

高超声速飞行器前驻点热流数值 模拟的物理准则研究*

李邦明, 鲍麟, 童秉纲

(中国科学院研究生院, 北京 100049)

(周哲玮推荐)

摘要: 通过建立高超声速飞行器前驻点处沿驻点线的准一维流简化模型,再将头激波后流场分为无粘区和近壁粘性区,然后从 N-S 方程组出发,利用流场对称性和量级分析方法,最终推导出驻点邻域简化控制方程组,并证明了其流动具有边界层型特征.在此基础上,根据该控制方程组,给出了计算结果应满足的壁面驻点以及沿驻点线的相容关系,成为热流 CFD 计算准确与否应遵循的物理准则.最后通过算例验证了物理准则作为热流 CFD 计算可靠性判据的正确性.

关键词: 准一维流; 驻点热流; 高超声速; 物理准则

中图分类号: O354.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.005

引 言

当前计算流体力学(简称 CFD)提供了强大的数值模拟手段,但是它对计算高超声速飞行器表面的热流(即热通量)和摩阻这一类流场梯度量,仍有诸多不确定因素,给计算结果验证特别是确认带来困难.我们认为,有必要对所研究的问题,设法从理论上导出有关流动参数应满足的相容关系,形成检验 CFD 计算的物理准则,使之便于对计算结果进行验证和确认,这不失为一个新思想,本文为此作出了探索.

对钝头体前驻点而言,热流 CFD 计算存在很大的不确定性,在一定的计算格式下采用不同的网格密度分别计算其同一状态下的热流,其结果差别很大,导致计算结果的不可靠^[1-4].网格密度的讨论最初出现在气动力计算上,通常采用网格 Reynolds 数来表征其特征,要求计算结果随网格 Reynolds 数是收敛的.高超声速飞行器的气动力计算是求解飞行器的整体性能,不确定度大的局部区域对其整体性能影响不大,故气动力计算结果的不确定度一般是很小的,计算结果满足收敛性.然而气动热关心的恰恰就是局部区域,且气动力和气动热产生的物理机制是不同的,故仍然需要讨论其局部网格效应,目前大多数讨论热流计算网格密度的文献把驻点附近网格 Reynolds 数作为网格密度特征参数加以分析.其定义式为

* 收稿日期: 2010-05-05; 修订日期: 2010-05-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90716011;10902119)

作者简介: 李邦明(1986—),男,安徽怀宁人,博士生(E-mail:lbm@mail.ustc.edu.cn);

童秉纲(1927—),男,江苏张家港人,博士生导师(联系人.E-mail:tongbg@gucas.ac.cn).

$$Re_c = \frac{\rho_\infty u_\infty n}{\mu_\infty}, \quad (1)$$

其中,特征尺寸 n 通常取壁面驻点处第 1 层网格法向高度。对于同一计算状态, Re_c 的大小与壁面网格高度值成正比,可以反映出驻点处近壁面网格疏密情况。1988 年, Klopfer 和 Yee^[1] 在对钝体驻点热流的计算进行研究后发现,热流值依赖于网格以及格式的选取,要得到准确的热流值, Re_c 要求减小到 3 以下。Hoffmann 等^[2-3] 提出壁面热流计算与网格有关,壁面网格的改进可以极大改善热流的预测。Lee 和 Rho^[4] 在 1998 年讨论了 AUSM+格式在高超声速钝头体驻点热流计算中的应用,经对比发现,AUSM+格式优于其他格式,但是热流值仍然依赖于网格密度。综上,目前热流计算遇到的困难在于:精确的热流值预测依赖于合适的网格以及格式,然而如何选择网格以及格式并没有令人信服的依据。Zoby, Thompson 和 Wurster^[5] 在 2004 年评价了现有热环境理论预测方法,认为在当前情况下,一方面要继续发展高精度流场解算格式,另一方面应从流动物理出发,探寻高超声速气体流动特征。这启示我们须利用理论分析手段,得到可以判别热流 CFD 计算可靠性的物理准则。

