

反平面裂纹在裂纹自由表面附近的弹塑性分析*

易志坚^{1,2}, 谷建义², 何小兵², 马银华²,
杨庆国², 彭凯², 黄锋², 黄宗明¹

(1. 重庆大学 土木学院, 重庆 400044;

2. 重庆交通大学 土木建筑学院, 重庆 400074)

(我刊编委易志坚来稿)

摘要: 裂纹自由面附近的弹塑性场和弹塑性边界是裂纹弹塑性分析的重要内容,但现有的方法难以对其进行有效描述.该文发展了裂纹线场分析方法的研究思路,将裂纹面视为裂纹线的拓展部分,对理想弹塑性Ⅲ型裂纹进行了裂纹面附近弹塑性场的分析,得出了裂纹面附近弹塑性应力场、塑性区长度和弹塑性边界的单位法向量.分析结果表明,可放弃传统的小范围屈服条件.

关键词: 反平面裂纹; 理想弹塑性材料; 裂纹面; 弹塑性边界; 塑性区

中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.010

引 言

对理想弹塑性裂纹体,当其受力后,裂纹尖端附近区域将出现塑性区,此时,裂纹自由表面附近靠近裂纹尖端的区域,是否也会出现屈服而进入塑性区呢?显然,应该对这一重要而有意义的问题给出明确回答.但现有的弹塑性分析方法难以对此进行精确、严密的分析和求解.

不难发现,裂纹面正好与裂纹线处于同一直线上.如果拓展裂纹线场分析方法的研究思路,则可以对裂纹面附近的弹塑性场和弹塑性边界进行分析和求解.

通常,裂纹线场分析方法仅分析裂纹延长线附近的弹塑性特性.早期的裂纹线场分析方法由 Achenbach 等^[1], Guo 等^[2] 和 Yi^[3] 提出,但他们的分析仍然受传统小范围屈服条件的限制.易志坚等^[4-7]①从根本上发展了线场分析方法,突破了传统的小范围屈服条件.线场分析方法的基本思路是:求出塑性场在裂纹线附近的幂级数形式的通解,并将裂纹体弹性场的精确解在裂纹线附近按幂级数形式展开,将塑性场的通解与弹性场的精确解在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配,从而完全放弃小范围屈服条件,所得出的弹塑性场、塑性区尺寸在裂纹线附近足够精确,不受屈服范围大小的限制.线场分析方法作为裂纹弹塑性分析的一种独立方法,已解决

* 收稿日期: 2010-04-07; 修订日期: 2010-05-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672196)

作者简介: 易志坚(1963—),男,重庆人,教授,博士生导师(联系人. E-mail: yizjyizj@hotmail.com).

① YI Zhi-jian. Queries about the famous closed form elastic-plastic solution for mode III crack given by Hult and McClintock[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2010, in publishing.

了不少裂纹问题^[8-11]。

当我们将极坐标的原点置于裂纹尖端(如图1所示),则裂纹线就是当 $\theta=0$ 时的 r 坐标线,而裂纹面正好就是当 $\theta=\pi$ 或 $\theta=-\pi$ 时的 r 坐标线。本文发展了裂纹线场分析方法,将其用于分析裂纹自由表面附近的弹塑性特性,求得了理想弹塑性反平面裂纹无限宽板在裂纹面附近的应力场、塑性区长度和弹塑性边界的单位法向量,并且完全放弃了传统的小范围屈服条件。

1 裂纹面附近塑性区应力场的通解

如图1所示,对理想弹塑性反平面裂纹静力问题,不为0的应力分量 τ_{xz}, τ_{yz} 仅与坐标 x, y 相关。平衡微分方程和 Mises 屈服条件为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (2)$$

