

# 含分层复合材料层合梁弯曲问题的一般解法<sup>\*</sup>

韩海涛, 张 铮, 卢子兴

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院,北京 100191)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 基于一阶剪切梁理论,考虑分层边缘区域的变形特点,提出了含穿透分层复合材料梁模型.与传统分层模型不同,该文将未分层部分看作上下子梁,放弃了传统模型中分层前缘横截面始终保持平面的假设.通过分层前缘的位移连续条件和内力连续条件,建立了粘合段和分层段的控制方程.并且,应用该模型对不同边界条件下含不同分层尺寸对称和非对称分层的复合材料层合梁弯曲问题进行了求解,结果与三维有限元计算的结果一致,从而证明了模型的有效性和适用性.

**关键词:** 复合材料; 层合梁; 分层; 剪切理论

**中图分类号:** TB322 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.009

## 引 言

纤维增强复合材料具有轻质、高效和可设计性等优点,广泛应用于航空、航天和汽车等工程领域.然而,其层合板壳结构在制造过程中经常会产生工艺缺陷,如纤维断裂、基体微裂纹和铺层界面的局部脱粘等,形成局域损伤.此外,层合复合材料结构在沿厚度方向的冲击载荷作用下,容易发生分层破坏,严重地削弱了其承载能力,这已成为制约其广泛应用的关键问题.

层合复合材料结构的分层分析一直是国内外学术界研究的热点问题<sup>[1-4]</sup>.文献[1]基于经典梁(Euler梁)理论提出了分层梁模型,求解了含分层复合材料层合板的屈曲问题,这也是迄今为止分析分层问题时最常用的模型<sup>[5-8]</sup>.然而,上述分析模型假设分层前缘所在横截面变形后仍保持为平面(如图1(a)所示),这显然与实际的情况不相符合.文献[9]采用高阶剪切梁理论求解了复合材料层板的屈曲问题,但因求解过程较为复杂,不便于实际的工程应用.文献[10-11]考虑了裂纹前缘附近横截面的变形,采用复合梁模型,研究了含端部裂纹试件的断裂问题.但该文中假设裂纹尺寸很小,即未开裂部分长度远远大于梁的厚度,直接忽略了对裂纹前缘影响较小的待定项的求解,因而该模型对离裂纹较远区域的求解精度变得较差.

本文基于一阶剪切梁理论,得到含分层复合材料结构在全域范围内更精确的一般性解答.将含分层复合材料梁的粘合段沿界面分成上下两个子梁,建立含分层复合材料层合梁的6段

\* 收稿日期: 2009-11-03; 修订日期: 2010-05-14

**基金项目:** 国家自然科学基金(重点)资助项目(10932001); 凡舟基金资助项目(20070501); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

**作者简介:** 韩海涛(1982—),男,河北保定人,博士生(E-mail:hht@ase.buaa.edu.cn);  
卢子兴(1960—),男,河北枣强人,教授(联系人.Tel: +86-10-82317507; Fax: +86-10-82328501, E-mail: luzixing@buaa.edu.cn).

子梁模型。显然,该模型分层端点处上下子梁的横截面不再强制其保持为一个平面(如图1(b)所示)。之后,结合分层前缘横截面的位移和内力连续性条件,导出了含分层复合材料梁粘合段和分层段的位移解答。

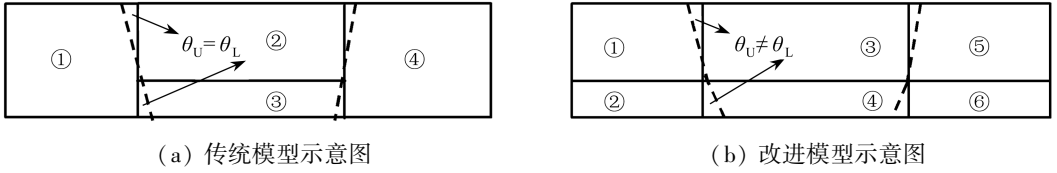


图 1

## 1 理论模型

图2所示为正交铺设的复合材料层合梁,在其内部含有任意穿透型分层 $AB$ 。层合梁总长度为 $L$ ,总厚度为 $H$ ,宽度为 $t$ 。分层将该层合梁分成6段子梁,各子梁的长度为 $l_i$ ,厚度为 $h_i$ ,受均布载荷 $P_i$ 作用,其中 $i=1,2,3,\dots,6$ ,且有

$$l_1 = l_2 = a, l_3 = l_4 = b, l_5 = l_6 = c, \quad (1)$$

$$h_1 = h_3 = h_5 = h, h_2 = h_4 = h_6 = h'. \quad (2)$$

为了简化求解,将坐标系原点 $O$ 取在层合梁界面左端点(如图2所示),选取 $x$ 轴沿子梁轴向,向右为正;上子梁横向坐标 $y_1$ 向上为正,下子梁 $y_2$ 向下为正。下文可以看出,选取界面上的位移函数为基本未知量,粘合段上下子梁采用同一位移自由度,使得分层界面位移连续条件直接精确满足,不需额外的附加连续性方程。分层( $AB$ )在宽度方向完全贯通。文中以张开型分层为例,不考虑分层界面上的相互作用。