驻点热流的相关理论研究已经有很多,这类理论均基于边界层的自相似解理论,即壁面驻点附近粘性区域控制方程沿用边界层方程。如 Lees^[6] 分析了高超声速钝头体壁面传热问题,得到驻点及其下游的热流分布。Fay 和 Riddell^[7] 研究了钝头体驻点传热问题,给出了著名的预测驻点热流的 Fay-Riddell 公式。1962 年 Van Dyke^[8] 提出高阶边界层理论,将流场分为外部无粘流动和内部边界层流动,并逐一进行了细致的理论探讨。我们考虑到,驻点热流由沿驻点线的温度分布剖面决定,因此弄清沿驻点线附近的流动物理非常重要。经典驻点理论解只是揭示了驻点处沿着壁面切向的流动特征,不足以指导驻点热流 CFD 计算,且驻点附近是否存在边界层仍然是个疑问。因此本文直接从 Navier-Stokes (N-S) 方程组出发,旨在建立沿驻点线的新的流动模型。2008 年, Belouaggadia 等^[9] 沿着驻点线无穷薄流管作准一维流简化,从数值和理论两方面给出高超声速非平衡流的激波后无粘流场,研究了非平衡效应对激波脱体距离的影响。本文借鉴其流动模型并加以扩展,建立了新的高超声速驻点流动物理模型,即沿驻点线作准一维简化,且将头激波后的流动分为无粘区和粘性区,从 N-S 方程组出发,导出驻点邻域控制方程,以揭示沿驻点线方向传热的本质,由此得到驻点壁面的相容关系,成为判别热流 CFD 计算可靠性的物理准则。

1 驻点流动模型

作为钝头体的简化模型,现研究高超声速均匀来流绕二维圆柱的流动,如图 1 所示。这里

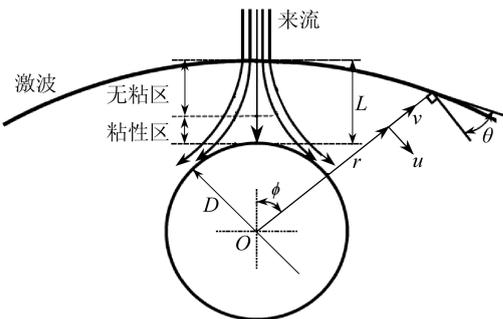


图 1 驻点流动模型示意图

参考文献[8]的流动分层观点,将流动分为外部无粘区和内部粘性区。外部无粘流动层借鉴文献[9]的研究模型,对头激波后至壁面沿驻点线的无穷薄流管采用准一维流动简化。对于内部粘性流动层,我们采用新的研究思路,直接从 N-S 方程组出发,沿用无粘外层沿驻点线的准一维流简化,分析沿驻点线的近壁面粘性流动,并通过量级分析方法,得到简化的驻点邻域控制方程。

在图 1 中,建立极坐标系 (r, ϕ) , 定义 u 为

沿 ϕ 方向速度, v 为沿 r 方向速度, 分别称为切向速度和法向速度. 其中, L 为激波脱体距离, D 为圆柱直径, $\theta = \beta - \phi + \pi/2$, β 为激波角.

在高超声速流动中, 滞止焓近似为来流的动能. 下面进行无量纲化, 下标“s”表示滞止参数, “ ∞ ”表示来流参数, 无量纲坐标 \bar{r} 在壁面处值为 0, 激波后为 1.

$$\bar{p} = \frac{p}{p_s}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_\infty}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_s}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_s}, \quad \bar{r} = \frac{2r/D - 1}{L}, \quad (2)$$

其中, $\bar{L} = 2L/D$, $h_s = c_p T_s = u_\infty^2/2$.

2 沿驻点线的流动变量讨论

上面提到对于内部粘性区域依然沿驻点线作准一维流简化, 现具体分析在该假设下驻点邻域流动变量的表达式.

首先, 粘性区内流动对称性依然存在, 流动参数 v, p, ρ, T 在驻点线上满足:

$$\frac{\partial [v, p, \rho, T]}{\partial \phi} = 0. \quad (3)$$

其次, 在粘性区驻点线上切向速度均为 0, 应设法引入新参量, 改写切向动量方程. 借鉴经典不可压缩流驻点附近流动的精确解^[10], 尽管切向动量方程中各项都为 0, 但数学上是 0/0 型的极限问题, 不能简单地忽略掉. 从文献[7]可以看到, 切向速度 u 在驻点线附近可以表示成 $u = (\partial u / \partial \phi)_0 \phi$ 的形式, 即 u 在 ϕ 方向呈线性分布, 若以 $\partial u / \partial \phi$ 代替 u 作为流动变量, 切向动量方程的极限形式存在 (同除以 ϕ). 而且驻点附近 $\partial u / \partial \phi$ 沿 ϕ 方向为常数, 即在驻点线上满足

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (4)$$

由此可见流动变量在 ϕ 方向变化均不大, 可以在驻点线邻域作准一维流简化.

