应用数学和力学,第 31 卷 第 7 期
2010 年 7 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 31, No. 7, Jul. 15, 2010

文章编号:1000-0887(2010)07-0822-13

非定常线性化 Navier-Stokes 方程的非协调流线扩散有限元法分析*

陈豫眉[1,2], 谢小平[1]

(1. 四川大学 数学学院, 成都 610064;
2. 西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002)

(周哲玮推荐)

摘要: 对非定常线性化 Navier-Stokes 方程提出了非协调流线扩散有限元方法. 用向后 Euler 格式离散时间,用流线扩散法处理扩散项带来的非稳定性. 速度采用不连续的分片线性逼近,压力采用分片常数逼近. 得到了离散解的存在唯一性以及在一定范数意义下离散解的稳定性和误差估计.

关 键 词: 流线扩散法; 非协调; 非定常线性化 Navier-Stokes 方程; 误差估计

中图分类号: O242.21 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.007

引 言

流线扩散有限元法(SD 方法)是上世纪 80 年代发展起来用于求解双曲问题,特别适合对流-扩散方程以及压缩或者不可压缩流体问题[1-9]. 此方法是将标准 Galerkin 有限元法和最小二乘方法相结合,具有稳定性强、精度高的特点.

对非定常对流-扩散问题,空间时间有限元被用到传统 SD 方法中,且通常用协调有限元离散. 虽然可保持空间和时间精度的一致性,却因计算过程中需要同时考虑时间和空间变量,从而大大提高计算的复杂性. 为了解决这个问题,孙澈等人[9-11]提出了有限差分流线扩散方法(FDSD 方法). 其基本点是将时间 t 进行差分离散,空间变量采用 SD 方法离散. FDSD 方法保留了传统 SD 方法的本质,且因简化了算法结构从而减少运算量. 在此意义上,FDSD 方法的计算规模和程序复杂性相当于全离散的 Galerkin 有限元法. 文献[12]在协调有限元基础上,用 FDSD 方法求解 Navier-Stokes 问题.

从计算流体力学的应用角度,非协调有限元因其更容易满足离散 Babuška-Brezzi 条件而具有极大的吸引力. 文献[13-14]用非协调有限元求解对流-扩散问题,并且通过增加跳量项得到与协调有限元相同的收敛阶. 文献[15]分别就三角形单元和四边形单元用低阶协调和非协

* **收稿日期:** 2010-03-15; **修订日期:** 2010-05-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771150);国家重点基础研究发展规划资助项目(2005CB321701);教育部新世纪优秀人才基金资助项目(NCET-07-0584);四川省教育厅青年基金资助项目(07ZB087)

作者简介: 陈豫眉(1972—), 女, 四川人, 副教授, 博士生(E-mail: chen.yumei08@gmail.com);
谢小平, 教授, 博士生导师(联系人. Tel:+86-28-66918107;E-mail: xpxiec@gmail.com).

调有限元求解对流-扩散问题. 文献[16]用非协调流线扩散方法方法求解不可压缩的线性化 Navier-Stokes 问题.

本文将对非定常的线性化 Navier-Stokes 问题用非协调流线扩散方法方法求解. 本文余下部分安排为:第 1 节和第 2 节分别介绍非定常线性化 Navier-Stokes 方程以及相应的非协调流线扩散方法格式;第 3 节和第 4 节分别给出此格式的稳定性和速度、压力相应离散解的误差分析;最后是结论部分.

1 符 号

设 $\Omega\subset R^2$ 为具有多边形边界 $\partial\Omega$ 的有界区域. $0<\epsilon\ll 1$ 为 Reynolds 数倒数, $\boldsymbol{b}\in W^{1,\infty}(\Omega)^2$ 和 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(x,t)=(f_1(x,t),f_2(x,t))\in L^2(\Omega)^2$ 为给定函数, 且 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0$. 考虑如下非定常线性化 Navier-Stokes 方程, 求解速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))\in R^2$ 和压力 $p=p(x,t)\in\mathbf{R}$, 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\epsilon\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f}, & \text{在 } \Omega\times(0,T] \text{ 中},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & \text{在 } \Omega\times(0,T] \text{ 中},\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, & \text{在 } \partial\Omega\times(0,T] \text{ 上},\\ \boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x), & \text{当 } t=0 \text{ 时}.\end{cases}\tag{1}$$

设问题(1)的解 $(\boldsymbol{u},p)$ 存在且唯一.

对给定正整数 T, 设 Δt 为时间步长, 记 $t^n=n\Delta t, n=1,2,\cdots;N=T/\Delta t$. 设 $\mathcal{T}_h=\{K\}$ 为区域 $\overline{\Omega}$ 的拟一致三角剖分, h_K 为有限单元 $K(K\in\mathcal{T}_h)$ 的直径, $0<h=\max_K h_K\leqslant h_0<1$ 为网格参数. E_h 为 $\mathcal{T}_h$ 中所有边 e 组成的集合, 边 e 的法向量为 $\boldsymbol{n}_e$. 定义如下跳量 $[v]$ 和均值 $\{v\}$

$$[v]\,|_e=v\,|_{K_2}-v\,|_{K_1},\quad \{v\}\,|_e=\frac{1}{2}(v\,|_{K_1}+v\,|_{K_2}),$$

其中 K_1,K_2 为两个具有共同边 e 的有限单元, 边 e 的法向量 $\boldsymbol{n}_e$ 指向 K_1. 对于 $e\subset\partial\Omega$, 跳量和均值可通过将 v 在 Ω 外延拓为 0 得到. 速度和压力的非协调有限元空间分别定义为

$$V_h=\left\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^2;\boldsymbol{v}\,|_K\in\mathcal{P}_1(K)^2,\int_e[\boldsymbol{v}]\mathrm{d}e=0,\forall e\in E_h\right\},$$

$$Q_h=\{q\in L_0^2(\Omega);\ q\,|_K\in\mathcal{P}_0(K)\},$$

其中, $L_0^2(\Omega)=\left\{q\in L^2(\Omega),\ \int_\Omega q\mathrm{d}x=0\right\}$, $\mathcal{P}_m(K)$ 为单元 K 上的次数不超过 m 的多项式集合. $(v,v)_K=\int_K uv\mathrm{d}x$ 表示单元 K 上的内积, 定义

$$W_h=\{\boldsymbol{v}\in V_h;(\nabla\cdot\boldsymbol{v},1)_K=0,\forall K\in\mathcal{T}_h\}.$$

为证明非协调流线扩散法的收敛性, 需要如下的逼近性质. 假设存在算子 $I_h:H^2(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2\to V_h$ 和 $J_h:H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)\to Q_h$ 满足

$$|\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}|_{l,K}\leqslant Ch_K^{2-l}|\boldsymbol{v}|_{2,K},\qquad \forall\boldsymbol{v}\in H^2(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2,l=0,1,2,\tag{2}$$

$$\|\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}\|_{0,e}\leqslant Ch_e^{3/2}|\boldsymbol{v}|_{2,K},\qquad \forall\boldsymbol{v}\in H^2(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2,\ e\subset K,\tag{3}$$

$$|q-J_hq|_{l,K}\leqslant Ch_K^{1-l}|q|_{1,K},\qquad \forall q\in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega),\ l=0,1,\tag{4}$$

其中 h_e 表示 e 的边长. $\boldsymbol{v}\in H^2(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2$ 且满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 有 $I_h\boldsymbol{v}\in W_h$. 字母 C 代表独立于 $\Delta t,h$ 和 ϵ 的正常数, 在不同估计式中 C 可取不同的数值.

