
$$

类似地,由命题 1.2 的 2)和式(9),有

$$
\begin{aligned}
\| y_t - z \|^2 &= \| J_{M,\lambda}(u_t - \lambda A u_t) - J_{M,\lambda}(z - \lambda A z) \|^2 \leqslant \\
&\langle (u_t - \lambda A u_t) - (z - \lambda A z), y_t - z \rangle = \\
&\frac{1}{2}\{ \| (u_t - \lambda A u_t) - (z - \lambda A z) \|^2 + \| y_t - z \|^2 - \\
&\| (u_t - \lambda A u_t) - (z - \lambda A z) - (y_t - z) \|^2 \} \leqslant \\
&\frac{1}{2}\{ \| u_t - z \|^2 + \| y_t - z \|^2 - \| (u_t - y_t) - \lambda(A u_t - A z) \|^2 \} = \\
&\frac{1}{2}\{ \| u_t - z \|^2 + \| y_t - z \|^2 - \| u_t - y_t \|^2 + \\
&2\lambda \langle u_t - y_t, A u_t - A z \rangle - \lambda^2 \| A u_t - A z \|^2 \}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

简化后,即得

$$
\begin{aligned}
\| y_t - z \|^2 &\leqslant \| u_t - z \|^2 - \| u_t - y_t \|^2 + \\
&2\lambda \langle u_t - y_t, A u_t - A z \rangle - \lambda^2 \| A u_t - A z \|^2 \leqslant \\
&\| u_t - z \|^2 - \| u_t - y_t \|^2 + 2\lambda \| u_t - y_t \| \, \| A u_t - A z \| \leqslant \\
&\| x_t - z \|^2 - \| x_t - u_t \|^2 + M \| B x_t - B z \| - \qquad (\text{由式}(20)) \\
&\| u_t - y_t \|^2 + M \| A u_t - A z \|.
\end{aligned} \tag{22}
$$

由式(17)和(22)有

$$
\begin{aligned}
\| x_t - z \|^2 &\leqslant \| y_t - z \|^2 + tM \leqslant \\
&\| x_t - z \|^2 - \| x_t - u_t \|^2 - \| u_t - y_t \|^2 + \\
&M[\| B x_t - B z \| + \| A u_t - A z \| + t],
\end{aligned}
$$

即

$$
\| x_t - u_t \|^2 + \| u_t - y_t \|^2 \leqslant M[\| B x_t - B z \| + \| A u_t - A z \| + t].
$$

上式与式(18)一起表明

$$
\lim_{t \to 0} \| x_t - u_t \| = \lim_{t \to 0} \| u_t - y_t \| = 0, \ \lim_{t \to 0} \| x_t - y_t \| = 0,
$$

从而有

$$\|x_t - Sx_t\| = \|SP_C[(1-t)y_t] - SP_C x_t\| \leqslant (1-t)\|y_t - x_t\| + t\|x_t\| \to 0 \qquad (t\to 0). \tag{23}$$

(Ⅳ) 下面我们证明 $\{x_t\}$ 当 $t\to 0$ 时是相对紧的.

设 $\{t_n\}\subset(0,1)$ 是任意的子序列使得 $t_n\to 0(n\to\infty)$. 故存在一正整数 n_0 使得 $0<t_n<1/2, \forall n\geqslant n_0$. 设 $x_n = x_{t_n}, u_n = u_{t_n}$ 且 $y_n = y_{t_n}$. 由式(23)即得

$$\|x_n - Sx_n\| \to 0 \qquad (\text{当 } n\to\infty). \tag{24}$$

因 $\{x_n\}$ 是有界的,不失一般性,可设 $x_n \rightharpoonup x^* \in H$. 由式(16) 即得 $u_n \rightharpoonup x^*$ 且 $y_n \rightharpoonup x^*$. 由引理1.4 及式(24) 得知 $x^* \in F(S)$.

下面我们证明 $x^* \in \mathrm{GEP}\cap \mathrm{VI}(H,A,M)$. 事实上,因 $u_n = T_\mu(x_n - \mu Bx_n)$, 故有

$$F(u_n,y) + \frac{1}{\mu}\langle y-u_n, u_n-(x_n-\mu Bx_n)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y\in C.$$

由条件(H2)得知 F 是单调的,于是有

$$\frac{1}{\mu}\langle y-u_n, u_n-(x_n-\mu Bx_n)\rangle \geqslant F(y,u_n), \qquad \forall y\in C.$$

从而

$$\left\langle y-u_n, \frac{u_n-x_n}{\mu} + Bx_n\right\rangle \geqslant F(y,u_n), \qquad \forall y\in C. \tag{25}$$