至此, 驻点问题最终归结为对流动变量 $\partial u / \partial \phi, v, T, \rho, p$ 的求解.

3 可压缩驻点邻域控制方程组

3.1 沿驻点线准一维流动控制方程组

先给出极坐标下的 N-S 方程组(5).

$$\frac{\partial(\rho r v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \phi} = 0, \quad (5a)$$

$$\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{r \partial \phi} - \frac{u^2}{r} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} \right] - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r}, \quad (5b)$$

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{r \partial \phi} + \frac{uv}{r} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right] + \frac{\tau_{r\phi}}{r}, \quad (5c)$$

$$\rho \left(v \frac{\partial e}{\partial r} + u \frac{\partial e}{r \partial \phi} \right) = \tau_{rr} \frac{\partial v}{\partial r} + \tau_{\phi\phi} \left(\frac{\partial u}{r \partial \phi} + \frac{v}{r} \right) + \tau_{r\phi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \phi} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{r \partial \phi} \right) \right], \quad (5d)$$

其中, $\tau_{rr}, \tau_{r\phi}, \tau_{\phi\phi}$ 为应力张量极坐标下的各个分量, k 为热传导系数, e 为比内能, 我们研究的范围是完全气体, 因此有 $e = c_v T, h = c_p T$, 且 $c_p/c_v = \gamma$, 这里比热比 γ 为常数;

现将上式按照式(2)进行无量纲化, 并根据第 2 节中的分析, 沿驻点线附近可看作一个无穷薄的流管, 具有一维流动特征, 采用 $\partial u / \partial \phi, v, T, \rho, p$ 为变量. 由此即可导出无量纲形式的沿

驻点线准一维流动控制方程组(6)【推导过程见附录A】:

$$\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{L}{1+rL} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + v \right) = 0, \quad (6a)$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left[-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{L}{1+rL} \mu \left(v + \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right) + \frac{2L}{1+Lr} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{L}{1+rL} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + v \right) \right) \right], \quad (6b)$$

$$\rho v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{L}{1+rL} \rho \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + v \right) + \frac{L}{1+rL} \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right), \quad (6c)$$

$$\frac{1}{\gamma} \rho v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{L}{1+rL} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + v \right) \right] = \frac{1}{RePr(\gamma-1)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{Lk}{1+rL} \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{2\mu}{3Re(\gamma-1)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \frac{L}{1+rL} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + v \right) + \frac{L^2}{(1+rL)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + v \right)^2 \right]. \quad (6d)$$

上述方程组利用了准一维流假设及对称条件,方程得到了很大的简化(为简便,无量纲量均不再特殊标记);而对于切向动量方程(6c)中的切向压力梯度,这里做如下讨论:

由 Newton 碰撞理论,沿壁面压力分布为 $p - p_\infty = \rho_\infty u_\infty^2 \cos^2 \phi$, 得到流动滞止处无量纲压力梯度为

$$\left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_s = -4 \frac{\rho_\infty}{\rho_s} \frac{\rho_s h_s}{p_s}, \quad (7)$$

即切向动量方程(6c)中的切向压力梯度项为常数,因此其仍为常微分方程。

上述方程组中 r 方向动量方程(6b)和能量方程(6d)的右端项较复杂,还需进一步简化。Van Dyke^[8]指出,对于来流大 Reynolds 数情形,驻点附近无量纲粘性区厚度量级为 Reynolds 数开方的倒数,是很薄的流动层,因此下节将运用量级分析方法略去其中的次要项,使得方程进一步简化。

3.2 大 Reynolds 数来流情形下驻点邻域控制方程组

由于热流依赖于壁面处的温度分布剖面,因此要关注驻点附近粘性区内(即驻点邻域)的流动。上节已指出,对于来流大 Reynolds 数情形,粘性区是靠近壁面很薄的流动层,这样就可以通过量级分析对粘性区方程进行简化。粘性区无量纲厚度为 $Re^{-1/2}$ 量级,取为小参量 ε , 则粘性区有

$$r = O(\varepsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = O(1), \quad T = O(1), \quad \rho = O(1). \quad (8)$$