2 SD 格式

在时间层 $t=t^n(n\geqslant 1)$,对 $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$ 作向后差分离散,问题(1)等价于

$$\frac{\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}^{n-1}}{\Delta t}+\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^n-\epsilon\Delta\boldsymbol{u}^n+\nabla p^n=\boldsymbol{f}^n+\boldsymbol{R}^n,\qquad n=1,2,\cdots,N, \tag{5}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^n=0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}^n=\boldsymbol{0},\qquad 在\ \partial\Omega\ 上, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{u}_0,\qquad x\in\Omega, \tag{8}$$

其中,$\phi^n(x)\overset{\Delta}{=}\phi(x,t^n)$,$\boldsymbol{R}^n=(\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}^{n-1})/\Delta t-(\partial\boldsymbol{u}/\partial t)^n$ 为截断误差.

从式(5)中舍去截断误差 $\boldsymbol{R}^n$,得出 $\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^{n-1}$ 应满足的近似式,再利用流线扩散法的思想,问题(1) 的流线扩散法格式定义为:求解$(\boldsymbol{U}^n,P^n)\in V_h\times Q_h,n=1,2,\cdots,N$, 使得

$$B_h(\boldsymbol{U}^n,P^n;\boldsymbol{v}^n,q^n):=$$
$$a_h(\boldsymbol{U}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{U}^{n-1})-b(\boldsymbol{v}^n,P^n)+b(\boldsymbol{U}^n,q^n)=l_h(\boldsymbol{v}^n),$$
$$\forall(\boldsymbol{v}^n,q^n)\in V_h\times Q_h, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{U}^n=\boldsymbol{0},\qquad 在\ \partial\Omega\ 上, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{U}^0=\boldsymbol{u}_0, \tag{11}$$

其中

$$a_h(\boldsymbol{U}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{U}^{n-1})=$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{\left(\frac{\boldsymbol{U}^n-\boldsymbol{U}^{n-1}}{\Delta t}+\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\right)_K+\epsilon(\nabla\boldsymbol{U}^n,\nabla\boldsymbol{v}^n)_K-\right.$$
$$\left.(\epsilon\Delta\boldsymbol{U}^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\right\}-\sum_{e\in E_h}\int_e\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e[\boldsymbol{U}^n]\cdot\{\boldsymbol{v}^n\}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+$$
$$\sum_{e\in E_h}\int_e\boldsymbol{\sigma}_e[\boldsymbol{U}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \tag{12}$$

$$b_h(\boldsymbol{v}^n,P^n)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(P^n,\nabla\cdot\boldsymbol{v}^n)_K, \tag{13}$$

$$l_h(\boldsymbol{v}^n)=(\boldsymbol{f}^n,\boldsymbol{v}^n)+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{f}^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K. \tag{14}$$

控制参数 δ_K 为正常数,其选择将在第3节中给出;参数 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 为非负常数. 本方法中,由于 $\Delta\boldsymbol{v}^n|_K=0,\forall K\in\mathcal{T}_h$,因此项$(\epsilon\Delta\boldsymbol{U}^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n)_K=0$.

由于双线性项 $a_h(\cdot,\cdot;\cdot)$ 中出现跳量项,因此其强制性证明将建立在如下网格依赖范数上. 定义

$$|||\boldsymbol{v}^n|||^2:=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2+\epsilon|\boldsymbol{v}^n|_{1,K}^2+\delta_K\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2)+\sum_{e\in E_h}\boldsymbol{\sigma}_e\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}^2,$$
$$n=1,2,\cdots,N.$$

误差估计将建立在如下假设之下:问题(1)的解满足 $\boldsymbol{u}^n\in H^2(\Omega)^2$ 和$p^n\in H^1(\Omega)$. 参照文献[6],利用 $\boldsymbol{v}^n+\delta_K(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n+\nabla q^n)$ 形式的测试函数来控制对流方向的梯度. 特别地,本方法中有$\nabla q^n|_K=0$. 分别用 $\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n$ 和 q^n 乘以方程(5) 和(6),在单元 K 上积分,运用 Green 公式以及$[\boldsymbol{u}^n]|_e=0$,最后将所有单元求和. 对任意$(\boldsymbol{v}^n,q^n)\in V_h\times Q_h$, 有

$$B_h(\boldsymbol{u}^n,p^n;\boldsymbol{v}^n,q^n)=$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{f}^n+\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K+d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n),$$

其中

$$d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)=-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\nabla p^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K,\ r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)=\sum_{e\in E_h}\int_e\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}^n}{\partial\boldsymbol{n}_e}\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma,$$

$$r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n)=-\sum_{e\in E_h}\int_e p^n[\boldsymbol{v}^n]\cdot\boldsymbol{n}_e\mathrm{d}\sigma.$$

注意 $\nabla q^n|_K=0$. 对任意 $\boldsymbol{v}^n\in V_h$, 显然 $d_h(P^n,\boldsymbol{v}^n)=0$. 对任意 $\boldsymbol{v}^n\in V_h\cap H_0^1(\Omega)^2$, 有 $r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n)=0$. 所以, $(\boldsymbol{u}^n,p^n)$ 和 $(\boldsymbol{U}^n,P^n)$ 满足

$$B_h(\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{U}^n,p^n-P^n;\boldsymbol{v}^n,q^n)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K+d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n).\tag{15}$$

3 稳定性分析

本文余下部分, 设 $\delta_K=C_K(\Delta t)^2$, 其中 C_K 为正常数.