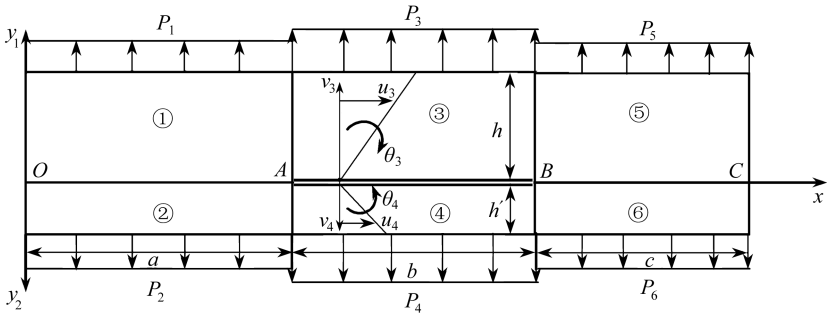


图2 含任意位置穿透分层层合梁模型

## 2 基本方程与边界条件

采用一阶剪切梁理论,则各子梁独立位移为 $u_{0i}, \theta_i$ 和 $v_i$ ,且有

$$u_{0i} = u_{0i}(x), \theta_i = \theta_i(x), v_i = v_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (3)$$

其中, $u_{0i}$ 为子梁界面上任一点的轴向位移, $v_i$ 和 $\theta_i$ 分别为任意横截面的挠度和转角。因此,子梁内任意点的轴向位移为

$$u_i(x, y) = u_{0i}(x) + \theta_i(x)y_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (4)$$

在粘合段,由于上下子梁完全粘接,界面上无相对位移,上下子梁界面对应点上应具有相同的轴向位移和挠度,即

$$u_{02} = u_{01}, u_{06} = u_{05}, v_2 = -v_1, v_6 = -v_5. \quad (5)$$

## 2.1 几何方程

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{du_{0i}}{dx} + \frac{d\theta_i}{dx} y_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (6)$$

$$\gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} = \theta_i + \frac{dv_i}{dx} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (7)$$

其中,  $\varepsilon_i$  为子梁的轴向应变,  $\gamma_i$  为子梁在  $xOy$  平面内的剪切应变。

## 2.2 物理方程

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i = E_i \left( \frac{du_{0i}}{dx} + \frac{d\theta_i}{dx} y_i \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (8)$$

$$\tau_i = G_i \gamma_i = G_i \left( \theta_i + \frac{dv_i}{dx} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (9)$$

其中,  $\sigma_i$  为子梁内的轴向应力,  $\tau_i$  为子梁在  $xOy$  平面内的剪切应力,  $E_i$  为各子梁的轴向弹性模量,  $G_i$  为各子梁在  $xOy$  面内的剪切模量。

## 2.3 平衡方程

在子梁内取任意微段, 如图 3 所示(以子梁①和②微段为例, 其余类同)。各子梁内力方程为

$$N_i = \int_0^{h_i} \sigma_i t dy_i = E_i t \left( h_i \frac{du_{0i}}{dx} + \frac{h_i^2}{2} \frac{d\theta_i}{dx} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (10)$$

$$M_i = \int_0^{h_i} y_i \sigma_i t dy_i = E_i t \left( \frac{h_i^2}{2} \frac{du_{0i}}{dx} + \frac{h_i^3}{3} \frac{d\theta_i}{dx} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (11)$$

$$Q_i = \int_0^{h_i} \tau_i t dy_i = G_i t \left( \theta_i + \frac{dv_i}{dx} \right) h_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (12)$$

其中,  $N_i, M_i, Q_i$  分别为各子梁横截面内的轴力、弯矩和剪力, 轴力  $N_i$  作用点与弯矩  $M_i$  中心均位于分层界面上(即  $y = 0$ )。

对于粘合段, 子梁①、②、⑤和⑥微段平衡方程如下:

### 1) 轴力平衡方程

$$\frac{d}{dx}(N_1 + N_2) = 0, \quad \frac{d}{dx}(N_5 + N_6) = 0; \quad (13)$$

### 2) 弯矩平衡方程

$$\frac{dM_i}{dx} = Q_i \quad (i = 1, 2, 5, 6); \quad (14)$$

### 3) 横向剪力平衡方程

$$\frac{d}{dx}(Q_1 - Q_2) + P_1 - P_2 = 0, \quad \frac{d}{dx}(Q_5 - Q_6) + P_5 - P_6 = 0. \quad (15)$$

对于分层段, 子梁③和④微段平衡方程如下:

### 1) 轴力平衡方程

$$\frac{dN_i}{dx} = 0 \quad (i = 3, 4); \quad (16)$$

### 2) 弯矩平衡方程

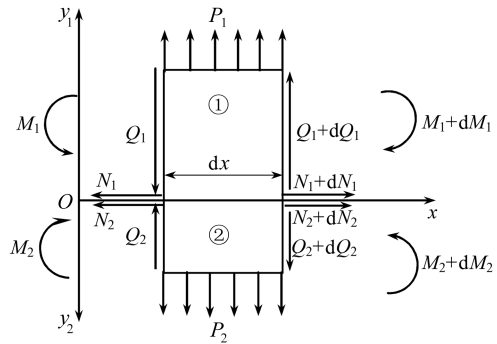


图 3 微元体内力

$$\frac{dM_i}{dx} = Q_i \quad (i = 3, 4); \quad (17)$$

3) 横向剪力平衡方程

$$\frac{dQ_i}{dx} + P_i = 0 \quad (i = 3, 4). \quad (18)$$

## 2.4 控制方程

将内力方程(10) ~ (12)代入平衡方程(13) ~ (18),得粘合段①和②子梁控制方程为

$$s_1 \frac{d^4 k_2}{dx^4} + s_2 \frac{d^2 k_2}{dx^2} + p = 0. \quad (19)$$

其中,  $k_i = d\theta_i/dx$ . 同样, 粘合段⑤和⑥子梁控制方程形式与式(19)完全相同. 分层段③和④子梁控制方程为

$$\frac{E_i t h_i^3}{12} \frac{d^2 k_i}{dx^2} + P_i = 0 \quad (i = 3, 4), \quad (20)$$

其中,  $s_1, s_2, p$  为已知常数, 其表达式为

$$p = -\frac{P_1 - P_2}{t(G_1 h_1 + G_2 h_2)}, \quad s_1 = -\frac{E_1 E_2 h_1^2 h_2^2}{36 G_1 G_2},$$

$$s_2 = \frac{(E_2 h_2^2 + E_1 h_1^2)^2 + 2E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)^2 - 3E_1 E_2 h_1^2 h_2^2}{12(E_1 h_1 + E_2 h_2)(G_1 h_1 + G_2 h_2)}.$$

## 2.5 边界条件

1) 两端固支

梁左端  $O$  点边界条件为

$$v_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad u_{01} \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta_2 \Big|_{x=0} = 0; \quad (21)$$

梁右端  $C$  点边界条件为

$$v_5 \Big|_{x=L} = 0, \quad u_{05} \Big|_{x=L} = 0, \quad \theta_5 \Big|_{x=L} = 0, \quad \theta_6 \Big|_{x=L} = 0. \quad (22)$$

2) 两端简支

梁左端  $O$  点边界条件为

$$v_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad u_{01} \Big|_{x=0} = 0, \quad M_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad M_2 \Big|_{x=0} = 0; \quad (23)$$

梁右端  $C$  点边界条件为

$$v_5 \Big|_{x=L} = 0, \quad u_{05} \Big|_{x=L} = 0, \quad M_5 \Big|_{x=L} = 0, \quad M_6 \Big|_{x=L} = 0. \quad (24)$$

## 2.6 分层前缘连续性条件

在分层前缘, 各子梁应满足位移和内力的连续性条件. 如图 2 所示.

1) 位移连续性条件

分层左端  $A$  点

$$(v_3 - v_1) \Big|_{x=a} = 0, \quad (u_{03} - u_{01}) \Big|_{x=a} = 0, \quad (\theta_3 - \theta_1) \Big|_{x=a} = 0, \quad (25)$$

$$(v_4 - v_2) \Big|_{x=a} = 0, \quad (u_{04} - u_{02}) \Big|_{x=a} = 0, \quad (\theta_4 - \theta_2) \Big|_{x=a} = 0. \quad (26)$$

分层右端  $B$  点

$$(v_3 - v_5) \Big|_{x=a+b} = 0, \quad (u_{03} - u_{05}) \Big|_{x=a+b} = 0, \quad (\theta_3 - \theta_5) \Big|_{x=a+b} = 0, \quad (27)$$

$$(v_4 - v_6) \Big|_{x=a+b} = 0, \quad (u_{04} - u_{06}) \Big|_{x=a+b} = 0, \quad (\theta_4 - \theta_6) \Big|_{x=a+b} = 0. \quad (28)$$

2) 内力连续性条件

分层左端  $A$  点

弯矩连续

$$(M_1 - M_3)|_{x=a} = 0, (M_2 - M_4)|_{x=a} = 0; \quad (29)$$

剪力连续

$$(Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_4)|_{x=a} = 0; \quad (30)$$