由连续性方程(6a),法向速度量级为 $v = O(\varepsilon)$ 。

故沿驻点线准一维流动控制方程组(6)简化为驻点邻域控制方程组:

$$\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + L \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (9b)$$

$$\rho v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 + L \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right), \quad (9c)$$

$$\frac{1}{\gamma} \rho v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + L \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{RePr(\gamma - 1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (9d)$$

法向动量(9b)表明粘性区内压力沿法向不变,符合边界层流动不存在法向压力梯度的特征;切向动量方程(9c)中 $\partial u/\partial \phi$ 的高阶导数项前是小量,由奇异摄动理论(对于最高阶导数乘以小参数的微分方程,其退化问题常引起偏微分方程的类型改变或微分方程的降阶,因而原来适定的定解条件变得不适定了,使得退化问题无解^[11]),其分布呈边界层型分布,后面能量方程亦如此.通过量级分析方法,能量方程中的粘性耗散项可略去不计,这一特征直接影响沿驻点线上温度分布剖面的特征,即温度分布剖面不存在峰值,因此,能量方程(9d)是热对流、压缩做功和热传导(方程左端第1项为对流项,第2项为压缩功项,右端项为热传导项)3项的平衡关系.

以上导出的大 Reynolds 数下驻点邻域的控制方程组(9),与 Fay-Riddell 公式依据的边界层方程组^[7]形式上不一致,不过由于讨论的是驻点附近流动,其速度值很小,边界层内流体动能相对于来流总焓可以忽略,故边界层方程组中能量方程的粘性耗散项可以略去,与我们沿驻点线推导,直接忽略粘性耗散项的做法,殊途同归,结果相同.

4 壁面驻点以及沿驻点线相容关系

从上面导出的驻点邻域控制方程组(9),就能得到壁面驻点以及沿驻点线的相容关系.

对于壁面驻点处,利用壁面无滑移无穿透条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad v = 0. \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),得到壁面驻点相容关系如下:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (11b)$$

$$L \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right], \quad (11c)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \quad (11d)$$

这些相容关系说明:在壁面处不存在对流作用,连续性方程(11a)实际意味着壁面速度散度为0;法向动量方程(11b)未变,为边界层流动法向压力的特征;切向动量方程(11c)只剩下切向压力梯度和粘性力的平衡;能量方程(11d)表示,由于壁面处对流传热不存在,而且速度散度为0,则压缩功项也不存在,故简化为热传导项为0.

特别地,式(11c)是两项的平衡,是切向动量方程在壁面处的退化形式,切向动量方程表明流动为边界层型的,为了能准确模拟边界层流动,要求边界层内沿驻点线的计算网格切向宽度远大于法向高度(要求很小的网格高宽比)【见附录B】,即式(11c)要求一定的网格形状,故不再将其列为物理准则.

总之,壁面相容关系(11a)、(11b)、(11d)反映了壁面驻点处流动参数的制约关系,理应视为判别检验数值计算可靠性的物理准则.

另外,驻点邻域沿驻点线(除去驻点)的相容关系如下:

由法向动量方程(9b)和沿驻点线对称性关系(3)可知,粘性区压力为常值,则完全气体状态方程为

$$\rho T = 1. \quad (12)$$

可以对驻点邻域的能量方程(9d)中的对流项和压缩功项进行合并.首先,利用连续性方程式(9a),有

$$\frac{\partial v}{\partial r} + L \frac{\partial u}{\partial \phi} = -\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}. \quad (13)$$

再利用完全气体状态方程(12),有

$$-\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \rho v \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (14)$$

由此可见,对流项和压缩功项相差常数倍,可以合并成一项,则能量方程(9d)简化为

$$\rho v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{RePr(\gamma - 1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (15)$$

从简化能量方程(15)可以看到,沿驻点线能量方程不存在能量耗散,只存在对流和热传导的作用,计算结果需要满足这一流动物理特征才能保证计算准确,因此亦作为检验热流 CFD 计算的物理准则.

为便于检验,变换能量方程的形式如下:

$$R_{cc} = \frac{RePr(\gamma - 1)\rho v \partial T / \partial r}{\partial(k \partial T / \partial r) / \partial r} = 1.0. \quad (16)$$

综上,本文得到壁面驻点处相容关系(11a)、(11b)、(11d)以及沿驻点线(除去驻点)的相容关系(16),作为检验驻点热流 CFD 计算准确与否的物理准则.