定理 3.1 当时间步长 Δt 适当小, 参数 C_K 满足 $0<C_K\leqslant 1/8$, 则非协调流线扩散格式(9)~(11) 有唯一解 $(\boldsymbol{U}^n,P^n)$ 且具有如下稳定性估计:

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2+\sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(2\epsilon|\boldsymbol{U}^n|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2\right)+\sum_{e\in E_h}2\sigma_e\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}^2\right\}\Delta t\leqslant C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}^2+\|\boldsymbol{u}_0\|_{0,\Omega}^2).\tag{16}$$

证明 在式(9)中令 $\boldsymbol{v}^n=\boldsymbol{U}^n,q=P^n$, 需要估计 $a_h(\boldsymbol{U}^n,\boldsymbol{U}^n;\boldsymbol{U}^{n-1})$(定义见式(12)) 和 $l_h(\boldsymbol{U}^n)$(定义见式(14)) 中的各项. 对 $(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_K$ 分部积分

$$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_K=-(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})_K+\int_{\partial K}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_{\partial K}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}\sigma,\qquad\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H^1(K)^2\tag{17}$$

得

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n,\boldsymbol{U}^n)_K-\sum_{e\in E_h}\int_e\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e[\boldsymbol{U}^n]\cdot\{\boldsymbol{U}^n\}\mathrm{d}\sigma=0,\qquad\forall\,\boldsymbol{U}^n\in V_h.\tag{18}$$

显然

$$\left(\frac{\boldsymbol{U}^n-\boldsymbol{U}^{n-1}}{\Delta t},\boldsymbol{U}^n\right)_K\geqslant\frac{1}{2\Delta t}(\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2-\|\boldsymbol{U}^{n-1}\|_{0,K}^2).\tag{19}$$

由 Young 不等式 $ab\leqslant a^2/(2r)+rb^2/2(r>0)$ 和 $\delta_K=C_K(\Delta t)^2$, 得

$$\left(\frac{\boldsymbol{U}^n-\boldsymbol{U}^{n-1}}{\Delta t},\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\right)_K\leqslant\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2+C_K(\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2+\|\boldsymbol{U}^{n-1}\|_{0,K}^2).\tag{20}$$

当 Δt 适当小且 C_K 满足 $0<C_K\Delta t\leqslant(1/8)\Delta t\leqslant 1/8$, 由式(18)~(20)得

$$B_h(\boldsymbol{U}^n,P^n;\boldsymbol{U}^n,P^n)=a_h(\boldsymbol{U}^n,\boldsymbol{U}^n;\boldsymbol{U}^{n-1})\geqslant\frac{1}{2\Delta t}[(1-2C_K\Delta t)\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2-(1+2C_K\Delta t)\|\boldsymbol{U}^{n-1}\|_{0,\Omega}^2]+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\epsilon|\boldsymbol{U}^n|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2\right)+\sum_{e\in E_h}\sigma_e\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}^2.\tag{21}$$

由 $\delta_K=C_K(\Delta t)^2\leqslant C$, 得

$$l_h(\boldsymbol{U}^n)=(\boldsymbol{f}^n,\boldsymbol{U}^n)+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{f}^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n)_K\leqslant$$

$$C\|\boldsymbol{f}^n\|_{0,\Omega}^2+C_K\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\delta_K}{4}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2. \tag{22}$$

由式(21)和(22)得

$$(1-4C_K\Delta t)\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2-(1+4C_K\Delta t)\|\boldsymbol{U}^{n-1}\|_{0,\Omega}^2+2\sum_{e\in E_h}\boldsymbol{\sigma}_e\Delta t\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}^2+$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{2\epsilon|\boldsymbol{U}^n|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2\right\}\Delta t\leqslant C\Delta t\|\boldsymbol{f}^n\|_{0,\Omega}^2.$$

令 $\theta=(1-4C_K\Delta t)/(1+4C_K\Delta t)$，由 $0<\theta<1/(1+4C_K\Delta t)<1$，得

$$\theta\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2-\|\boldsymbol{U}^{n-1}\|_{0,\Omega}^2+2\theta\Delta t\sum_{e\in E_h}\boldsymbol{\sigma}_e\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}^2+$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{2\theta\epsilon|\boldsymbol{U}^n|_{1,K}^2+\theta\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2\right\}\Delta t\leqslant C\Delta t\|\boldsymbol{f}^n\|_{0,\Omega}^2. \tag{23}$$

用 θ^{n-1} 乘以式(23)，由 $0<\theta^n<\theta^{n-1}<1$，得

$$\theta^n\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2-\theta^{n-1}\|\boldsymbol{U}^{n-1}\|_{0,\Omega}^2+2\theta^n\Delta t\sum_{e\in E_h}\boldsymbol{\sigma}_e\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}^2+$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{2\theta^n\epsilon|\boldsymbol{U}^n|_{1,K}^2+\theta^n\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^n\|_{0,K}^2\right\}\Delta t\leqslant C\Delta t\|\boldsymbol{f}^n\|_{0,\Omega}^2. \tag{24}$$

对式(24)关于 n 求和，由 $\theta^n\leqslant\theta^l(l=1,2,\cdots,n-1)$ 得

$$\theta^n\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2-\|\boldsymbol{U}^0\|_{0,\Omega}^2+\theta^n\sum_{l=1}^n\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(2\epsilon|\boldsymbol{U}^l|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^l\|_{0,K}^2\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{e\in E_h}2\boldsymbol{\sigma}_e\|[\boldsymbol{U}^l]\|_{0,e}^2\right\}\Delta t\leqslant C\Delta t\sum_{l=1}^n\|\boldsymbol{f}^l\|_{0,\Omega}^2.$$

由 $C_K\leqslant 1/8$，$0<4C_K\Delta t\leqslant 1/2$ 和 Δt 适当小，得

$$\frac{1}{\theta^n}=\left(\frac{1+4C_K\Delta t}{1-4C_K\Delta t}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{8C_K\Delta t}{1-4C_K\Delta t}\right)^N\leqslant$$
$$(1+16C_K\Delta t)^N=(1+16C_K\Delta t)^{T/\Delta t}\leqslant e^{16C_KT}.$$

由 Gronwall 引理和 $\boldsymbol{U}^0=\boldsymbol{u}_0$ 得

$$\|\boldsymbol{U}^n\|_{0,\Omega}^2+\sum_{l=1}^n\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(2\epsilon|\boldsymbol{U}^l|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^l\|_{0,K}^2\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{e\in E_h}2\boldsymbol{\sigma}_e\|[\boldsymbol{U}^l]\|_{0,e}^2\right\}\Delta t\leqslant C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}^2+\|\boldsymbol{u}_0\|_{0,\Omega}^2). \tag{25}$$

由式(25)可得所需结论(16). □

4 误差分析

本节主要推导离散格式的误差估计. 令 $\hat{w}:=(I_h\boldsymbol{u},J_hp)$ 表示 $\hat{\boldsymbol{u}}=(\boldsymbol{u},p)$ 的插值算子，$\boldsymbol{z}^n:=\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{U}^n$，$w^n:=p^n-P^n$，则

$$\boldsymbol{z}^n=(\boldsymbol{u}^n-I_h\boldsymbol{u}^n)+(I_h\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{U}^n):=\boldsymbol{\eta}^n+\boldsymbol{\xi}^n,$$
$$w^n=(p^n-J_hp^n)+(J_hp^n-P^n):=\beta^n+\gamma^n.$$

下面的引理 4.1，引理 4.3 和定理 4.1 首先对任意给定的 ϵ，δ_K 和 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 推导成立，再对特别取值给出相应的结论.