其中, k 为剪切屈服应力。

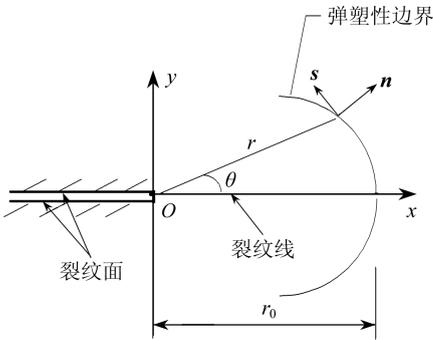


图1 裂纹线和裂纹面

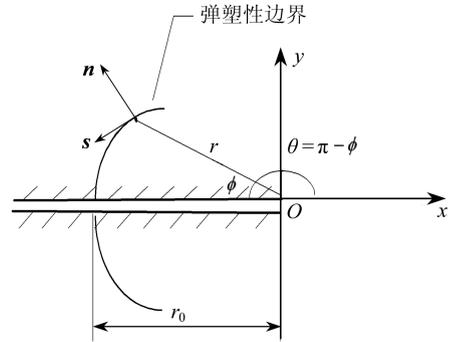


图2 裂纹面附近区域

通常,为了求得塑性应力场,必须求解偏微分方程(1)和(2)。但是偏微分方程的解带有任意待定函数项,具有不确定性。或者说,偏微分方程(1)和(2)的解无限多,其确定形式的解难以求得。然而,线场分析方法在数学上有其特殊的优势,可以将求解偏微分方程的问题转化为求解常微分方程,从而,可求出裂纹线附近幂级数形式的通解^[4,8-9]。

同样地,在裂纹面附近,偏微分方程(1)和(2)可以转化为常微分方程求解。

在裂纹面附近区域(如图2), τ_{xz} 和 τ_{yz} 可以按 y 的 Taylor 级数表示为

$$\tau_{xz} = p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + O(y^3), \quad (3a)$$

$$\tau_{yz} = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 + O(y^3). \quad (3b)$$

将方程(3)代入平衡微分方程(1)和屈服条件(2),比较等式两端 y 的同次幂系数得

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} + q_1 = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + 2q_2 = 0, \quad (4b)$$

$$p_0^2 + q_0^2 = k^2, \quad (5a)$$

$$2p_0p_1 + 2q_0q_1 = 0, \quad (5b)$$

$$p_1^2 + q_1^2 + 2p_0p_2 + 2q_0q_2 = 0. \quad (5c)$$

可见,偏微分方程(1)和(2)转化为了常微分方程(4)和(5)。

裂纹自由表面的边界条件 $(\tau_{yz})_{y=0} = 0$ 必须满足, 所以有

$$q_0 = 0. \quad (6)$$

求解方程(4)、(5)和(6)得

$$p_0 = -k, q_0 = q_1 = p_1 = q_2 = p_2 = \dots = 0. \quad (7)$$

将方程(7)带入方程(3), 即可求得裂纹面附近塑性区应力场的通解为

$$\tau_{xz} = -k, \quad (8a)$$

$$\tau_{yz} = 0. \quad (8b)$$

需要说明的是, 我们还可以同时得到另一解 $\tau_{xz} = k, \tau_{yz} = 0$. 尽管对于准静态扩展裂纹, 在裂纹面附近的第2塑性区存在解 $\tau_{xz} = k, \tau_{yz} = 0$, 但这一解不适合静止裂纹, 它与塑性区之外的弹性场不能匹配^[12].

2 裂纹面附近的弹塑性边界

如图2所示, 如果引入一个新的坐标 $\phi = \pi - \theta$, 当 $\theta \rightarrow \pi$ 时, 则 $\phi \rightarrow 0$. 于是, 裂纹面附近的弹塑性边界可以定义为 $r = r_p(\phi)$. 这里, 我们放弃了小范围屈服条件的假定之一, 即塑性区的存在使裂纹尖端弹性场沿裂纹线移动的假定, 传统的分析一直难以放弃这一假定.

因为弹塑性边界 $r_p(\phi)$ 关于裂纹面 $\phi = 0$ 对称, 所以, 对于一个小量 ϕ , $r_p(\phi)$ 可以表示为 Taylor 级数

$$r_p(\phi) = r_0 + r_2\phi^2 + O(\phi^4), \quad (9)$$

式中 r_0 为沿裂纹面塑性区的长度, r_0 和 r_2 可以通过裂纹面附近弹塑性边界上弹性场和塑性场之间的匹配决定.

在弹塑性边界上, $x = -r_p \cos \phi, y = r_p \sin \phi$, 所以弹塑性边界的切向量可以表示为

$$\boldsymbol{\tau} = -(2r_2 - r_0)\phi \mathbf{i} + r_0 \mathbf{j},$$

进而可以求得裂纹面附近弹塑性边界的单位法向量 \mathbf{n} 在 x, y 方向的分量, 为

$$n_x = -1 + \frac{1}{2}B_1^2\phi^2 + O(\phi^4), \quad (10a)$$

$$n_y = B_1\phi + O(\phi^3), \quad (10b)$$

其中

$$B_1 = 1 - 2\frac{r_2}{r_0}. \quad (11)$$

需要指出, 传统小范围屈服条件包含两个假定: 第1, 假定塑性区足够小, 塑性区之外的弹性场为裂纹的尖端奇异 K 场; 第2, 裂尖弹性奇异 K 场沿裂纹线虚拟地扩展了一距离 x_e .