5 物理准则作为热流 CFD 计算可靠性判据的验证

为了判别数值计算结果是否准确,这里引入不确定度概念,由于真实的驻点热流值并不知晓,工程上采用与 Fay-Riddell 公式的理论解对比,接近则认为可靠.本文借鉴这种做法,认为计算值和该理论值的偏差为绝对不确定度,这个偏差值和理论值之比为相对不确定度,相对不确定度小的计算结果认为是可靠的(由于计算结果不能判断其是否准确,故以后的讨论均基于其可靠性的判别).引言中提到,驻点热流 CFD 计算结果对网格密度十分敏感,网格密度的倍数变化往往引起计算热流值量级上的变化^[24,12],计算结果的不确定度很大,导致计算结果的不可靠.本文推导的物理准则,是用来判别 CFD 计算的热流值的可靠性,即判断计算结果的不确定度.下面来检验在物理准则符合的条件下,是否能得到可靠的热流 CFD 计算值.

首先,驻点热流值是由其附近的温度分布剖面决定,主要取决于能量方程计算的精确程度,故驻点处相容关系(11d)以及沿驻点线的相容关系(16)满足与否,直接决定热流值是否正确.其次,流场模拟结果是否正确也是准确计算热流值的重要条件,相容关系(11a)、(11b)也需要满足.总之,先检验基于能量方程的相容关系(11d)、(16),再讨论壁面驻点处流动制约关系(11a)、(11b)是否满足,以此作为计算可靠与否的物理准则.

本文 CFD 算例程序采用有限体积方法离散,无粘项采用 AUSM+UP 格式,粘性项采用二阶中心差分.已知热流 CFD 计算精度不仅依赖于格式,而且依赖于网格.本文仅讨论网格的影响,特别是法向第 1 层网格高度(如式(1),用 Re_c 表示)和网格切向宽度的影响,且法向网格高度更为敏感^[24,12],因此下文依次验证 Re_c 和驻点处切向网格宽度变化时,物理准则是否可

以判别热流 CFD 计算结果的可靠性。

现进行两组算例对比,各算例来流条件均为来流 Mach 数 $Ma = 6$, 飞行高度 $H = 20$ km, 圆柱半径 $R = 0.01$ m, 壁面温度 $T_w = 300$ K. 第 1 组取 6 种 Re_c , 切向网格分布均相同;第 2 组取 5 种切向网格宽度值, Re_c 均相同。

图 2 和表 1 依次显示在不同 Re_c 下,沿驻点线和壁面相容关系的满足情形,图 2 表明各算例均满足驻点邻域沿驻点线相容关系(16);对于壁面驻点相容关系,表 1 指出,当 $Re_c = 400$ 时,能量方程相容关系(11d)的偏差值接近 1 个数量级,认为不满足该相容关系.因此可以推断 $Re_c = 400$ 时,驻点处热流计算不合理,而其余各算例($Re_c \leq 200$)的热流计算结果可靠。

现在对上述判别结论进行 CFD 数值验证.从图 3 可以看到, $Re_c \leq 200$ 的算例,相对不确定度小于 20%,认为结果可靠,而 $Re_c = 400$ 的算例相对不确定度超过 20%,认为不可靠,这和从物理准则判断得到的结论相同,验证了物理准则可以作为热流 CFD 计算结果是否可靠的判据。

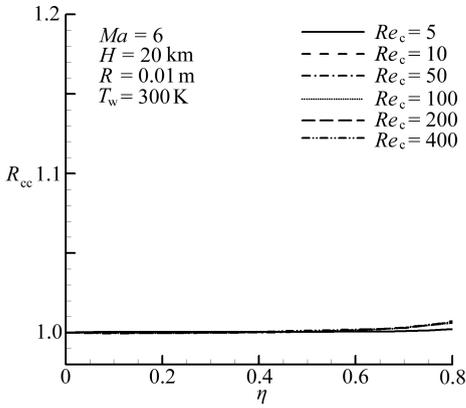


图 2 沿驻点线相容关系的偏差

(横坐标 η 为归一化的边界层厚度,由于边界层外缘 $\eta = 1$ 处能量方程各项均趋于 0,故这里 η 只取到 0.8,图 4 所示亦如此)