轴力连续

$$(N_1 + N_2 - N_3 - N_4)|_{x=a} = 0. \quad (31)$$

分层右端 B 点

弯矩连续

$$(M_5 - M_3)|_{x=a+b} = 0, (M_6 - M_4)|_{x=a+b} = 0; \quad (32)$$

剪力连续

$$(Q_5 - Q_6 - Q_3 + Q_4)|_{x=a+b} = 0; \quad (33)$$

轴力连续

$$(N_5 + N_6 - N_3 - N_4)|_{x=a+b} = 0. \quad (34)$$

### 3 位移解

由粘合段上下子梁连续性条件(5)、几何方程(6)和(7)、物理方程(8)和(9)及控制方程(19)、(20),联立求解可以得到各子梁的位移函数表达式.对于粘合段,如①和②子梁,其位移通解为

$$\theta_2 = \lambda_1^{-3}(A_1 e^{\lambda_1 x} - A_2 e^{-\lambda_1 x}) - \frac{p}{6s_2} x^3 + \frac{c_{11} x^2}{2} + c_{12} x + c_{13}, \quad (35)$$

$$\theta_1 = - \left[ \lambda_1^{-1}(A_1 e^{\lambda_1 x} - A_2 e^{-\lambda_1 x}) - \frac{px}{s_2} \right] \frac{s_1}{g_1} + \frac{p}{g_1}(b'_{12} - b''_{12})x - \theta_2 + c_{14}, \quad (36)$$

$$u_{01} = a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + c_{15} x + c_{16}, \quad (37)$$

$$v_1 = b'_{12} \frac{d\theta_1}{dx} + b'_{22} \frac{d\theta_2}{dx} - \int \theta_1 dx + c_{17}, \quad (38)$$

其中,  $A_1, A_2$  及  $c_{11} \sim c_{17}$  为待定系数,可结合边界条件(21)~(24)及分层端点连续性条件(25)~(34)求解.其余常数为已知,定义如下:

$$a_1 = \frac{-E_1 h_1^2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}, a_2 = \frac{-E_2 h_2^2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}, \lambda_1^2 = -\frac{s_2}{s_1}, b'_{12} = \frac{E_1^2 h_1^3 + 4E_1 E_2 h_1^2 h_2}{12G_1(E_1 h_1 + E_2 h_2)},$$

$$b''_{12} = -\frac{E_1 E_2 h_1^2 h_2}{4G_2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}, g_1 = \frac{E_1 h_1^3(E_1 h_1 + E_2 h_2) + 3E_1 E_2 h_1^2 h_2(h_1 - h_2)}{12(E_1 h_1 + E_2 h_2)(G_1 h_1 + G_2 h_2)}.$$

分层段上下子梁分别求解,通解形式完全相同,如上子梁③的位移通解为

$$\theta_3 = \frac{-2P_3}{E_3 t h_3^3} x^3 + \frac{c_{31}}{2} x^2 + c_{32} x + c_{33}, \quad (39)$$

$$u_{03} = \frac{P_3}{E_3 t h_3^2} x^3 - \frac{h_3}{4} c_{31} x^2 + c_{34} x + c_{35}, \quad (40)$$

$$v_3 = \frac{P_3}{2E_3 t h_3^3} x^4 - \frac{c_{31}}{6} x^3 - \left( \frac{P_3}{2G_3 t h_3} + \frac{c_{32}}{2} \right) x^2 + \left( \frac{E_3 h_3^2}{12G_3} c_{31} - c_{33} \right) x + c_{36}. \quad (41)$$

子梁④的位移通解只需将方程(39)~(41)中对应下标3替换为4即可.其中,  $c_{31} \sim c_{36}$  为待定常系数,同样可结合边界条件(21)~(24)及分层端点连续性条件(25)~(34)求解.

## 4 算 例

为了验证理论模型的正确性,本节对不同边界条件下含对称分层和非对称分层复合材料层合梁的弯曲问题,采用本文模型进行了求解,并与三维有限元结果进行对比。

对图2所示的复合材料层合梁,宽度和厚度为  $t = H = 0.1 \text{ m}$ 。分层后各上子梁厚度为  $h_i = 0.04 \text{ m}$ ,轴向模量为  $E_i = 5 \text{ GPa}$ ,横向剪切模量为  $G_i = 1.92 \text{ GPa}$ ,其中  $i = 1, 3, 5$ ;各下子梁厚度为  $h_i = 0.06 \text{ m}$ ,轴向模量为  $E_i = 3 \text{ GPa}$ ,横向剪切模量为  $G_i = 1.15 \text{ GPa}$ ,其中  $i = 2, 4, 6$ 。

采用商用有限元软件 ANSYS11.0 建立该分层梁的三维实体模型,选用 Solid95 实体单元,通过网格细化(单元数为 20 万)使得有限元结果收敛并达到较高精度,作为理论分析结果的对照依据。

