

一类时间分数阶偏微分方程的解*

黄凤辉¹, 郭柏灵²

(1. 华南理工大学 理学院 数学系, 广州 510641;
2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(本刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑一类时间分数阶偏微分方程,该方程包含几种特殊情况:时间分数阶扩散方程、时间分数阶反应-扩散方程、时间分数阶对流-扩散方程以及它们各自相对应的整数阶偏微分方程.通过 Laplace-Fourier 变换及其逆变换,该方程在空间全平面和半平面内的基本解可以求出,但其表达式则是通过适当的变形来求.另外,对于有限域上的初边值问题,则可由 Sine(Cosine)-Laplace 变换导出该方程的一种级数形式的解,并通过两个数值例子来说明该方法的有效性.

关键词: 分数阶微分方程; Caputo 分数阶导数; Green 函数; Laplace 变换; Fourier 变换; Sine(Cosine)变换

中图分类号: O175.2 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.003

引言

近年来,分数阶微分方程已被广泛研究并应用到了众多学科中,如粘弹性力学、分形理论等.分数阶偏微分方程可以用来描述一些反常的自然现象.比如:分数阶扩散方程可以用来描述具有分形结构的多孔介质中的反常慢扩散现象,而分数阶对流-扩散方程可以用来描述介质中流体的反常渗透现象.

考虑如下时间分数阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = -\lambda^2 u(x,t) - \nu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

其中, $\lambda, \nu \geq 0, D > 0$, 且均为常数, $0 < \alpha \leq 1$, $\partial^\alpha u(x,t)/\partial t^\alpha$ 为 Caputo 时间分数阶导数, 其定义为

$$\frac{\partial^\beta f(t)}{\partial t^\beta} = \begin{cases} \frac{d^n f(t)}{dt^n}, & \beta = n \in \mathbf{Z}, \\ \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\beta-1} \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} d\tau, & n-1 < \beta < n. \end{cases} \quad (2)$$

* 收稿日期: 2009-12-04; 修订日期: 2010-05-25

基金项目: 国家教育部高等学校博士点基金新教师基金资助项目(20070561040); 广东省自然科学基金资助项目(07300823)

作者简介: 黄凤辉(1974—),女,江西人,副教授,博士(E-mail: huangfh@scut.edu.cn);
郭柏灵,中国科学院院士,研究员,博士生导师(联系人, E-mail: gbl@mail.iapcm.ac.cn).

该时间分数阶微分方程含几种特殊情况:时间分数阶扩散方程、时间分数阶反应-扩散方程、时间分数阶对流-扩散方程以及它们各自相对应的整数阶偏微分方程. 求解分数阶微分方程的基本解常采用的方法有 Laplace、Fourier 及 Mellin 变换等^[1-5], 另外也可采用分离变量和算子方法^[6]. 本文主要采用 Laplace、Fourier 及 Sine (Cosine) 变换.

当 $\nu \neq 0$ 时, 为了便于求解, 可先对方程进行适当变形. 令

$$u(x, t) = C(\xi, t) e^{\nu\xi/(2\sqrt{D})}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{D}}, \quad (3)$$

则方程(1)可变成

$$\frac{\partial^\alpha C(\xi, t)}{\partial t^\alpha} = -m^2 C(\xi, t) + \frac{\partial^2 C(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad (4)$$

其中 $m^2 = \nu^2/(4D) + \lambda^2$. 该方程属于方程(1) $\nu = 0, D = 1$ 的情形. 所以, 不失一般性, 对方程(1)的研究只需讨论 $\nu = 0$ 的情形, 即讨论如下方程:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = -\lambda^2 u(x, t) + D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (5)$$

下面讨论该方程的 Cauchy 问题(全平面上)和 Signaling 问题(半平面上)以及有限域上的初边值问题的解.