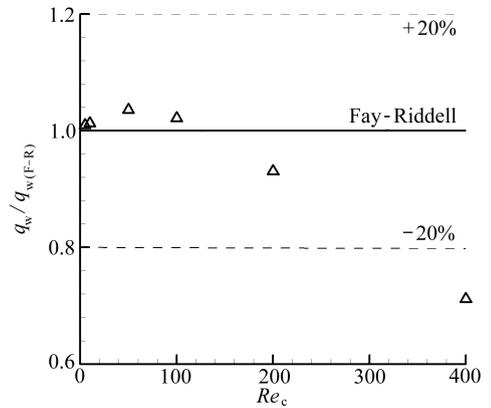


图 3 绝对不确定度和 Re_c 的关系

(绝对不确定度定义为: $q_w / q_w(F-R)$)

注 图 2:由沿驻点线能量方程(16), $R_{cc} = 1$ 表示其相容关系的理论值,可以看到,各算例结果均较好地满足该相容关系。

图 3:定义相对不确定度超过 20% 为不确定度过大,此时计算结果不可信;当 Re_c 超过 300 时,相对不确定度超过 20%。

表 1 壁面驻点相容关系的偏差值(变化 Re_c)

法向第 1 层 Re_c	$\partial v / \partial r$	$\partial p / \partial r$	$\partial(k\partial T / \partial r) / \partial r$
5	0.081	0.009 0	0.002 3
10	0.075	0.016	0.008 2
50	0.045	0.018	0.016
100	0.081	0.035	0.093
200	0.094	0.042	0.140
400	0.080	0.052	0.750

注 显示数据为 $\partial v / \partial r$ 等的无量纲值,等于 0 为壁面相容关系的理论值。

以上数据表明:连续性方程以及法向动量方程的偏差值对 Re_c 不敏感,而能量方程随 Re_c

变化十分敏感,且热流直接由能量方程决定,因此依据能量方程满足情况来判断算例的可靠性。在 Re_c 小于等于 200 时,能量方程相容关系偏差值的数量级为 0.1 及以下,认为符合物理准则;当其等于 400 时,其偏差值接近 1 个数量级,此时认为不再符合物理准则。

同理,下文对驻点处切向宽度作验证。

图 4 和表 2 依次显示变化切向网格宽度时沿驻点线和壁面相容关系的满足情形。其中前 3 组算例代表网格高宽比较小的情况,各相容关系均满足较好。后两组算例代表大网格高宽比情况,计算得到的沿驻点线能量方程相容关系与理论值 ($R_{cc} = 1$) 的最大偏差超过 1 个数量级,且壁面连续性方程和动量方程相容关系偏差值也过大,这些说明沿驻点线的温度场不合理,驻点处流场计算也不正确。因此,基于物理准则,判断后两组算例计算的驻点热流不可靠,而其余各算例应该为可靠的,即热流计算不确定度较小。

同样,现在对上述结论进行数值验证,从表 3 可以看到,前 3 组算例计算的相对不确定度小于 20%,认为结果可靠,而后两组算例相对不确定度大大超过 20%,数值结果并非物理解,这和从物理准则判断得到的结论相同,验证了物理准则可以作为热流 CFD 计算结果是否可靠的判据,同时这也验证了附录 B 的结论。

由沿驻点线能量方程(16), $R_{cc} = 1$ 表示相容关系的理论值,可以看到后两组算例计算得到的沿驻点线相容关系与理论偏差过大,其余均满足较好。

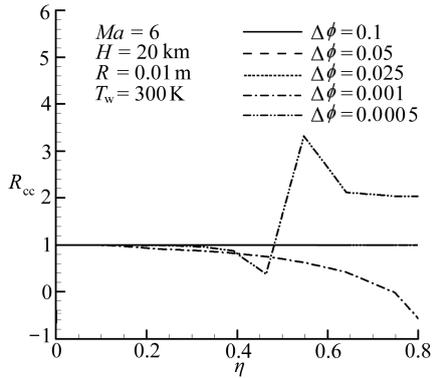


图 4 沿驻点线相容关系的偏差值
(变化切向网格宽度)

表 2 壁面驻点相容关系的偏差值(变化切向网格宽度)

切向网格宽度	$\partial v / \partial r$	$\partial p / \partial r$	$\partial(k \partial T / \partial r) / \partial r$
0.1	0.080	0.028	0.007 8
0.05	0.038	0.027	0.004 4
0.025	0.025	0.032	0.010
0.001	2.0	0.23	0.060
0.000 5	2.0	0.40	0.028