从弹塑性边界的定义式(9)和图2可知, 小范围屈服条件的第2个假定已经被放弃.

3 裂纹面附近的匹配结果

3.1 裂纹面附近的匹配条件

在弹塑性边界上的局部坐标 \mathbf{n}, \mathbf{s} 中, 弹性区和塑性区的应力必须在弹塑性边界上连续, 也就是说, 在如图2所示的与坐标轴 \mathbf{n} 垂直的平面上, 剪应力 τ_{nz} 必须满足以下连续条件

$$\tau_{nz}^e = \tau_{nz}^p \quad (12)$$

及

$$\tau_{nz} = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y, \quad (13)$$

方程(12)中, τ_{nz}^e 表示弹性区的剪应力在弹塑性边界上的取值, τ_{nz}^p 表示塑性区的剪应力在弹塑性边界上的取值. 当弹性区的应力与塑性区的应力在弹塑性边界上匹配时, 方程(12)必须满足. 由于 τ_{sz} 不在与坐标轴 n 垂直的平面上, 而是在与坐标轴 s 垂直的平面上, 所以剪应力 τ_{sz} 在弹塑性边界两侧可以不相等, 也就是说, 对本问题, $\tau_{sz}^e = \tau_{sz}^p$ 不是必须满足的匹配条件.

3.2 小范围屈服情况下的匹配结果

由第2节可知, 小范围屈服条件的第2条假定(即裂尖弹性场沿裂纹线移动的假定)已放弃.

但是, 小范围屈服条件的第1个假定仍然可以采用. 如果采用这一假定, 也就是假设塑性区足够小且塑性区外的弹性场为裂尖弹性奇异 K 场, 则所得的匹配结果仅在小范围屈服情况下适用.

对反平面裂纹, 通常的裂尖弹性奇异 K 场为

$$\tau_{xz} = - (K_{III} / \sqrt{2\pi r}) \cdot \sin(\theta/2), \quad (14a)$$

$$\tau_{yz} = (K_{III} / \sqrt{2\pi r}) \cdot \cos(\theta/2), \quad (14b)$$

式(14)表明, 弹性场沿裂纹线移动的假定已放弃.

利用关系式 $\phi = \pi - \theta$, 方程(14)展开到裂纹面附近的形式为

$$\tau_{xz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{1}{8} \phi^2 \right) + O(\phi^4), \quad (15a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \phi + O(\phi^3). \quad (15b)$$

匹配条件(12)必须要得到满足. 将方程(9)代入方程(15), 得到弹性区的应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} 在弹塑性边界上的取值为

$$\tau_{xz}^e = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_0}} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \frac{r_2}{r_0} + \frac{1}{8} \right) \phi^2 \right] + O(\phi^4), \quad (16a)$$

$$\tau_{yz}^e = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{1}{2} \phi + O(\phi^3). \quad (16b)$$

于是, τ_{nz}^e 可以通过将式(16)和(10)代入式(13)得到.

同样, τ_{nz}^p 可以通过将式(8)和(10)代入式(13)得到. 通过弹塑性边界上应力的匹配条件(12)得

$$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_0}} = k, \quad (17)$$

$$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_0}} \left(B_1^2 + B_1 - \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{4} \right) = B_1^2 k. \quad (18)$$

求解方程(17)、(18)和(11)得

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{III}}{k} \right)^2, \quad (19)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{1}{4}. \quad (20)$$

从图2和方程(10)及(11)可知, r_0 是裂纹面塑性区的长度, r_0/r_2 是一个与弹塑性边界单位法向量直接相关的参数. 式(19)和(20)仅仅在小范围屈服情况下成立, 也就是在塑性区足

够小的情况下才成立.

3.3 完全放弃小范围屈服条件下的匹配结果

继 3.2 节, 我们仍然假定塑性区之外的弹性场为裂纹的弹性奇异 K 场, 也就是说, 我们仍然采用了小范围屈服的第 1 个假定, 因此, 其结果仅在小范围屈服情况下成立.