引理 4.1 对任意 $\boldsymbol{u}^n\in H^2(\Omega)^2$ 以及 $\boldsymbol{v}\in V_h\backslash\{\boldsymbol{0}\}$，插值误差 $\boldsymbol{\eta}^n=\boldsymbol{u}^n-I_h\boldsymbol{u}^n$ 满足

$$a_h(\boldsymbol{\eta}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{\eta}^{n-1}) \leqslant C\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\lambda_K h_K^2 |\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2 + \frac{h^4}{\Delta t}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 + \sum_{e\in E_h}\lambda_e(1+\sigma_e^2)h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2\Big\} + \frac{1}{16}|||\boldsymbol{v}^n|||^2, \tag{26}$$

其中

$$\lambda_K = \epsilon + \delta_K + \min(\delta_K^{-1},\epsilon^{-1})h_K^2 + \epsilon^2\delta_K h_K^{-2},\ \lambda_e = \min(\sigma_e^{-1},\epsilon^{-1}h_e),$$

以及 $\delta_K = C_K(\Delta t)^2$. 另外,假设 $\sigma_e \sim h_e^{-1}$, 则下面结论成立:

(i) 如果 $C_K \geqslant \epsilon/(\Delta t)^2$, 则

$$\lambda_K \sim \delta_K + \frac{h_K^2}{\delta_K} + \frac{\delta_K^3}{h_K^2} \sim (\Delta t)^2 + \frac{h_K^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(\Delta t)^6}{h_K^2},\ \lambda_e \sim h_e;$$

(ii) 如果 $0 < C_K \leqslant \min\{\epsilon/(\Delta t)^2, 1/8\}$, 则

$$\lambda_K \sim \epsilon + \frac{h_K^2}{\epsilon} + \frac{\epsilon^3}{h_K^2},\ \lambda_e \sim h_e.$$

证明 (i)和(ii)显然成立,只需证明式(26). 由式(17)得

$$a_h(\boldsymbol{\eta}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{\eta}^{n-1}) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}^n-\boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t},\boldsymbol{v}^n\Big)_K - (\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{\eta}^n)_K + \epsilon(\nabla\boldsymbol{\eta}^n,\nabla\boldsymbol{v}^n)_K + \Big(\frac{\boldsymbol{\eta}^n-\boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t} + \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}^n - \epsilon\Delta\boldsymbol{\eta}^n, \delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\Big)_K\Big\} + \sum_{e\in E_h}\int_e \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e\{\boldsymbol{\eta}^n\}\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma + \sum_{e\in E_h}\int_e \sigma_e[\boldsymbol{\eta}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma. \tag{27}$$

下面估计式(27)右端各项. 由插值误差(2)得

$$\Big\|\frac{\boldsymbol{\eta}^n-\boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t}\Big\|_{0,K}^2 \leqslant \frac{1}{\Delta t}\Big\|\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}^n}{\partial t}\,\mathrm{d}t\Big\|^2 \leqslant \frac{Ch_K^4}{\Delta t}\Big\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^2)}^2.$$

由 $\delta_K = C_K(\Delta t)^2 \leqslant C$ 得

$$\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}^n-\boldsymbol{\eta}^{n-1}}{\Delta t},\boldsymbol{v}^n + \delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\Big)_K \leqslant \frac{1}{16}\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 + \frac{\delta_K}{64}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 + \frac{Ch_K^4}{\Delta t}\Big\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^2)}^2. \tag{28}$$

由式(2),可用

$$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{\eta}^n)_K \leqslant 16\delta_K^{-1}\|\boldsymbol{\eta}^n\|_{0,K}^2 + \frac{\delta_K}{64}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 \leqslant \frac{\delta_K}{64}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 + C\delta_K^{-1}h_K^4|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2$$

或者

$$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{\eta}^n)_K \leqslant \|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}\|\boldsymbol{\eta}^n\|_{0,K} \leqslant \frac{\epsilon}{64}\|\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 + C\epsilon^{-1}h_K^4|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2$$

得

$$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{\eta}^n)_K \leqslant \frac{\delta_K}{64}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 + \frac{\epsilon}{64}\|\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2 + C\min(\delta_K^{-1},\epsilon^{-1})h_K^4|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2. \tag{29}$$

又有

$$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}^n-\epsilon\Delta\boldsymbol{\eta}^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\leqslant\frac{\delta_K}{32}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2+C(\delta_Kh_K^2+\delta_K\epsilon^2)|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2\tag{30}$$

和

$$\epsilon(\nabla\boldsymbol{\eta}^n,\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\leqslant$$
$$16\epsilon\|\nabla\boldsymbol{\eta}^n\|_{0,K}^2+\frac{\epsilon}{64}\|\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2\leqslant\frac{\epsilon}{64}\|\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2+C\epsilon h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2\tag{31}$$

成立. 由插值误差(3)得

$$\int_e\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e\{\boldsymbol{\eta}^n\}\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant$$
$$C\|\boldsymbol{b}\|_{0,\infty,K_e}(\|\boldsymbol{\eta}^n|_{K_1}\|_{0,e}+\|\boldsymbol{\eta}^n|_{K_2}\|_{0,e})\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}\leqslant$$
$$C\sigma_e^{-1/2}h_e^{3/2}|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}\sigma_e^{1/2}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e},$$

其中 K_1,K_2 是满足 $\bar{K}_1\cap\bar{K}_2=e$ 和 $K_1\cup K_2=K_e$ 的两个有限单元. 另一方面,对任意 $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^2$,由 $\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}=\|[\boldsymbol{v}^n-\boldsymbol{z}]\|_{0,e}$ 得 $\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}\leqslant Ch_e^{1/2}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}$. 所以

$$\int_e\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e\{\boldsymbol{\eta}^n\}\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant Ch_e^{3/2}|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}\leqslant$$
$$C\epsilon^{-1/2}h_e^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}\epsilon^{1/2}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}.$$