### 4.1 对称分层

取  $a = b = c = 0.5 \text{ m}$ ,此时几何模型关于分层中心横截面左右对称。

#### 4.1.1 两端固支(C-C)

分层梁两端均为固支,在上下表面施加法向均布载荷,其值分别为  $P_i = 0.25 \text{ MPa}$  ( $i = 1, 3, 5$ ) 和  $P_i = 0.625 \text{ MPa}$  ( $i = 2, 4, 6$ )。采用本文模型得到的位移解析表达式见附录(A)。图4和图5分别为上下子梁轴向和横向位移的变化曲线。图例中  $u$  表示分层界面上各点的轴向位移, $v$  为各点的横向挠度,下标 U 代表分层界面以上子梁部分,即图2中①、③和⑤3段子梁,L 代表分层界面以下子梁部分,即图2中②、④和⑥3段子梁,下标 F 代表有限元结果,A 代表理论分析模型结果。分层端点位置在图中以虚线标注,且区域 I 和 III 为粘合部分,区域 II 为分层部分。由图4和图5中理论模型与有限元结果的对比来看,二者吻合很好,其中上下子梁最大横向位移处误差分别为 1.4% 和 1.3%。由于分层梁未承受轴向载荷,轴向位移相对很小,因此,计算结果易受计算误差的影响。

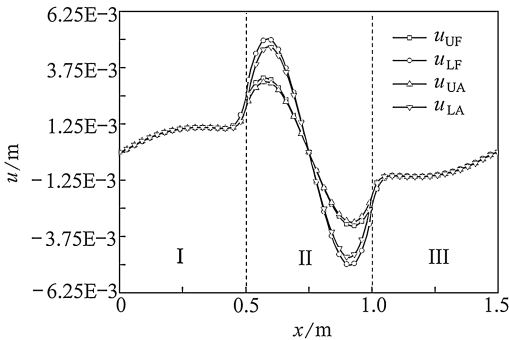


图4 对称分层两端固支条件下的轴向位移

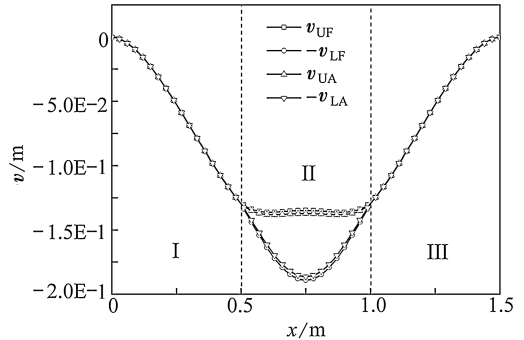


图5 对称分层两端固支条件下的横向位移

图6为两端固支条件下对称分层层合梁横截面转角  $\theta_U$  和  $-\theta_L$  的变化曲线,并与有限元结果进行对比,其中上下子梁最大转角处与有限元结果的误差分别为 4.0% 和 3.9%。粘合段上下子梁粘结在一起,距离分层端点较远时  $\theta_U$  和  $-\theta_L$  基本相等,曲线基本重合,但在分层端点附近,上下子梁转角明显不同。在分层左端点处(参见图6局部放大图中区域 I 和 II 中间虚线所示位置),  $\theta_U$  和  $-\theta_L$  分别为  $11^\circ$  和  $16^\circ$ ,因此传统模型简单地采用平截面假设显然是不合理的。分层右端点处情况亦是如此。