1 Cauchy 问题

先考虑方程(5)的 Cauchy 问题, 即令 $\Omega = (-\infty, +\infty)$, 并给定如下条件:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u(\pm\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

对方程(5)做关于时间和空间 Laplace-Fourier 变换, 并结合初始条件(6), 得

$$P^\alpha \hat{u}(k, p) - p^{\alpha-1} \hat{f}(k) = -\lambda^2 \hat{u}(k, p) - Dk^2 \hat{u}(k, p), \quad (8)$$

则得到解的 Laplace-Fourier 变换形式

$$\hat{u}(k, p) = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + Dk^2 + \lambda^2} \hat{f}(k). \quad (9)$$

为了求上式的 Laplace 逆变换, 先给出一个 Laplace 变换关系式

$$E_\alpha(ct^\alpha) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - c}, \quad \text{Re}(p) > |c|^{1/\alpha}, \quad (10)$$

其中, $c \in \mathbf{C}, E_\alpha$ 为 Mittag-Leffler 函数, 可由级数定义,

$$E_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbf{C}. \quad (11)$$

于是有

$$\hat{u}(k, t) = E_\alpha[-(Dk^2 + \lambda^2)t^\alpha] \hat{f}(k). \quad (12)$$

对上式再求其 Fourier 逆变换得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} E_\alpha[-(Dk^2 + \lambda^2)t^\alpha] \hat{f}(k) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} E_\alpha[-(Dk^2 + \lambda^2)t^\alpha] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iky} f(y) dy dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} E_\alpha[-(Dk^2 + \lambda^2)t^\alpha] dk \right) f(y) dy = \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_C^{(\alpha)}(x-y, t) f(y) dy, \tag{13}$$

其中

$$G_C^{(\alpha)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} E_\alpha[-(Dk^2 + \lambda^2)t^\alpha] dk, \tag{14}$$

称其为 Green 函数或方程的基本解(这里我们先假设该积分存在), 它实际上是对应到 $f(x) = \delta(x)$ (Dirac delta 函数) 时方程(5)的解, 并满足

$$\hat{G}_C^{(\alpha)}(k, t) = E_\alpha[-(Dk^2 + \lambda^2)t^\alpha] \tag{15}$$

及

$$\hat{\tilde{G}}_C^{(\alpha)}(k, p) = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + (Dk^2 + \lambda^2)}. \tag{16}$$

下面求 $G_C^{(\alpha)}(x, t)$ 的具体表达形式, 同时证明积分(14)的存在性及基本解的非负性.

先讨论 $\alpha = 1$ 的特殊情形(对应为经典的反应-扩散方程). 由式(15)得

$$\hat{G}_C^{(1)}(k, t) = E_1[-(Dk^2 + \lambda^2)t] = e^{-(Dk^2 + \lambda^2)t} = e^{-Dk^2 t} e^{-\lambda^2 t}. \tag{17}$$

根据 Fourier 变换关系

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-1/2} e^{-x^2/(4u)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-uk^2}, \tag{18}$$

则可得 Green 函数的表达形式

$$G_C^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (Dt)^{-1/2} e^{-x^2/(4Dt)} e^{-\lambda^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} e^{-x^2/(4Dt) - \lambda^2 t}. \tag{19}$$

再对一般的 $0 < \alpha < 1$ 的情形进行讨论. Green 函数的 Laplace-Fourier 变换式(16)可以变形写成积分的形式:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{G}}_C^{(\alpha)}(k, p) &= p^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-u[p^\alpha + (Dk^2 + \lambda^2)]} du = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u(Dk^2 + \lambda^2)} (p^{\alpha-1} e^{-up^\alpha}) du = \\ &= \int_0^{+\infty} \hat{G}_C^{(1)}(k, u) \tilde{G}_{2\alpha}(u, p) du, \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\tilde{G}_{2\alpha}(x, p) = p^{\alpha-1} e^{-|x|p^\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}, \operatorname{Re}(p) > 0, \tag{21}$$

其解为

$$G_{2\alpha}(x, t) = t^{-\alpha} M_\alpha(|x|/t^\alpha), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0, \tag{22}$$

这里 M_α 是所谓的 α 阶的 M 函数(Wright 型), 定义为^[1-2,4]

$$M_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma[-\alpha n + (1-\alpha)]}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{23}$$