由上述两个不等式,得

$$\int_e\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e\{\boldsymbol{\eta}^n\}\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant$$
$$C\min(\sigma_e^{-1},\epsilon^{-1}h_e)h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\frac{\epsilon}{128}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}^2+\frac{\sigma_e}{64}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}^2.\tag{32}$$

利用

$$\int_e\sigma_e[\boldsymbol{\eta}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant C\sigma_e^{1/2}h_e^{3/2}|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}\sigma_e^{1/2}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}\leqslant$$
$$C\sigma_eh_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\frac{\sigma_e}{64}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}^2$$

和

$$\int_e\sigma_e[\boldsymbol{\eta}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant C\sigma_eh_e^{3/2}|u^n|_{2,K_e}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}\leqslant$$
$$C\sigma_e^2\epsilon^{-1}h_e^4|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\frac{\epsilon}{128}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}^2,$$

得如下不等式

$$\int_e\sigma_e[\boldsymbol{\eta}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant$$
$$C\min(\sigma_e^{-1},\epsilon^{-1}h_e)\sigma_e^2h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\frac{\sigma_e}{64}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}^2+\frac{\epsilon}{128}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}^2.\tag{33}$$

因此,由等式(27)以及不等式(28)~(33),得

$$a_h(\boldsymbol{\eta}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{\eta}^{n-1})\leqslant C\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\epsilon+\delta_K+\min(\delta_K^{-1},\epsilon^{-1})h_K^2+\epsilon^2\delta_Kh_K^{-2})h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+$$
$$\frac{h^4}{\Delta t}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2+\sum_{e\in E_h}\min(\sigma_e^{-1},\epsilon^{-1}h_e)(1+\sigma_e^2)h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2\Big\}+$$
$$\frac{1}{16}|||\boldsymbol{v}^n|||^2.$$

设 $\lambda_e=\min(\sigma_e^{-1},\epsilon^{-1}h_e)$ 和 $\lambda_K=\epsilon+\delta_K+\min(\delta_K^{-1},\epsilon^{-1})h_K^2+\epsilon^2\delta_K h_K^{-2}$, 此即所求结论(26). □

设 $\boldsymbol{\pi}:H^1(K)\to\mathscr{P}_k(e)$ 是 $L^2(e)$ 投影,其限制在边 e 上为次数不超过 k 的多项式.

引理 4.2[13] 对整数 $m(0\leqslant m\leqslant k)$, 成立

$$\left|\int_e\varphi(v-\boldsymbol{\pi}v)\mathrm{d}s\right|\leqslant Ch_e^{m+1}|\varphi|_{1,K}|v|_{m+1,K},$$

$$\left|\int_e\varphi(v-\boldsymbol{\pi}v)\mathrm{d}s\right|\leqslant Ch_e^{m+1/2}\|\varphi\|_{0,e}|v|_{m+1,K},$$

其中 $e\in\partial K,\varphi\in H^1(K),v\in H^{m+1}(K)$.

引理 4.3 对 $\boldsymbol{u}^n\in H^2(\Omega)^2,p^n\in H^1(\Omega),\boldsymbol{z}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{U}$ 以及任意 $\boldsymbol{v}^n\in W_h\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, 成立

$$a_h(\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{z}^{n-1})\leqslant C\Big\{\sum_{K\in\mathscr{T}_h}(\epsilon h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+\delta_K|p^n|_{1,K}^2)+\sum_{e\in E_h}\lambda_e h_e|p^n|_{1,K_e}^2+\Delta t\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2\Big\}+\frac{1}{16}|||\boldsymbol{v}^n|||^2. \tag{34}$$

对任意 $\boldsymbol{v}^n\in V_h\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 以及 $w=p-P$, 成立

$$b_h(\boldsymbol{v}^n,w^n)\leqslant C\Big\{\Delta t^{1/2}\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}+\mu_h^{1/2}|||\boldsymbol{z}^n|||_1+(\delta_h+h)(\epsilon|\boldsymbol{u}^n|_{2,h}+|p^n|_{1,h})+\Delta t^{-1}\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{z}^n\|_{0,\Omega}\Big\}|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}, \tag{35}$$

其中

$$|||\boldsymbol{v}^n|||_1^2=\sum_{K\in\mathscr{T}_h}(\epsilon|\boldsymbol{v}^n|_{1,K}^2+\delta_K\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2)+\sum_{e\in E_h}\sigma_e\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}^2,$$

$$\delta_h=\max_K\delta_K=\max_K C_K(\Delta t)^2,\ |\cdot|_{l,h}^2=\sum_{K\in\mathscr{T}_h}|\cdot|_{l,K}^2,\qquad l=1,2,$$

$$\mu_h=\max_K\{\epsilon+\delta_K+\min(\epsilon^{-1},\delta_K^{-1})\}+\max_e\{h_e(\sigma_e+\sigma_e^{-1})\}.$$

假设 $\sigma_e\sim h_e^{-1}$, 则如下两个关系成立:

(i) 如果 $C_K\geqslant\epsilon/(\Delta t)^2$, 则

$$\mu_h\sim\delta_K+\frac{1}{\delta_K}+1+h_e^2\sim(\Delta t)^2+\frac{1}{(\Delta t)^2}+1+h_e^2;$$

(ii) 如果 $0<C_K\leqslant\min\{\epsilon/(\Delta t)^2,1/8\}$, 则

$$\mu_h\sim\epsilon+\frac{1}{\epsilon}+1+h_e^2.$$

证明 (i)和(ii)显然成立,故只需证明式(34)和(35). 对任意 $q^n=0$ 和 $\boldsymbol{v}^n\in V_h$, 由式(15)得

$$a_h(\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{z}^{n-1})=b_h(\boldsymbol{v}^n,w^n)+\sum_K(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K+d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n). \tag{36}$$

令 $\boldsymbol{v}^n\in W_h$, 由 $(\nabla\cdot\boldsymbol{v}^n,1)_K=0$ 和 $\boldsymbol{v}^n|_K\in\mathscr{P}_1(K)^2$, 可得:对任意 $K\in\mathscr{T}_h$,有 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}^n|_K=0$. 因此, $b_h(\boldsymbol{v}^n,w^n)=b_h(\boldsymbol{v}^n,p^n-P^n)=0$. 由积分余项型的 Taylor 展式可得

$$|\boldsymbol{R}^n|^2=\left|\frac{\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}^{n-1}}{\Delta t}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^n\right|^2=\left|\frac{1}{2\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\boldsymbol{u}_{tt}(\cdot,t)(t_{n-1}-t)\mathrm{d}t\right|^2\leqslant\frac{1}{12}\Delta t\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2. \tag{37}$$