#### 4.1.2 两端简支(S-S)

分层梁左右两端简支,上下表面所受均布载荷分别为  $P_i = 0.05 \text{ MPa}$  ( $i = 1, 3, 5$ ) 和  $P_i =$

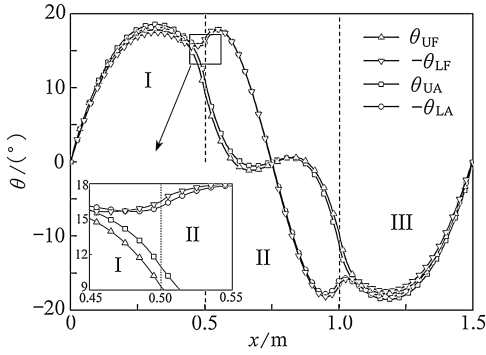


图6 对称分层两端固支条件下的转角

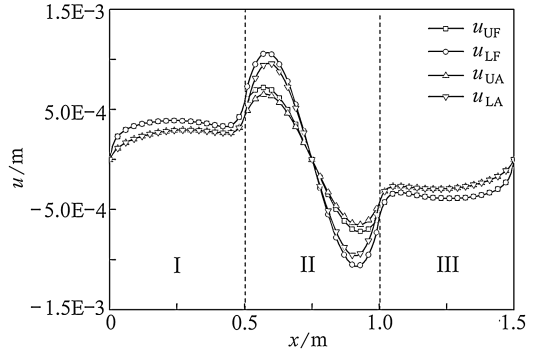


图7 对称分层两端简支条件下的轴向位移

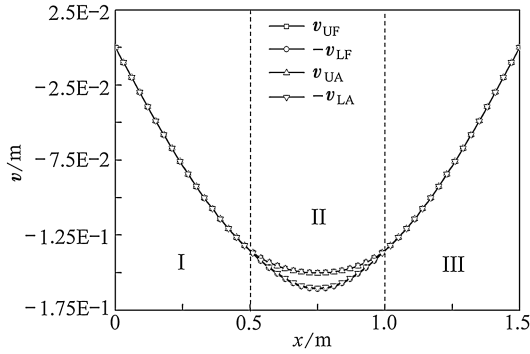


图8 对称分层两端简支条件下的横向位移

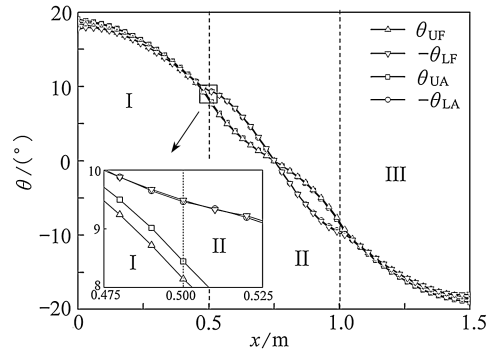


图9 对称分层两端简支条件下的转角

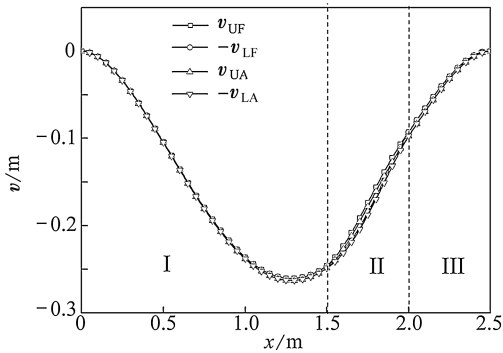


图10 非对称分层两端固支条件下的横向位移

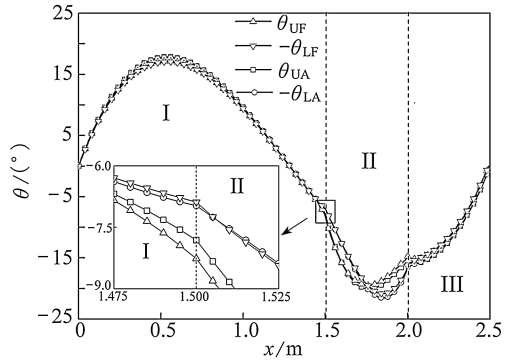


图11 非对称分层两端固支条件下的转角

0.125 MPa ( $i = 2, 4, 6$ )。采用本文模型得到的位移解析表达式见附录(B)。变形后分层界面 ( $y = 0$ ) 上下子梁轴向位移和横向位移分别如图7和图8所示。在图8中,上下子梁最大横向位移与三维有限元结果的误差分别为0.2%和0.5%,再次证明了本文模型的正确性。图9为上下子梁横截面转角随  $x$  轴的变化曲线。与有限元结果相比,上下子梁最大转角处相对误差分别为2.6%和3.6%。从图9中可以看出,分层段左端和粘合段的交界处的横截面不再保持平面,上下子梁转角分别为  $8.4^\circ$  和  $9.5^\circ$ 。

#### 4.2 非对称分层

取梁  $L = 2.5 \text{ m}$ ,  $a = 1.5 \text{ m}$ ,  $b = c = 0.5 \text{ m}$ 。两端固支条件下,上下表面均布载荷分别为  $P_i = 0.05 \text{ MPa}$  ( $i = 1, 3, 5$ ) 和  $P_i = 0.125 \text{ MPa}$  ( $i = 2, 4, 6$ ),上下子梁横向位移和横截面转角的变化规律分别如图10和图11所示;两端简支时,上下表面的均布载荷分别为  $P_i = 0.01 \text{ MPa}$  ( $i =$



1,3,5) 和  $P_i = 0.025 \text{ MPa}$  ( $i = 2,4,6$ ), 图 12 和图 13 分别给出了上下子梁横向位移与横截面转角的结果。

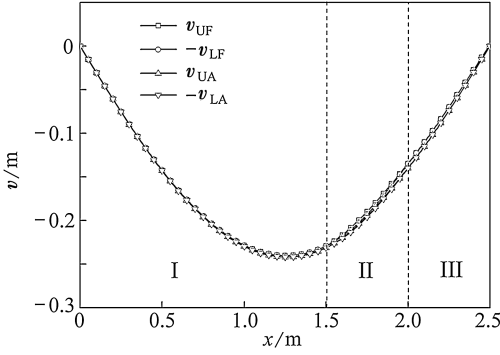


图 12 非对称分层两端简支条件下的横向位移

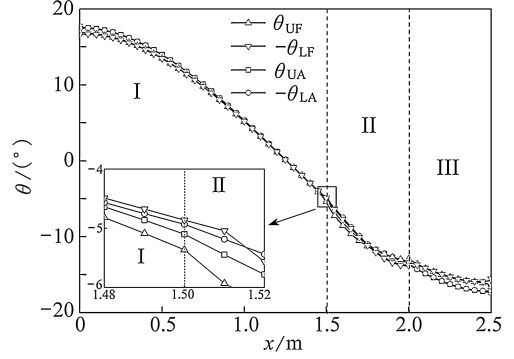


图 13 非对称分层两端简支条件下的转角

从图 10 ~ 图 13 中可以看出,理论模型和有限元结果符合很好,再次证明了本文模型的正确性和适用性。图 11 和图 13 的局部图为分层左端截面转角放大图,分层端点处上下子梁横截面转角的不一致性再次得到了验证(分层右端情况类似),这充分体现了本文梁模型的准确性和优越性。