令 $z_t = ty+(1-t)x^*, t\in(0,1]$ 且 $y\in C$,故 $z_t\in C$. 由式(25)有

$$\begin{aligned}\langle z_t-u_n, Bz_t\rangle &\geqslant \langle z_t-u_n, Bz_t\rangle - \left\langle z_t-u_n, \frac{u_n-x_n}{\mu}+Bx_n\right\rangle + F(z_t,u_n) = \\ &\langle z_t-u_n, Bz_t-Bu_n\rangle + \langle z_t-u_n, Bu_n-Bx_n\rangle - \\ &\left\langle z_t-u_n, \frac{u_n-x_n}{\mu}\right\rangle + F(z_t,u_n).\end{aligned} \tag{26}$$

因 B 是β-逆-强单调的,于是由命题1.1 的1) 和式(16) 知 $\|Bu_n - Bx_n\| \leqslant (1/\beta)\|u_n - x_n\| \to 0$ 而且$\langle z_t-u_n, Bz_t-Bu_n\rangle \geqslant 0$. 在式(26) 中让 $n\to\infty$,并注意到条件(H4) 及 $u_n \rightharpoonup x^*$, 我们有

$$\langle z_t - x^*, Bz_t\rangle \geqslant F(z_t, x^*). \tag{27}$$

由条件(H1)和(H4)及式(27)即得

$$\begin{aligned}0 = F(z_t,z_t) &\leqslant tF(z_t,y) + (1-t)F(z_t,x^*) \leqslant \\ &tF(z_t,y) + (1-t)\langle z_t-x^*, Bz_t\rangle = tF(z_t,y) + (1-t)t\langle y-x^*, Bz_t\rangle,\end{aligned}$$

即

$$0 \leqslant F(z_t,y) + (1-t)\langle y-x^*, Bz_t\rangle. \tag{28}$$

在式(28)中让 $t\to 0$, 即得

$$F(x^*,y) + \langle y-x^*, Bx^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y\in C.$$

上式表明 $x^*\in \mathrm{GEP}$.

现在我们证明 $x^*\in \mathrm{VI}(H,A,M)$.

事实上,因 A 是α-逆-强单调的,故由命题1.1 的1) 得知 A 是一$(1/\alpha)$-Lipschitz 的、连续的、单调的映像,而且 $D(A)=H$(其中 $D(A)$ 是 A 的定义域). 由引理1.3 得知 $M+A$ 是极大单调的. 设$(v,f)\in \mathrm{graph}(M+A)$,即$f-Av\in M(v)$. 又因 $y_n = J_{M,\lambda}(u_n - \lambda Au_n)$,故 $u_n - \lambda Au_n$

$\in (I+\lambda M)(y_n)$, 即

$$\frac{1}{\lambda}(u_n - y_n - \lambda A u_n) \in M(y_n).$$

由 M 的极大单调性,有

$$\left\langle v - y_n, f - Av - \frac{1}{\lambda}\{u_n - y_n - \lambda A u_n\}\right\rangle \geqslant 0.$$

又因 A 是单调的,故有

$$\langle v - y_n, f\rangle \geqslant \left\langle v - y_n, Av + \frac{1}{\lambda}\{u_n - y_n - \lambda A u_n\}\right\rangle =$$

$$\left\langle v - y_n, Av - Ay_n + Ay_n - Au_n + \frac{1}{\lambda}\{u_n - y_n\}\right\rangle \geqslant$$

$$0 + \langle v - y_n, Ay_n - Au_n\rangle + \left\langle v - y_n, \frac{1}{\lambda}\{u_n - y_n\}\right\rangle. \tag{29}$$

因 $\|u_n - y_n\| \to 0$, $\|Au_n - Ay_n\| \to 0$ 且 $y_n \rightharpoonup x^*$, 于是由式(29)有

$$\lim_{n\to\infty}\langle v - y_n, f\rangle = \langle v - x^*, f\rangle \geqslant 0.$$

因 $A+M$ 是极大单调的,这就推出 $\theta \in (M+A)(x^*)$,即 $x^* \in \mathrm{VI}(H,M,A)$.

综合上面的讨论,我们已证明 $x^* \in \Omega := F(S) \cap \mathrm{VI}(H,M,A) \cap \mathrm{GEP}$.