在下面估计中, $\boldsymbol{v}^n$ 将分别用 $|||\boldsymbol{v}^n|||$ 和 $|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}$ 两种范数估计. 易知

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\leqslant\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|\boldsymbol{R}^n|(\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}+\delta_K\|\boldsymbol{b}\|_{0,\infty,K}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K})\tag{38}$$

和

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\leqslant$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{1}{16}\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2+\frac{\delta_K}{32}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2+(4+8\delta_K)|\boldsymbol{R}^n|^2\right)\tag{39}$$

成立. 对于 $d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)$ 中的 $(\nabla p^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K$ 项, 可由

$$(\nabla p^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\leqslant\delta_K|p^n|_{1,K}\|\boldsymbol{b}\|_{0,\infty,K}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K}$$

和

$$(\nabla p^n,\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K\leqslant 8\delta_K|p^n|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{32}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2$$

分别估计. 对于 $r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)$ 和 $r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n)$ 中的项, 利用引理 4.2 得

$$\int_e\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}^n}{\partial\boldsymbol{n}_e}\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma\leqslant C\epsilon^{1/2}h_e|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}\epsilon^{1/2}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e},$$
$$\int_e p^n[\boldsymbol{v}^n]\cdot\boldsymbol{n}_e\mathrm{d}\sigma\leqslant C\epsilon^{-1/2}h_e|p^n|_{1,K_e}\epsilon^{1/2}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e},$$
$$\int_e p^n[\boldsymbol{v}^n]\cdot\boldsymbol{n}_e\mathrm{d}\sigma\leqslant C\sigma_e^{-1/2}h_e^{1/2}|p^n|_{1,K_e}\sigma_e^{1/2}\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}.$$

对 $\boldsymbol{v}^n\in V_h$, 由上述关系, 可得

$$d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n)\leqslant$$
$$C\{(\delta_h+h)(\epsilon|\boldsymbol{u}^n|_{2,h}+|p^n|_{1,h})\}|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}\tag{40}$$

和

$$d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)+r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n)\leqslant$$
$$C\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\epsilon h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+\delta_K|p^n|_{1,K}^2)+\sum_{e\in E_h}\lambda_e h_e|p^n|_{1,K_e}^2\right\}+$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{\delta_K}{32}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}^2+\frac{1}{16}\epsilon|\boldsymbol{v}^n|_{1,K}^2\right)+\frac{1}{16}\sum_{e\in E_h}\sigma_e\|[\boldsymbol{v}^n]\|_{0,e}^2.\tag{41}$$

由 $\delta_K\leqslant C$ 和式(37)、(39)及(41), 得

$$a_h(\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{z}^{n-1})\leqslant C\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\epsilon h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+\delta_K|p^n|_{1,K}^2)+\sum_{e\in E_h}\lambda_e h_e|p^n|_{1,K_e}^2+\right.$$
$$\left.\Delta t\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2\right\}+\frac{1}{16}|||\boldsymbol{v}^n|||^2.$$

此即所求结论(34).

下面证明式(35). 方程(36)等价于

$$b_h(\boldsymbol{v}^n,w^n)=a_h(\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{z}^{n-1})-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{v}^n+\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K-$$
$$d_h(p^n,\boldsymbol{v}^n)-r_h^1(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}^n)-r_h^2(p^n,\boldsymbol{v}^n).\tag{42}$$

由式(38)和(40), 只需要证明项 $a_h(\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{z}^{n-1})$ 可用 $|||\boldsymbol{z}^n|||_1$ 和 $|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}$ 估计. 按照 $a_h(\cdot,\cdot;\cdot)$ 的定义式(12), 需逐项估计 $a_h(\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{z}^{n-1})$ 中的各项. 显然

$$\|\delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}\leqslant\delta_K\|\boldsymbol{b}\|_{0,\infty,K}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K}\leqslant C|\boldsymbol{v}^n|_{1,K},$$

所以

$$\left(\frac{\boldsymbol{z}^n - \boldsymbol{z}^{n-1}}{\Delta t}, \boldsymbol{v}^n + \delta_K \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n\right)_K \leqslant \frac{C}{\Delta t}\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{z}^n\|_{0,\Omega}(\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K} + |\boldsymbol{v}^n|_{1,K}). \tag{43}$$

由 $(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{z}^n, \boldsymbol{v}^n)_K \leqslant C|\boldsymbol{z}^n|_{1,K}\|v^n\|_{0,K}$ 或者$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{z}^n, v^n)_K \leqslant \|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{z}^n\|_{0,K}\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K}$，得

$$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{z}^n, \boldsymbol{v}^n + \delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)_K \leqslant C\min(\epsilon^{-1/2}, \delta_K^{-1/2})(\epsilon^{1/2}|\boldsymbol{z}^n|_{1,K} + \delta_K^{1/2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{z}^n\|_{0,K})(\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,K} + |\boldsymbol{v}^n|_{1,K}). \tag{44}$$

显然，有

$$\epsilon(\nabla\boldsymbol{z}^n, \nabla\boldsymbol{v}^n)_K \leqslant C\epsilon^{1/2}|||\boldsymbol{z}^n|||_1|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}. \tag{45}$$

由 $(I_h\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{U}^n)|_K \in \mathscr{P}_1(K)^2$ 和误差估计式(2)，得

$$\|\Delta\boldsymbol{z}^n\|_{0,K} \leqslant \|\Delta(\boldsymbol{u}^n - I_h\boldsymbol{u}^n)\|_{0,K} + \|\Delta(I_h\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{U}^n)\|_{0,K} \leqslant C|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}.$$

因此，有

$$(-\epsilon\Delta\boldsymbol{z}^n, \delta_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^n)|_K \leqslant C\epsilon\delta_K|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}|\boldsymbol{v}^n|_{1,h} \leqslant C(\delta_K + h)\epsilon|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}. \tag{46}$$

设

$$\mu_h = \max_K\{\epsilon + \delta_K + \min(\epsilon^{-1}, \delta_K^{-1})\} + \max_e\{h_e(\sigma_e + \sigma_e^{-1})\},$$

对上述不等式(43)～(46)关于单元求和，并利用离散 Friedrichs 不等式 $\|\boldsymbol{v}^n\|_{0,\Omega} \leqslant |\boldsymbol{v}^n|_{1,h}$，可知按照式(12)方式定义的 $a_h(\boldsymbol{z}^n, \boldsymbol{v}^n; \boldsymbol{z}^{n-1})$ 中最后两项之前的所有项有上界

$$C\left(\frac{1}{\Delta t}\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{z}^n\|_{0,\Omega} + \mu_h^{1/2}|||\boldsymbol{z}^n|||_1 + (\delta_h + h)\epsilon|\boldsymbol{u}^n|_{2,h}\right)|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}. \tag{47}$$