## 5 结 论

1) 本文将层合梁粘合部分分为上下子梁,基于一阶剪切梁理论,建立了含内部贯穿分层的复合材料层合梁模型;

2) 与传统模型<sup>[1]</sup>相比,文中考虑了梁的剪切变形和分层前缘区域的非线性变形特点,使得该模型更加准确。计算结果表明,分层前缘横截面的整体平面假设一般是不成立的,尤其当分层界面在载荷作用下张开的时候,上下子梁横截面转角相差较大,不能忽略;

3) 与文献[10]模型不同,本文模型没有附加分层(裂纹)长度很小的假设,因而可以对全域准确求解;

4) 该模型计算结果和三维有限元计算结果完全吻合,也证明了本文模型的准确性和适用性。因此,本文为今后含分层复合材料层合梁的屈曲分析以及分层扩展分析,提供了更为合理的力学模型。

## 附 录

### (A) 对称分层,两端固支

#### 1) 横向位移

$$\begin{aligned} v_1 = -v_2 = & -3.57 \times 10^{-5} e^{(-44.81x)} + 5.51 \times 10^{-14} e^{(44.81x)} - \\ & 0.49x^4 + 1.48x^3 - 1.09x^2 - 0.02x + 3.57 \times 10^{-5}, \\ v_3 = & 3.91x^4 - 11.72x^3 + 13.07x^2 - 6.41x + 1.03, \\ v_4 = & 4.82x^4 - 14.47x^3 + 15.07x^2 - 6.33x + 1.03, \\ v_5 = -v_6 = & 8.64 \times 10^{15} e^{(-44.82x)} - 2.28 \times 10^{-34} e^{(44.82x)} - \\ & 0.49x^4 + 1.48x^3 - 1.09x^2 - 0.02x + 3.57 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

#### 2) 轴向位移

$$u_1 = u_2 = 1.33 \times 10^{-4} e^{(-44.82x)} + 2.05 \times 10^{-13} e^{(44.82x)} + 0.01x^3 - 0.02x^2 + 0.01x - 1.33 \times 10^{-4},$$



$$u_3 = 0.31x^3 - 0.70x^2 + 0.5x - 0.11, u_4 = 0.58x^3 - 1.3x^2 + 0.93x - 0.21,$$

$$u_5 = u_6 = -3.21 \times 10^{16} e^{(-44.82x)} - 8.46 \times 10^{-34} e^{(44.82x)} + 0.01x^3 - 0.02x^2 + 0.01x - 1.33 \times 10^{-4}.$$

## 3) 转角

$$\theta_1 = -6.86 \times 10^{-3} e^{(-44.82x)} - 1.06 \times 10^{-11} e^{(44.82x)} + 1.97x^3 - 4.43x^2 + 2.21x + 6.86 \times 10^{-3},$$

$$\theta_2 = -4.25 \times 10^{-3} e^{(-44.82x)} - 6.56 \times 10^{-12} e^{(44.82x)} - 1.97x^3 + 4.43x^2 - 2.22x + 4.25 \times 10^{-3},$$

$$\theta_3 = -15.63x^3 + 35.16x^2 - 26.16x + 6.43, \theta_4 = -19.29x^3 + 43.40x^2 - 30.23x + 6.39,$$

$$\theta_5 = 1.66 \times 10^{18} e^{(-44.82x)} + 4.36 \times 10^{-32} e^{(44.82x)} + 1.97x^3 - 4.43x^2 + 2.21x + 6.86 \times 10^{-3},$$

$$\theta_6 = 1.03 \times 10^{18} e^{(-44.82x)} + 2.71 \times 10^{-32} e^{(44.82x)} - 1.97x^3 + 4.43x^2 - 2.22x + 4.25 \times 10^{-3}.$$

## (B) 对称分层, 两端简支

## 1) 横向位移

$$v_1 = -v_2 = 2.569 \times 10^{-5} e^{(-44.82x)} + 1.1 \times 10^{-14} e^{(44.82x)} - 0.1x^4 + 0.3x^3 -$$

$$4.08 \times 10^{-4} x^2 - 0.33x - 2.6 \times 10^{-5},$$

$$v_3 = 0.78x^4 - 2.34x^3 + 2.83x^2 - 1.61x + 0.21, v_4 = 0.96x^4 - 2.9x^3 + 2.8x^2 - 0.94x + 0.21,$$

$$v_5 = -v_6 = 1.73 \times 10^{15} e^{(-44.82x)} + 1.64 \times 10^{-34} e^{(44.82x)} - 0.1x^4 + 0.3x^3 -$$