对式(20)求 Laplac-Fourier 逆变换得

$$\begin{aligned} G_C^{(\alpha)}(x, t) &= \int_0^{+\infty} G_C^{(1)}(x, u) G_{2\alpha}(u, t) du = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Du}} e^{-x^2/(4Du) - \lambda^2 u} t^{-\alpha} M_\alpha(u/t^\alpha) du = \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/(4Du) - \lambda^2 u} u^{-1/2} M_\alpha(u/t^\alpha) du = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt^\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/(4Dt^\alpha) - \lambda^2 \theta t^\alpha} \theta^{-1/2} M_\alpha(\theta) d\theta \quad (u = \theta t^\alpha). \quad (24)$$

由 $G_C^{(1)}$ 及 $G_{2\alpha}$ 的非负性可以保证 Green 函数 $G_C^{(\alpha)}$ 的非负性.

特别地,当 $\lambda = 0$ 时,方程退化为时间分数阶扩散方程,其基本解可化简为

$$G_C^{(\alpha)}(x, t) = \frac{t^{-\alpha}}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/(4Du)} u^{-1/2} M_\alpha(u/t^\alpha) du = \frac{1}{2\sqrt{Dt^\alpha}} M_{\alpha/2}\left(\frac{|x|}{\sqrt{Dt^\alpha}}\right), \quad (25)$$

该结论与文献[3-4]的 Green 函数的表达式一致.

另外,根据 Fourier 变换关系式

$$e^{-cl|x|} \longleftrightarrow \frac{2c}{c^2 + k^2}, \quad (26)$$

可以求式(16)的 Fourier 逆变换,于是得到 Green 函数 $G_C^{(\alpha)}$ 关于时间的 Laplace 变换

$$\tilde{G}_C^{(\alpha)}(x, p) = \frac{p^{\alpha-1}}{2\sqrt{D(p^\alpha + \lambda^2)}} e^{-\sqrt{(p^\alpha + \lambda^2)/D}|x|}. \quad (27)$$

2 Signaling 问题

考虑方程(5)的 Signaling 问题,即令 $\Omega = (0, +\infty)$, 并给定如下条件:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad u(+\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (29)$$

对方程(5)及边值条件(29)的时间变量做 Laplace 变换,并结合初始条件(28),得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, p)}{\partial x^2} = \frac{p^\alpha + \lambda^2}{D} \tilde{u}(x, p), \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{g}(p), \quad \tilde{u}(+\infty, p) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

其解为

$$\tilde{u}(x, p) = \tilde{g}(p) e^{-\sqrt{(p^\alpha + \lambda^2)/D}x} = \mathcal{L}\{G_S^{(\alpha)}(x, t) * g(t)\}, \quad (31)$$

其中 $G_S^{(\alpha)}(x, t)$ 为 Signaling 问题的 Green 函数(基本解),由其 Laplace 变换式所定义:

$$\tilde{G}_S^{(\alpha)}(x, p) = e^{-\sqrt{(p^\alpha + \lambda^2)/D}x}. \quad (32)$$

通过对方程(31)做 Laplace 逆变换得方程解

$$u(x, t) = G_S^{(\alpha)}(x, t) * g(t) = \int_0^t G_S^{(\alpha)}(x, t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

对照 Green 函数 $G_S^{(\alpha)}$ 与 $G_C^{(\alpha)}$ 的 Laplace 变换式(32)、(27)可得如下关系式:

$$\frac{\partial}{\partial p} \tilde{G}_S^{(\alpha)}(x, p) = -\alpha x \tilde{G}_C^{(\alpha)}(x, p), \quad x > 0. \quad (33)$$

回到时间域上,则其关系为

$$t G_S^{(\alpha)}(x, t) = \alpha x G_C^{(\alpha)}(x, t), \quad x, t > 0. \quad (34)$$

于是有

$$G_S^{(\alpha)}(x, t) = \frac{\alpha x}{2\sqrt{\pi Dt^{\alpha+2}}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/(4Dt^\alpha) - \lambda^2 \theta t^\alpha} \theta^{-1/2} M_\alpha(\theta) d\theta, \quad x, t > 0. \quad (35)$$

且有 $G_S^{(\alpha)}(x, t) \geq 0, \quad \forall x, t > 0.$

特别地,当 $\lambda = 0$ 时,方程退化为时间分数阶扩散方程,其基本解可化简为

$$G_S^{(\alpha)}(x, t) = \frac{\alpha x}{2\sqrt{Dt^{\alpha+2}}} M_{\alpha/2}\left(\frac{x}{\sqrt{Dt^\alpha}}\right), \quad x, t > 0. \quad (36)$$

该结论也与文献[3-4]的 Green 函数的表达式一致.