注 显示数据为 $\partial v / \partial r$ 等的无量纲值,等于 0 为壁面相容关系的理论值。

表中数据显示:前 3 个算例壁面各相容关系偏差值的数量级均为 0.1 及以下,而后两个算例连续性方程以及动量方程相容关系偏差值数量级均超过 0.1,说明流场结果的不正确,进而导致温度场计算不合理,这从图 4 可以得到验证。

表 3 相对不确定度表(变化切向网格宽度)

切向网格宽度	0.1	0.05	0.025	0.001	0.000 5
相对不确定度	0.008 1	0.011	0.033	0.95	4.4

相对不确定度定义为: $(q_w - q_{w(F-R)}) / q_{w(F-R)}$ 。除后两组算例外,其余算例结果的不确定度均较小。

综上,本节研究了驻点热流 CFD 计算的网格效应。通过变化 Re_c , 并与 CFD 算例对比,发现壁面能量方程相容关系式(11d)可以作为判别 CFD 计算可靠性的依据;同时通过变化切向网格宽度,发现沿驻点线能量方程相容关系式(16)可以作为判别 CFD 计算可靠性的依据。总

之,本文提出的物理准则是判别驻点热流 CFD 计算可靠性的有效判据。

6 结 语

本文实现了对高超声速钝头体驻点热流进行理论分析,提出 CFD 计算应遵循的物理准则,有助于克服计算结果的不确定性.具体内容有:

1) 本文建立了沿驻点线的准一维流动模型,在激波后分为无粘流和粘性层两个区,对粘性层依据 N-S 方程组,基于流动的对称性和量级分析方法,导出了驻点邻域的控制方程组.与依据边界层方程出发的 Fay-Riddell 解殊途同归,互相验证,结果相同。

2) 基于上述理论分析,进一步导出了壁面驻点的相容关系以及沿驻点线的相容关系,作为 CFD 计算的物理准则。

3) 通过实例计算,大范围的变动 Re_c 和网格宽度,检验其满足相容关系的优劣,并与 CFD 数值解进行对比,从而验证了本文提出的物理准则是判别驻点热流 CFD 计算可靠性的判据。

附录 A

沿驻点线准一维流动控制方程组(6)的推导过程

根据 3.1 节中有量纲的沿驻点线极坐标 N-S 方程组(5),其中应力项表达式如下:

$$\tau_{rr} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (\text{A1})$$

$$\tau_{\phi\phi} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{r \partial \phi} + \frac{v}{r} \right), \quad (\text{A2})$$

$$\tau_{r\phi} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \phi} - \frac{u}{r} \right), \quad (\text{A3})$$

其中

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial(rv)}{r \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \phi},$$

并在 Stokes 流体假设下,有 $\lambda = -2\mu/3$;

在第 1 节中式(2)所示无量纲化下,无量纲的 N-S 方程组为

$$\frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{L}\bar{v}}{1+\bar{L}\bar{r}} + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} = 0, \quad (\text{A4})$$

$$\bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \bar{\rho}\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\phi}} - \bar{u} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{Re} \left[-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \bar{\mu} \left(\bar{v} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \bar{\phi} + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\phi}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \bar{\phi} \right) \right) \right) + \frac{2\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} + \bar{v} \right) \right) \right], \quad (\text{A5})$$

$$\bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \right) + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} + \bar{v} \right) + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{\bar{\phi}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\phi}} = \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \right) + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\phi}} - \bar{u} \right) \right) \right) - \right. \\ \left. \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}} \left(\frac{2}{3} \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{2\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} + \bar{v} \right) \right) \right) + \frac{2\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \bar{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \bar{\phi} + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\phi}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} \bar{\phi} \right) \right) \right], \quad (\text{A6})$$

$$\frac{1}{\gamma} \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} + \bar{v} \right) \right) = \frac{1}{RePr(\gamma-1)} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{L}\bar{k}}{1+\bar{L}\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\phi}} \right] + \\ \frac{2\bar{\mu}}{3Re(\gamma-1)} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right)^2 - \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} + \bar{v} \right) + \frac{\bar{L}^2}{(1+\bar{L}\bar{r})^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\phi}} + \bar{v} \right)^2 \right], \quad (\text{A7})$$