由 $[\boldsymbol{z}^n] = [\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{U}^n] = -[\boldsymbol{U}^n]$ 以及引理 4.2，得

$$\int_e \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e[\boldsymbol{z}^n]\{\boldsymbol{v}^n\}\mathrm{d}\sigma = -\int_e \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_e[\boldsymbol{U}^n]\{\boldsymbol{v}^n\}\mathrm{d}\sigma \leqslant Ch_e^{1/2}\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}$$

和

$$\int_e \sigma_e[\boldsymbol{z}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma = -\int_e \sigma_e[\boldsymbol{U}^n]\cdot[\boldsymbol{v}^n]\mathrm{d}\sigma \leqslant C\sigma_e h_e^{1/2}\|[\boldsymbol{U}^n]\|_{0,e}|\boldsymbol{v}^n|_{1,K_e}.$$

由离散 Friedrichs 不等式和上述两个不等式，可得：按照式(12)定义的 $a_h(\boldsymbol{z}^n, \boldsymbol{v}^n; \boldsymbol{z}^{n-1})$ 中最后两项有上界

$$C\max_e\{h_e(\sigma_e + \sigma_e^{-1})\}^{1/2}|||\boldsymbol{z}^n|||_1|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}. \tag{48}$$

综合等式(42)，不等式(37)、(38)、(40)以及两个上界(47)和(48)，得

$$b_h(\boldsymbol{v}^n, w^n) \leqslant C\left\{\Delta t^{1/2}\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} + \frac{1}{\Delta t}\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{z}^n\|_{0,\Omega} + (\delta_h + h)(\epsilon|\boldsymbol{u}^n|_{2,h} + |p^n|_{1,h}) + \mu_h^{1/2}|||\boldsymbol{z}^n|||_1\right\}|\boldsymbol{v}^n|_{1,h}.$$

此即所求结论(35)。　□

定理 4.1　设 $(\boldsymbol{u}^n, p^n)$ 和 $(\boldsymbol{U}^n, P^n)$ 分别为连续问题(1)和差分流线扩散非协调有限元格式(9)～(11)的解，$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,4}(\Omega)$，$\partial\boldsymbol{u}/\partial t \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，$\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2 \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，$p \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$。在定理 3.1 的条件下，有误差估计

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{z}^n\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^N\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{7}{4}\epsilon|\boldsymbol{z}^n|_{1,K}^2 + \frac{3\delta_K}{4}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{z}^n\|_{0,K}^2\right) + \sum_{e\in E_h}\frac{7}{4}\sigma_e\|[\boldsymbol{z}^n]\|_{0,e}^2\right\}\Delta t \leqslant CE_u, \tag{49}$$

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N}\Delta t^2\|p^n-P^n\|_{0,\Omega}^2\leqslant CE_p,\tag{50}$$

其中,

$$\begin{aligned}E_u=&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\lambda_K h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+\delta_K|p^n|_{1,K}^2)\Delta t+\\&\sum_{e\in E_h}(\lambda_e(1+\sigma_e^2)h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\lambda_e h_e|p^n|_{1,K_e}^2)\Delta t+\\&h^4\left\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2+(\Delta t)^2\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2,\\E_p=&(\Delta t)^3\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2+(1+\Delta t\mu_h)E_u+\\&(\delta_h+h)^2\Delta t^2(\epsilon|\boldsymbol{u}|_{2,h}+|p^n|_{1,h})^2.\end{aligned}$$

以及 $\delta_K=C_K(\Delta t)^2$. 假设 $\sigma_e\sim h_e^{-1}$, 则下面两个关系成立:

(i) 如果 $C_K\geqslant\epsilon/(\Delta t)^2$, 则

$$E_u\sim(\Delta t)^2+h^2\Delta t+\frac{h^4}{\Delta t}+h^4,\ E_p\sim h^2+\Delta t;$$

(ii) 如果 $0<C_K\leqslant\min\{\epsilon/(\Delta t)^2,1/8\}$, 则

$$E_u\sim\epsilon h^2\Delta t+\frac{h^4\Delta t}{\epsilon}+\frac{\epsilon^3\Delta t}{h}+h^2\Delta t+(\Delta t)^2,$$

$$E_p\sim\frac{(\Delta t)^3+h^2(\Delta t)^2+h^4\Delta t}{\epsilon}+\frac{\epsilon^3\Delta t+\epsilon^2(\Delta t)^2}{h}+h^2\Delta t+(\Delta t)^2.$$

证明 (i)和(ii)显然成立,故只需证明式(49)和(50). 由三角不等式、引理4.1和引理4.3,得

$$\begin{aligned}a_h(\boldsymbol{\xi}^n,\boldsymbol{\xi}^n;\boldsymbol{\xi}^{n-1})\leqslant&C\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\lambda_K h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+\delta_K|p^n|_{1,K}^2)+\\&\sum_{e\in E_h}(\lambda_e(1+\sigma_e^2)h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\lambda_e h_e|p^n|_{1,K_e}^2)+\\&\frac{h^4}{\Delta t}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2+\Delta t\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2\Big\}+\frac{1}{8}|||\boldsymbol{\xi}^n|||^2.\end{aligned}$$

当 Δt 适当小以及 C_K 满足 $0<C_K\Delta t\leqslant1/8$, 由式(21)得

$$\begin{aligned}a_h(\boldsymbol{\xi}^n,\boldsymbol{\xi}^n;\boldsymbol{\xi}^{n-1})\geqslant&\frac{1}{2\Delta t}[(1-2C_K\Delta t)\|\boldsymbol{\xi}^n\|_{0,\Omega}^2-(1+2C_K\Delta t)\|\boldsymbol{\xi}^{n-1}\|_{0,\Omega}^2]+\\&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\epsilon|\boldsymbol{\xi}^n|_{1,K}^2+\frac{\delta_K}{2}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^n\|_{0,K}^2\Big\}+\sum_{e\in E_h}\sigma_e\|[\boldsymbol{\xi}^n]\|_{0,e}^2.\end{aligned}$$