3 有限域上的初边值问题

最后,考虑方程(5)在有限域上的初边值问题. 这里,设 $\Omega = (0, L)$, 并分别讨论具有 Dirichle 边界条件和 Neumann 边界条件的初边值问题.

3.1 带 Dirichle 边界条件的初边值问题

首先考虑方程(5)带 Dirichle 边界条件的问题,即给定如下初边值条件:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{37}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{38}$$

这里假设解满足齐次 Dirichle 边值条件,对于非齐次的 Dirichle 边值条件则可以通过变量替换将边界条件齐次化.

为了求方程的解,我们采用文献[7]中的技巧. 先对方程(5)做 Sine 变换,得

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}(n, t)}{\partial t^\alpha} = -\lambda^2 \bar{u}(n, t) - D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \bar{u}(n, t), \quad t > 0, \tag{39}$$

其中
$$\bar{u}(n, t) = \int_0^L u(y, t) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

为函数 $u(x, t)$ 的 Sine 变换. 再对式(39)做 t 的 Laplace 变换可得

$$\tilde{\bar{u}}(n, p) = \frac{p^{\alpha-1} \bar{u}(n, 0)}{p^\alpha + \lambda^2 + D(n\pi/L)^2}, \tag{40}$$

其中
$$\bar{u}(n, 0) = \int_0^L u(y, 0) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

由 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换关系式

$$\frac{p^{\alpha-1} \bar{u}(n, 0)}{p^\alpha + \lambda^2 + D(n\pi/L)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E_\alpha \left[-\left(\lambda^2 + D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) t^\alpha \right] \bar{u}(n, 0)$$

及 Sine 的逆变换可得

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} E_\alpha \left[-\left(\lambda^2 + D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) t^\alpha \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy. \tag{41}$$

3.2 带 Neumann 边界条件的初边值问题

考虑方程(5)带如下 Neumann 边界条件的初边值问题,即给定如下初边值条件:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{42}$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{43}$$

同样,这里假设解满足齐次 Neumann 边值条件,对于非齐次的 Neumann 边值条件则可以通过变量替换将边界条件齐次化.

类似上面的技巧,对方程(5)关于空间变量 x 做有限的 Cosine 变换、时间变量 t 做 Laplace 变换,得

$$\tilde{\hat{u}}(n, p) = \frac{p^{\alpha-1} \hat{u}(n, 0)}{p^\alpha + \lambda^2 + D(n\pi/L)^2}, \tag{44}$$

其中

$$\hat{u}(n, t) = \int_0^L u(y, t) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

为函数 $u(x, t)$ 的 Cosine 变换, 且

$$\hat{u}(n, 0) = \int_0^L u(y, 0) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

再对方程(44)求 Laplace 和 Cosine 逆变换可得方程的解

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha} \left[- \left(\lambda^2 + D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) t^{\alpha} \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy. \quad (45)$$

注 由 Mittag-Leffler 函数 $E_{\alpha}(-z)$ ($0 < \alpha \leq 1, 0 < z < \infty$) 的完全单调性^[8] 及 Cauchy 收敛准则, 可推出上面两个解的无穷级数形式(41)和(45)的收敛性.

3.3 数值例子

下面, 我们通过两个数值例子来验证方法的有效性. 在以下的数值计算中, 我们对于无穷级数截取前 10 项 (即 $n = 10$) 进行近似计算.