事实上, 除了可以放弃小范围屈服的第 2 个假定外, 小范围屈服的第 1 个假定也是可以放弃的.

在无限接近于裂纹面附近的区域, 塑性应力场的通解 (8) 始终成立, 不受塑性区大小的限制. 那么, 如果我们也能够求得在裂纹面附近足够精确的弹性应力场, 将这一弹性应力场 (而不是弹性奇异 K 场) 与塑性应力场的精确解 (8) 匹配, 则小范围屈服的第 1 个假定将必然被放弃. 也就是说, 小范围屈服的两个假定均可被完全放弃.

对图 3 所示的理想弹塑性反平面裂纹无限板, 满足远场均匀受载边界条件和裂纹面自由边界条件的弹性应力场的精确解为

$$\tau_{xz} = \text{Im } Z_{\text{III}}(z), \quad \tau_{yz} = \text{Re } Z_{\text{III}}(z), \quad (21)$$

式中, $Z_{\text{III}}(z)$ 为复变解析函数, $z = x_1 + ix_2$ 或者 $z = a + re^{i\theta}$, $i = \sqrt{-1}$. 在坐标原点设在裂纹尖端的极坐标系下, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 裂尖弹性奇异 K 场 (14) 便可由式 (21) 求得. 但以下的分析, 我们不关注 $r \rightarrow 0$ 时的裂纹尖端场, 而是关注无限接近于裂纹面附近的量.

令 $\phi = \pi - \theta$, 则弹性应力场在裂纹面附近的表达式可通过式 (21) 展开为

$$\tau_{xz} = -\frac{\tau}{\sqrt{r(2a-r)}} \left[(a-r) + \frac{a^2(2r-a)}{2(2a-r)^2} \phi^2 \right] + O(\phi^4), \quad (22a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\tau}{\sqrt{r(2a-r)}} \frac{a^2}{2a-r} \phi + O(\phi^3), \quad (22b)$$

式 (22) 在裂纹面附近区域足够精确, 在裂纹线上完全精确.

与 3.2 小节的分析相似, 将塑性区应力场的幂级数形式的精确解 (8) 与刚刚求得的足够精确的弹性场 (22) 在裂纹面附近的弹塑性边界 (9) ~ (11) 上匹配, 由匹配条件 (12) 并利用式 (13), 比较等式两端 ϕ 的同次幂的系数得

$$\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a-r_0)}} (a-r_0) = k, \quad (23)$$

$$\frac{a^2(2r_0-a)}{2(r_0-2a)^2} - \frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a-r_0} + \frac{a^2}{2a-r_0} B_1 = 0. \quad (24)$$

求解方程 (23)、(24) 和 (11) 得

$$r_0 = a \left[1 - \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + \tau^2}} \right], \quad (25)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{2k + 2\sqrt{k^2 + \tau^2}}. \quad (26)$$

式 (25) 和 (26) 即是我们求得的、不受小范围屈服条件限制的、在裂纹面附近足够精确的匹配

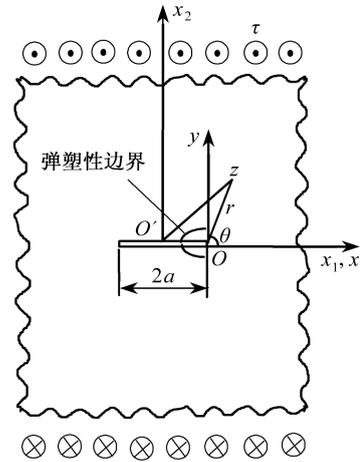


图 3 均布荷载下无限板中的反平面裂纹

结果.

当 $\tau/k \ll 1$ 时,式(25)和(26)可以退化到小范围屈服情况下的结果:

$$r_0 = a \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \tau^2/k^2}} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{\tau}{k} \right)^2 + O \left(\left(\frac{\tau}{k} \right)^4 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\tau^2 a \pi}{k^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{III}}{k} \right)^2, \quad (27)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\sqrt{1 + \tau^2/k^2}}{2 + 2\sqrt{1 + \tau^2/k^2}} = \frac{1}{4} + O \left(\left(\frac{\tau}{k} \right)^2 \right) = \frac{1}{4}. \quad (28)$$

可以验证,式(27)和(28)与小范围屈服情况下的匹配结果(19)和(20)完全一致,其中

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a}.$$

当 $\tau \rightarrow k$ 时,裂纹面上塑性区的最大尺寸为

$$(r_0)_{\max} = 0.293a. \quad (29)$$

从式(29)可知,即是在极限情况下,裂纹面也仅有一部分区域塑性屈服.