此外,对任意的 $t \in (0,1/2)$ 及 $z \in \Omega$, 由式(15)有

$$\begin{aligned}
\|x_t - z\|^2 &\leqslant \|y_t - z - ty_t\|^2 = \|y_t - z\|^2 - 2t\langle y_t, y_t - z\rangle + t^2\|y_t\|^2 = \\
&\|y_t - z\|^2 - 2t\langle y_t - z, y_t - z\rangle - 2t\langle z, y_t - z\rangle + t^2\|y_t\|^2 = \\
&(1-2t)\|y_t - z\|^2 + 2t\langle z, z - y_t\rangle + t^2\|y_t\|^2 \leqslant \\
&(1-2t)\|x_t - z\|^2 + 2t\langle z, z - y_t\rangle + t^2\|y_t\|^2,
\end{aligned}$$

即

$$\|x_t - z\|^2 \leqslant \langle z, z - y_t\rangle + tM/2, \qquad \forall t \in (0,1/2),\ z \in \Omega.$$

特别地,我们有

$$\|x_n - z\|^2 \leqslant \langle z, z - y_n\rangle + t_n M/2, \qquad \forall n \geqslant n_0,\ z \in \Omega. \tag{30}$$

先在式(30)中令 $z = x^*$,并注意到 $y_n \rightharpoonup x^*$. 然后在式(30)中让 $n \to \infty$,即得 $x_n \to x^*$.

这就证明了,当 $t \to 0$ 时,网 $\{x_t\}$ 是相对紧的.

(V) 最后证明当 $t \to 0$ 时,$x_t \to x^*$,而且 x^* 是极小化问题(7)的解.

在式(30)中让 $n \to \infty$ 取极限,有

$$\|x^* - z\|^2 \leqslant \langle z, z - x^*\rangle, \qquad z \in \Omega. \tag{31}$$

设 $\{s_n\}$ 是(0,1)中任意的满足 $s_n \to 0$ 的子序列,且使得 $x_{s_n} \to y^*$. 借助上面给出的相同方法,我们可以证明 $y^* \in \Omega$. 在式(31)中取 $z = y^*$, 即得

$$\|x^* - y^*\|^2 \leqslant \langle y^*, y^* - x^*\rangle. \tag{32}$$

交换 x^* 和 y^* 的位置,由式(32)有

$$\|x^* - y^*\|^2 \leqslant \langle x^*, x^* - y^*\rangle. \tag{33}$$

把式(32)和(33)加起来,即得 $2\|x^* - y^*\|^2 \leqslant \|x^* - y^*\|^2$,故 $x^* = y^*$. 这就证明了 $x_t \to x^*$(当 $t \to 0$ 时). 此外,由式(31)得知

$$\|x^*\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle z, x^*\rangle \leqslant \|z\|^2 - \langle z, x^*\rangle.$$

因此我们有 $\|x^*\|^2 \leqslant \langle z, x^*\rangle$, $\forall z \in \Omega$, 即 $\|x^*\| \leqslant \|z\|$, $\forall z \in \Omega$.

这就完成定理2.1的证明.

在定理2.1中如果 $T=T_n,\forall n\geqslant 1$,则下面的推论由定理2.1即得.

推论2.1 设 H 是一实的 Hilbert 空间,C 是 H 中的一非空的闭凸子集,$A:H\to H$ 是一 α-逆-强单调映像,$B:C\to H$ 是一 β-逆-强单调映像.设 $M:H\to 2^H$ 是一极大单调映像,而 $\{T:C\to C\}$ 是一非扩张映像且 $F(T)\neq\emptyset$.设 $F:C\times C\to\mathbf{R}$ 是一满足条件(H1)~(H4)的双变量函数.设 $\{x_t\}$ 是一由下式定义的序列:

$$x_t=TP_C[(1-t)J_{M,\lambda}(I-\lambda A)T_\mu(I-\mu B)]x_t,\qquad t\in(0,1),\tag{34}$$

其中 λ,μ 是两个常数,$\lambda\in(0,2\alpha),\mu\in(0,2\beta)$.如果集合 $\Omega_1:=F(T)\cap \mathrm{VI}(H,A,M)\cap \mathrm{GEP}\neq\emptyset$,则存在 $x^*\in\Omega_1$ 是下面的二次极小化问题的解:

$$\|x^*\|^2=\min_{x\in\Omega_1}\|x\|^2,\tag{35}$$

而且由式(34)定义的网 $\{x_t\}$ 强收敛于 $x^*\in\Omega$(当 $t\to 0$ 时).

在定理2.1中,如果 $M=\partial\delta_C:H\to 2^H$,其中 $\delta_C:H\to[0,\infty]$ 是 C 的指示函数.则变分包含问题(1)等价于变分不等式(3),即,求一 $u\in C$ 使得

$$\langle A(u),v-u\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in C.$$

又因 $M=\partial\delta_C$,这就证明了 $J_{M,\lambda}=P_C$.因此,我们有下面的推论.