其中

$$Re = \frac{\rho_s u_\infty L}{\mu_s}, Pr = \frac{c_p \mu_s}{k_s}.$$

再根据流场对称性,可知 $\partial v/\partial \phi = 0$,准一维流假设下,去除 ϕ 的相关项,就得到 3.1 节中无量纲的沿驻点线准一维流动控制方程组(6)。

附录 B

网格高宽比的量级估计

由 3.2 节中切向动量方程式(9c),分析其截断误差,可以得到离散格式对网格长宽比的要求,具体如下:

$$\rho v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + R_1 + L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 + R_2 + L \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right] + R_3, \quad (B1)$$

其中

$$R_1 = (\Delta r) \cdot \rho v \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right), R_2 = (\Delta \phi)^2 \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right). \quad (B2)$$

从 3.2 节的量级分析,可以得到在边界层内,有

$$v = O(\varepsilon), \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = O(\varepsilon^{-2}), \frac{\partial u}{\partial \phi} = O(1), \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = O(1). \quad (B3)$$

而计算要求各截断误差数量级相同,即 $R_1/R_2 = O(1)$,则 $\Delta r = \varepsilon(\Delta \phi)^2$,即

$$\frac{\Delta r}{\Delta \phi} = \varepsilon \Delta \phi, \quad (B4)$$

而 ε 是小量,故要求边界层内网格具有很小的高宽比,才能较好地模拟出边界层流动。

致谢 本文的研究工作,得到中国航天空气动力技术研究院姜贵庆研究员和中国科学技术大学庄礼贤教授的热心帮助和有益指导,谨此表示感谢!

参考文献:

- [1] Klopfer G H, Yee H C. Viscous hypersonic shock on shock interaction on blunt cowl lips [R]. AIAA paper, 1988-0233, 1988.
- [2] Hoffmann K A, Siddiquim S, Chiang S T. Difficulties associated with the heat flux computations of high speed flows by the Navier-Stokes equations[R]. AIAA paper, 1991-0467, 1991.
- [3] Hoffmann K A, Papadakis M, Suzen Y B. Aeroheating and skin friction computations for a blunt body at high speeds[R]. AIAA paper, 1994-0455, 1994.
- [4] Lee J H, Rho O H. Accuracy of AUSM + scheme in hypersonic blunt body flow calculation [R]. AIAA paper, 1998-1538, 1998.
- [5] Zoby E V, Thompson R A, Wurster K E. Aeroheating design issues for reusable launch vehicles—a perspective[R]. AIAA paper, 2004-2535, 2004.
- [6] Lees L. Laminar heat transfer over blunt nosed bodies at hypersonic flight speeds[J]. *Jet Propulsion*, 1957, **26**(4):259-269.
- [7] Fay J A, Riddell F R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air[J]. *Journal Aeronautical Science*, 1958, **25**(2): 73-85.
- [8] Van Dyke M. Higher approximations in boundary-layer theory—part 1: general analysis[J]. *J Fluid Mech*, 1962, **14**(2): 161-177.
- [9] Belouaggadia N, Oliver H, Brun R. Numerical and theoretical study of the shock stand-off distance in non-equilibrium flows[J]. *J Fluid Mech*, 2008, **607**(1): 167-197.
- [10] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Mechanics* [M]. Beijing: China Machine Press, 2004.

- [11] 李家春, 周显初. 数学物理中的渐近方法[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [12] 阎超, 禹建军, 李军哲. 热流 CFD 计算中网格和格式效应若干问题研究[J]. 空气动力学报, 2006, 24(1):125-130.

Physical Criterion Study on Forward Stagnation Point Heat Flux CFD Computations at Hypersonic Speeds

LI Bang-ming, BAO Lin, TONG Bing-gang
(*Graduate University, CAS, Beijing 100049, P. R. China*)

Abstract: In order to evaluate the uncertainties in CFD computations of the stagnation point heat flux, a physical criterion was developed. Based on a quasi-one-dimensional hypothesis along stagnation line, a new stagnation flow model was applied which contributes to obtain the governing equations of the flow near the stagnation point at hypersonic speeds. From the above equations, a set of compatibility relations was given at the stagnation point and along the stagnation line, which consist of the physical criterion for checking the accuracy in stagnation point heat flux computations. Eventually, verification of the criterion was made among various numerical results.

Key words: quasi-one-dimensional hypothesis; stagnation point heat flux; hypersonic flow; physical criterion