例 1 带齐次 Dirichlet 边界条件的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial t^{\alpha}} = -\lambda^2 u(x, t) + D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (46)$$

设 $D = 1, L = \pi / \sqrt{1 - \lambda^2}, f(x) = \sin(\sqrt{1 - \lambda^2} x)$, 方程存在精确解为

$$u(x, t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \sin(\sqrt{1 - \lambda^2} x).$$

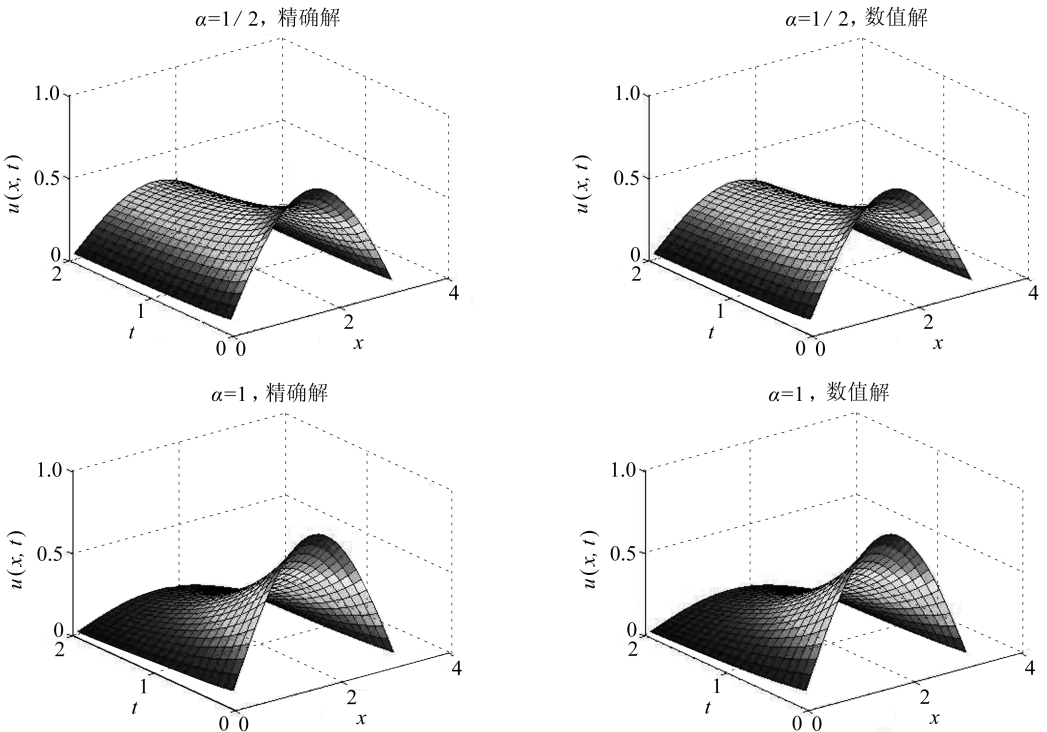
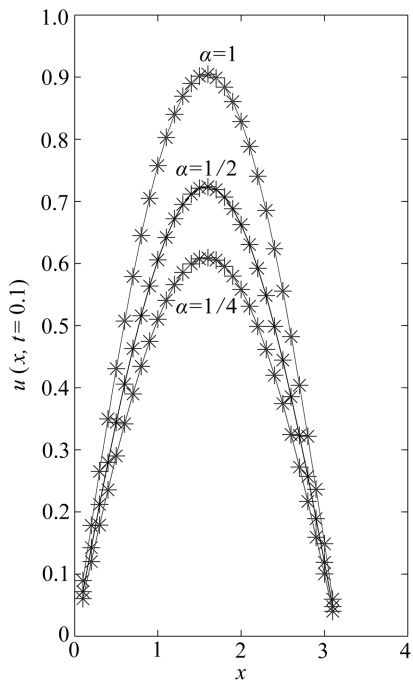
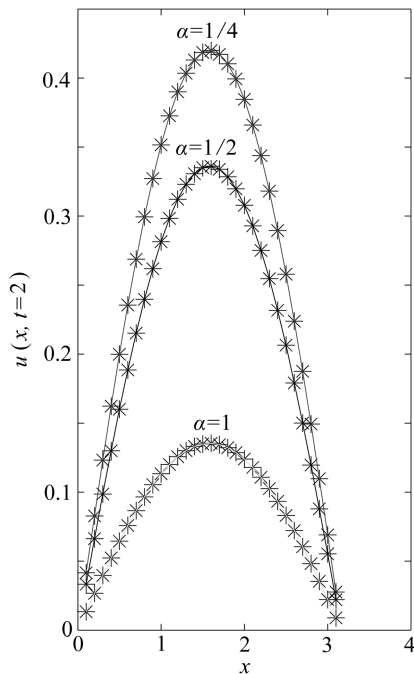