推论2.2 设 H 是一实的 Hilbert 空间,C 是 H 的一非空的闭凸子集,$A:H\to H$ 是一 α-逆-强单调映像,而 $B:C\to H$ 是一 β-逆-强单调映像.设 $M=\partial\delta_C:H\to 2^H$,$T:C\to C$ 是一非扩张映像,且 $F(T)\neq\emptyset$.设 $F:C\times C\to\mathbf{R}$ 是一满足条件(H1)~(H4)的双变量函数.设 $\{x_t\}$ 是由下式定义的序列:

$$x_t=T[(1-t)P_C(I-\lambda A)T_\mu(I-\mu B)]x_t,\qquad t\in(0,1),\tag{36}$$

其中 λ,μ 是两个常数,$\lambda\in(0,2\alpha),\mu\in(0,2\beta)$.如果集合 $\Omega_2:=F(S)\cap \mathrm{VI}(A,C)\cap \mathrm{GEP}\neq\emptyset$,其中 $\mathrm{VI}(A,C)$ 是变分不等式(3)的解集.则存在 $x^*\in\Omega_2$,是下面的二次极小化问题的解:

$$\|x^*\|^2=\min_{x\in\Omega_2}\|x\|^2,\tag{37}$$

而且由式(36)所定义的网 $\{x_t\}$ 强收敛于 $x^*\in\Omega$(当 $t\to 0$ 时).

致谢 作者对审稿人为改进本文所提出的的宝贵意见表示衷心感谢,并感谢宜宾学院自然科学基金(2009-Z003)对本文的资助.

参考文献:

[1] Noor M A, Noor K I. Sensitivity analysis of quasi variational inclusions[J]. *J Math Anal Appl*, 1999, **236**(2):290-299.

[2] Chang S S. Set-valued variational inclusions in Banach spaces[J]. *J Math Anal Appl*, 2000, **248**(2): 438-454.

[3] Chang S S. Existence and approximation of solutions of set-valued variational inclusions in Banach spaces[J]. *Nonlinear Anal*, 2001, **47**(1): 583-594.

[4] Demyanov V F, Stavroulakis G E, Polyakova L N, Panagiotopoulos P D. *Quasidifferentiability and Nonsmooth Modeling in Mechanics, Engineering and Economics*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.

[5] Noor M A. Generalized set-valued variational inclusions and resulvent equations[J]. *J Math Anal Appl*, 1998, **228**(1): 206-220.

[6] Hartman P, Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential equations[J]. *Acta Math*,

1966, **115**(1): 271-310.

[7] Browder F E, Petryshyn W V. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space[J]. *J Math Anal Appl*, 1967, **20**: 197-228.

[8] Iiduka H, Takahashi W, Toyoda M. Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings[J]. *Pan-Amer Math J*, 2004, **14**: 49-61.

[9] 张石生,李向荣,陈志坚. 拟变分包含及不动点问题公解的算法[J]. 应用数学和力学,2008, **29**(5): 515-524.

[10] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities problems[J]. *Math Stud*, 1994, **63**: 123-145.

[11] Bruck R E. Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1973, **179**: 251-262.

[12] Suzuki T. Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces[J]. *Fixed Point Theory Appl*, 2005, **2005**(1): 103-123.

[13] Pascali Dan. *Nonlinear Mappings of Monotone Type*[M]. The Netherlands: Sijthoff and Noordhoff International Publishers, 1978.

[14] Goebel K, Kirk W A. *Topics in Metric Fixed Point Theory, in Cambridge Studies in Advanced Mathematics*[M]. **28**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[15] Combettes P L, Hirstoaga S A. Equilibrium programming in Hilbert spaces[J]. *J Nonlinear Convex Anal*, 2005, **6**: 117-136.

Quadratic Minimization for Equilibrium Problem Variational Inclusion and Fixed Point Problem

ZHANG Shi-sheng[1], LEE Joseph H W[2], CHAN Chi-kin[2]

(1. *Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan* 644007, *P. R. China*;
2. *Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong, P. R. China*)

Abstract: The purpose was by using the resolvent approach to find the solutions to the quadratic minimization problem: $\min_{x\in\Omega}\|x\|^2$, where Ω was the intersection set of the set of solutions to some generalized equilibrium problem, the set of common fixed points for an infinite family of nonexpansive mappings and the set of solutions to some variational inclusions in the setting of Hilbert spaces. Under suitable conditions some new strong convergence theorems for approximating to a solution of the above minimization problem were proved.

Key words: quadratic minimization problem; generalized equilibrium problem; variational inclusion; multi-valued maximal monotone mapping; inverse-strongly monotone mapping; resolvent operator; fixed point; nonexpansive mapping