类似于式(16)的推导过程,有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\xi}^n\|_{0,\Omega}^2+&\sum_{n=1}^{N}\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(\frac{7}{4}\epsilon|\boldsymbol{\xi}^n|_{1,K}^2+\frac{3\delta_K}{4}\|\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^n\|_{0,K}^2\Big)+\\&\sum_{e\in E_h}\frac{7}{4}\sigma_e\|[\boldsymbol{\xi}^n]\|_{0,e}^2\Big\}\Delta t\leqslant\\&C\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\lambda_K h_K^2|\boldsymbol{u}^n|_{2,K}^2+\delta_K|p^n|_{1,K}^2)\Delta t+\\&\sum_{e\in E_h}(\lambda_e(1+\sigma_e^2)h_e^3|\boldsymbol{u}^n|_{2,K_e}^2+\lambda_e h_e|p^n|_{1,K_e}^2)\Delta t+\end{aligned}$$

$$h^4\left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)} + (\Delta t)^2\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}\Bigg\}.$$

由上述不等式和三角不等式,即得式(49)。

空间 V_h 和 Q_h 满足 Babuška-Brezzei 条件,因此存在独立于 h 的常数 $\rho(\rho > 0)$, 满足

$$\rho \| J_h p^n - P^n \|_{0,\Omega} \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}^n \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\boldsymbol{v}^n, J_h p^n - P^n)}{| \boldsymbol{v}^n |_{1,h}}.$$

易知

$$b_h(\boldsymbol{v}^n, p^n - J_h p^n) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla\cdot\boldsymbol{v}^n, p^n - J_h p^n)_K \leqslant \sqrt{2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \| p^n - J_h p^n \|_{0,K} | \boldsymbol{v}^n |_{1,K}.$$

因此,有

$$\rho \| p^n - P^n \|_{0,\Omega} \leqslant (\rho + \sqrt{2}) \| p^n - J_h p^n \|_{0,\Omega} + \sup_{\boldsymbol{v}^n \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\boldsymbol{v}^n, p^n - P^n)}{| \boldsymbol{v}^n |_{1,h}}. \quad (51)$$

由式(35)得

$$b_h^2(\boldsymbol{v}^n, p^n - P^n) \leqslant C\Bigg\{\Delta t\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))^2} + \frac{1}{\Delta t^2}\max_{0\leqslant n\leqslant N}\| \boldsymbol{z}^n \|^2_{0,\Omega} +$$
$$(\delta_h + h)^2(\epsilon | \boldsymbol{u} |_{2,h} + | p^n |_{1,h})^2 + \mu_h ||| \boldsymbol{z}^n |||_1^2\Bigg\} | \boldsymbol{v}^n |^2_{1,h}.$$

利用上述两个不等式和式(49),得

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N}\Delta t^2 \| p^n - P^n \|^2_{0,\Omega} \leqslant C\Bigg\{(\Delta t)^3\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} +$$
$$E_u + (\delta_h + h)^2\Delta t^2(\epsilon | \boldsymbol{u} |_{2,h} + | p^n |_{1,h})^2 + \Delta t\,\mu_h E_u\Bigg\}. \quad (52)$$

此即所求结论式(50)。 □

5 结 论

本文结论易推广到满足 Babuška-Brezzei 条件的高阶有限元。

参考文献:

[1] Hughes T J R, Brooks A N. A multi-dimensional up-wind scheme with no crosswind diffusion [C]//Hughes T J R. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*. ASME Monograph AMD-34, 1979:19-35.

[2] Nävert U. A finite element for convection-diffusion problems[D]. PhD thesis. Goteborg: Chalmers University of Technology, 1982.

[3] Johnson C. Finite element methods for convection-diffusion problems[C]//Glowinski R, Lions J L. *Computing Methods in Engineering and Applied Sciences* V. Amsterdam: North-Holland, 1981, 311-323.

[4] Johnson C, Nävert U. An analysis of some finite element methods for advection-diffusion [C]//Axelsson O, Frank L S, Van der Sluis A. *Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1981:99-118.

[5] Johnson C, Nävert U, Pitkäranta J. Finite element methods for linear hyperbolic problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1984, **45**(1/3):285-312.

[6] Johnson C, Saranen J. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations[J]. *Mathematics of Computation*,1986, **47**(175):1-18.

[7] Tobiska L, Verfürth R. Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, **33**(1):107-127.

[8] Zhou G H. How accurate is the streamline diffusion finite element method[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 1997, **66**(217):31-44.

[9] Sun C, Shen H. The finite difference streamline diffusion method for time-dependent convection-diffusion equations[J]. *Numerical Mathematics* (A Journal of Chinese Universities English Series), 1998, **7**(1):72-85.

[10] 张强. 不可压 N-S 方程的差分流线扩散法[J]. 计算数学, 2003, **25**(3):311-320.

[11] 张强, 孙澈. 非线性对流扩散方程的差分流线扩散有限元方法[J]. 计算数学, 1998, **20**(2):211-224.

[12] Sun T J, Ma K Y. The finite difference streamline diffusion method for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **149**:493-505.

[13] John V, Maubach J, Tobiska L. Nonconforming streamline-diffusion-finite-element-methods for convection-diffusion problems[J]. *Numerische Mathematik*, 1997, **78**(2):165-188.

[14] John V, Matthies G, Schiewech F, Tobiska L. A streamline-diffusion method for nonconforming finite element approximations applied to convection-diffusion problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, **166**(1/2):85-97.

[15] Matthies G, Tobiska L. The streamline-diffusion method for conforming and nonconforming finite elements of lowest order applied to convection-diffusion peoblems[J]. *Computing*, 2001, **66**(4): 343-364.

[16] Knobloch P, Tobiska L. A streamline diffusion method for nonconforming finite element approximations applied to the linearized incompressible Navier-Stokes equations[C]// Iliev O P. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Application*. Singapore, Sofia: World Scientific, 1999:530-538.

Streamline Diffusion Nonconforming Finite Element Method for the Time-Dependent Linearized Navier-Stokes Equations

CHEN Yu-mei[1,2], XIE Xiao-ping[1]

(1. *School of Mathematics*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064, *P. R. China*;

2. *College of Mathematics and Information*, *China West Normal University*, *Nanchong*, *Sichuan* 637002, *P. R. China*)

Abstract: A finite difference streamline diffusion nonconforming finite element approximation was proposed for solving the time-dependent linearized Navier-Stokes equations. Streamline diffusion finite element method was used to discretize the space variables in order to cope with the usual instabilities caused by the convection term and finite difference discretization was used in the time domain. Nonconforming finite element approximations were used for the velocity and pressure fields: the velocity is approximated by discontinuous piecewise linear and the pressure by piecewise constant. Stability and optimal error estimates for the discrete solutions are obtained.

Key words: streamline diffusion method; nonconforming; time-dependent linearized Navier-Stokes; error estimate