图 1 $\lambda = 1/8$ 时精确解与数值解的对照

图 1 给出的是 $\lambda = 1/8$ 时的精确解和数值解可视化图形, 对照左右图可以看出数值解与精确解的形态吻合: 关于空间变量成正弦函数形态. 另外, 从图中可以看出解由初始状态随着时



(a) $t = 0.1$



(b) $t = 2$

图2 $\lambda = 1/8$ 时 α 不同取值下,在 $t = 0.1$ 和 $t = 2$ 时数值解与精确解的比较 (曲线为精确解, * 表示数值解)

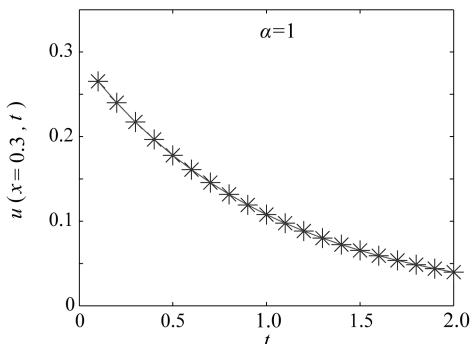
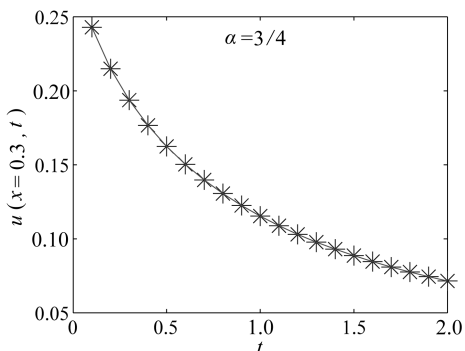
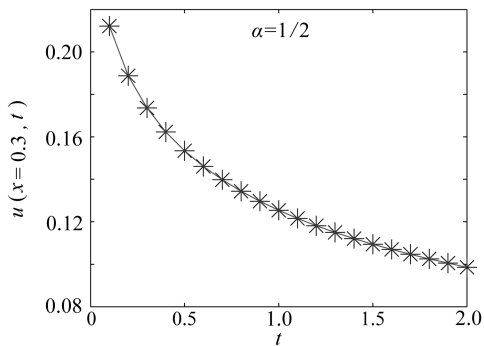
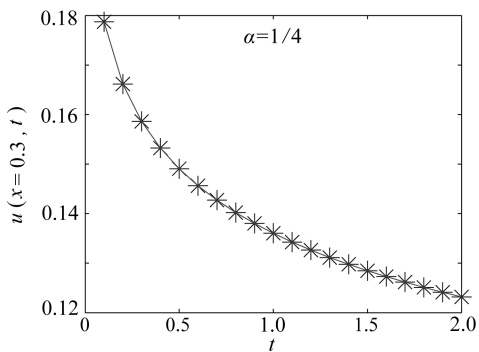


图3 $\lambda = 1/8$ 时 α 不同取值下,在 $x = 0.3$ 时数值解与精确解的比较 (曲线为精确解, * 表示数值解)

间衰减,并且由上下图形比较可知,刚开始上图衰减得快些,但是随着时间大一点,情形马上相反,即下图函数衰减更快.这是因为:对于级数(41)中的函数 $E_{1/2}(-t^{1/2})$ 和 $E_1(-t)$,当 $0 < t < 0.77$ 时,前者比后者衰减得更快,而当 $t > 0.77$ 时,情形则刚好相反.