$$4.08 \times 10^{-4} x^2 - 0.33x - 2.57 \times 10^{-5}.$$

## 2) 轴向位移

$$u_1 = u_2 = -9.55 \times 10^{-5} e^{(-44.82x)} + 4.1 \times 10^{-14} e^{(44.82x)} + 1.45 \times 10^{-3} x^3 -$$

$$3.26 \times 10^{-3} x^2 + 1.5 \times 10^{-3} x + 9.55 \times 10^{-5},$$

$$u_3 = 0.06x^3 - 0.14x^2 + 0.1x - 0.02, u_4 = 0.12x^3 - 0.26x^2 + 0.19x - 0.04,$$

$$u_5 = u_6 = -6.42 \times 10^{15} e^{(-44.82x)} + 6.09 \times 10^{-34} e^{(44.82x)} + 1.45 \times 10^{-3} x^3 -$$

$$3.26 \times 10^{-3} x^2 + 1.50 \times 10^{-3} x + 9.55 \times 10^{-5}.$$

## 3) 转角

$$\theta_1 = 4.94 \times 10^{-3} e^{(-44.82x)} - 2.12 \times 10^{-12} e^{(44.82x)} + 0.39x^3 - 0.89x^2 + 4.54 \times 10^{-3} x + 0.33,$$

$$\theta_2 = 3.06 \times 10^{-3} e^{(-44.82x)} - 1.31 \times 10^{-12} e^{(44.82x)} - 0.39x^3 + 0.89x^2 - 7.51 \times 10^{-3} x - 0.33,$$

$$\theta_3 = -3.13x^3 + 7.03x^2 - 5.67x + 1.61, \theta_4 = -3.86x^3 + 8.68x^2 - 5.61x + 0.95,$$

$$\theta_5 = 3.33 \times 10^{17} e^{(-44.82x)} - 3.15 \times 10^{-32} e^{(44.82x)} + 0.39x^3 - 0.89x^2 + 4.54 \times 10^{-3} x + 0.33,$$

$$\theta_6 = 2.06 \times 10^{17} e^{(-44.82x)} - 1.95 \times 10^{-32} e^{(44.82x)} - 0.39x^3 + 0.89x^2 - 7.51 \times 10^{-3} x - 0.33.$$

## 参考文献:

- [1] Chai H, Babcock C D, Knauss W G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1981, **17**(11): 1069-1083.
- [2] 冯世宁, 陈浩然. 含分层损伤复合材料层合板非线性动力稳定性[J]. *复合材料学报*, 2006, **23**(1): 154-160.
- [3] 朱菊芬, 牛海英. 双分层损伤层合梁屈曲有限元分析[J]. *大连理工大学学报*, 2004, **44**(1): 20-25.
- [4] Aslan Z, Sahin M. Buckling behavior and compressive failure of composite laminates containing multiple large delaminations[J]. *Composite Structures*, 2009, **89**(3): 382-390.
- [5] Chen H P. Shear deformation theory for compressive delamination buckling and growth[J]. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1991, **29**(5): 813-819.
- [6] Moradi S, Taheri F. Application of differential quadrature method to the delamination buckling of composite plates[J]. *Computers and Structures*, 1999, **70**(6): 615-623.
- [7] Rodman U, Saje M, Planinc I, Zupan D. Exact buckling analysis of composite elastic col-

- umns including multiple delaminations and transverse shear[J]. *Engineering Structures*, 2008, **30**(6): 1500-1514.
- [8] Parlapalli M, Shu D W. Buckling analysis of two-layer beams with an asymmetric delamination[J]. *Engineering Structures*, 2004, **26**(5): 651-658.
- [9] Gu H Z, Chattopadhyay A. A new higher-order plate theory in modeling delamination buckling of composites[J]. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1994, **32**(8): 1709-1716.
- [10] Wang J L, Qiao P Z. Novel beam analysis of end notched flexure specimen for mode—II fracture[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2004, **71**(2): 219-231.
- [11] Wang J L, Qiao P Z. Interface crack between two shear deformable elastic layers[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, **52**(4): 891-905.

## Analytical Method on Bending of Composite Laminated Beams With Delaminations

HAN Hai-tao, ZHANG Zheng, LU Zi-xing

(School of Aeronautical Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, P. R. China)

**Abstract:** Based on the first-order shear deformable beam theory, a refined model for composite beams containing a through-the-width delamination was presented, and the deformation at the delamination front was considered. Different from the ordinary delaminated beam theory, each of the perfectly bonded portions of the new model was constructed as two separated beams along the interface, and the plane section assumption at the delamination front was released. The governing equations of the delaminated portions and bonded ones were established, combined with continuity conditions of displacements and internal forces. The solutions of delaminated composite beams with different boundary conditions, delamination locations and sizes were shown in excellent agreement with the finite element results, which demonstrate the efficiency and applicability of the present model.

**Key words:** composite; laminated beam; delamination; shear deformable theory