4 结 论

通过本文的分析,我们得到如下结论:

1) 当将裂纹面视为裂纹线的扩展部分时,我们可以将裂纹线场分析方法的研究思路进行拓展,用于分析裂纹面附近的弹塑性应力场和弹塑性边界的特性.此时,裂纹线场分析方法可以称为裂纹面场分析方法,小范围屈服的第2个假定完全被放弃.

2) 当将裂纹面附近的塑性应力场表示为 Taylor 级数时,求解偏微分方程组的问题可以转化为求解常微分方程组,从而,裂纹面附近塑性区的应力场可以精确求解.

3) 当将裂纹面附近塑性区内幂级数形式应力场的精确解与塑性区外的弹性应力场匹配时,本文得到了裂纹面塑性区长度和弹塑性边界单位法向量的两种匹配解:第1种解所匹配的弹性场为裂尖弹性奇异 K 场,此时的解仅在塑性区足够小时成立;另一种解所匹配的弹性场为弹性精确场,此时,小范围屈服的两个传统假定完全被放弃,所得的解在裂纹面附近足够精确.

4) 从匹配结果可知,裂纹尖端的裂纹自由表面附近区域存在塑性区,但裂纹面仅部分塑性屈服.

参考文献:

- [1] Achenbach J D, Li Z L. Plane stress crack line fields for crack growth in an elastic-perfectly plastic material[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1984, **20**(3): 534-544.
- [2] GUO Quan-xin, LI Ke-rong. Plastic deformation ahead of a plane stress tensile crack growth in an elastic-perfectly plastic solid[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, **28**(2): 139-146.
- [3] YI Zhi-jian. The new and analytical solution for model III crack in an elastic-perfectly plastic material[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1992, **42**(5): 833-840.
- [4] YI Zhi-jian. The most recent solutions of near crack line fields for mode III cracks[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, **47**(1): 147-155.
- [5] YI Zhi-jian, WANG Shi-jie, WU Heng-li. Precise elastic-plastic analysis of crack line field for mode II plane stain crack[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, **80**(4): 353-363.
- [6] YI Zhi-jian, WANG Shi-jie and WANG Xiang-jian. Precise solutions of elastic-plastic crack line fields for cracked plate loaded by antiplane point forces[J]. *Engineering Fracture Mechan-*

- ics, 1997, **57**(1): 75-83.
- [7] 易志坚, 赵朝华, 杨庆国, 彭凯, 黄宗明. III型裂纹弹塑性场在裂纹线附近匹配方程的一般形式[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(5): 515-524.
- [8] 吴承平, 王成. 裂纹面任意点受反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(12): 1059-1064.
- [9] 王成, 张录坤. 有限宽板裂纹在面受两对反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(6): 513-520.
- [10] 王成, 吴承平. 偏心裂纹板在裂纹面受两对反平面点力的弹塑性解析解[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(7): 691-698.
- [11] WANG Jian-hua, ZHOU Xiao-ping. Near crack line elastic-plastic analysis for an infinite plate loaded by two pairs of point tensile forces[J]. *Mechanics Research Communication*, 2004, **31**(4): 415-420.
- [12] Chitaley A D, McClintock F A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under antiplane shear[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1971, **19**(3): 147-163.

Elastic-Plastic Analysis of an Antiplane Crack Near the Crack Surface Region

YI Zhi-jian^{1,2}, GU Jian-yi², HE Xiao-bing², MA Ying-hua²,
YANG Qing-guo², PENG Kai², HUANG Feng², HUANG Zong-ming¹

(1. *School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;*

2. *School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China*)

Abstract: The elastic-plastic stress distribution and the elastic-plastic boundary configuration near the crack surface region are significant but hard to obtain by means of conventional analysis. The crack line analysis method was developed through considering the crack surface as an extension of the crack line. The stresses in the plastic zone, the length and the unit normal vector of the elastic-plastic boundary near the crack surface region were obtained for an antiplane crack in an elastic-perfectly plastic solid. The usual small scale yielding assumptions have been abandoned during the analysis.

Key words: antiplane crack; elastic-perfectly plastic material; crack surface; elastic-plastic boundary; plastic zone