图 2 给出的是在 $t = 0.1$ 和 $t = 2$ 时刻,不同 α 取值下,解作为空间变量函数时数值解与精确解的比较,这里,取 $\lambda = 1/8$.从图中可以看出数值解与精确解均较好地吻合.另外,从图 2 (a)和图 2(b)的比较可知,当 t 较小时,解函数值随着 α 的增大而增大,当 t 大一点时,解函数值随着 α 的增大而减小.这也是由解中的函数 $E_\alpha(-t^\alpha)$ 的性质决定.

图 3 给出的是在 $\lambda = 1/8, x = 0.3$ 时,不同 α 取值下,解作为时间变量函数时数值解与精确解的比较,从图中可以看出数值解与精确解较好地吻合,且关于时间 t 衰减,这与解中的函数 $E_\alpha(-t^\alpha)$ 的衰减性相吻合.

表 1 则给出参数 α, λ 不同取值下数值解与精确解的最大误差.从表中可以看出各种情形下该方法的高效性.

表 1 参数不同取值下数值解的最大误差

| α | λ | | | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | 0 | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 3/4 |
| 1/4 | 1.216 5E-011 | 2.433 4E-006 | 3.141 7E-006 | 3.233 6E-006 | 2.002 5E-006 |
| 1/2 | 1.621 6E-011 | 2.909 6E-006 | 3.759 0E-006 | 3.838 8E-006 | 2.377 5E-006 |
| 3/4 | 2.228 4E-011 | 3.188 7E-006 | 4.111 5E-006 | 4.394 0E-006 | 2.721 7E-006 |
| 1 | 3.592 9E-011 | 2.972 6E-006 | 3.888 5E-006 | 4.802 9E-006 | 2.976 6E-006 |

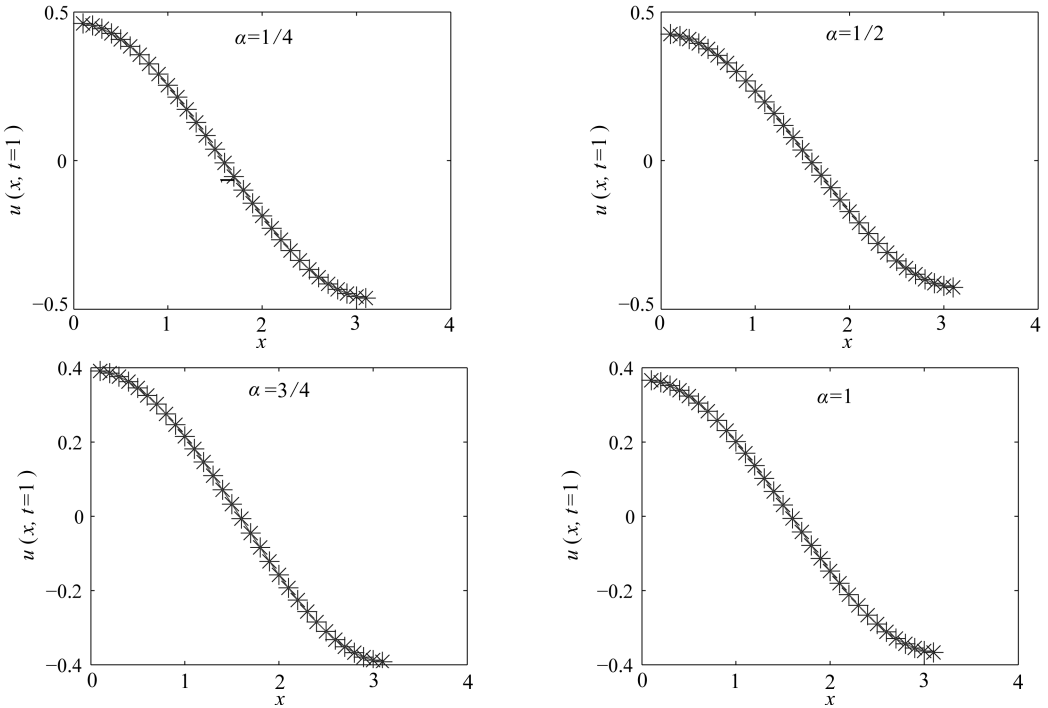


图 4 $\lambda = 1/8$ 时 α 不同取值下,在 $t = 1$ 时数值解与精确解的比较 (曲线为精确解,*表示数值解)

例 2 带齐次 Neumann 边界条件的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = -\lambda^2 u(x,t) + D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0, L), \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (47)$$

设 $D = 1, L = \pi / \sqrt{1 - \lambda^2}, f(x) = \cos(\sqrt{1 - \lambda^2} x)$, 方程存在精确解为

$$u(x,t) = E_\alpha(-t^\alpha) \cos(\sqrt{1 - \lambda^2} x).$$

表 2 参数不同取值下数值解的最大误差

| α | λ | | | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | 0 | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 3/4 |
| 1/4 | 1.209 0E-011 | 6.594 0E-006 | 9.129 6E-006 | 1.296 5E-005 | 1.062 0E-005 |
| 1/2 | 1.611 9E-011 | 8.351 2E-006 | 1.157 8E-005 | 1.645 1E-005 | 1.357 1E-005 |
| 3/4 | 2.206 1E-011 | 1.017 9E-005 | 1.405 5E-005 | 2.002 5E-005 | 1.671 9E-005 |
| 1 | 3.518 4E-011 | 1.206 1E-005 | 1.643 1E-005 | 2.342 1E-005 | 2.003 2E-005 |

数值结果如图 4 和图 5 及表 2 所示,我们可以得出与例 1 类似的结论,从中可以看出方法的有效性。

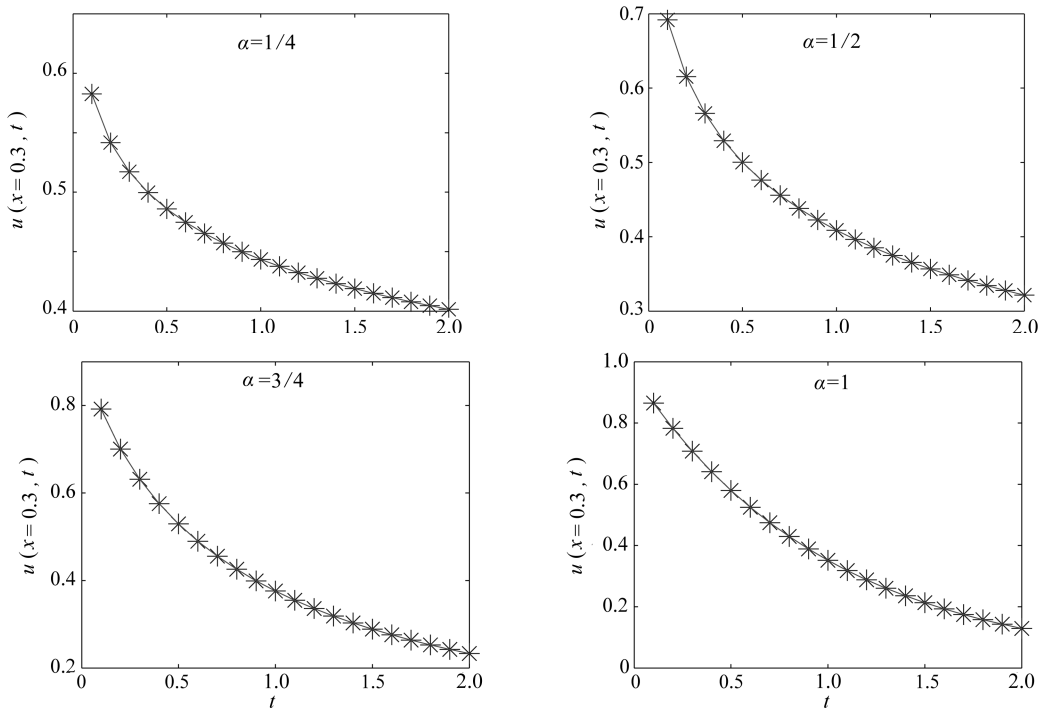


图 5 $\lambda = 1/8$ 时 α 不同取值下,在 $x = 0.3$ 时数值解与精确解的比较 (曲线为精确解, * 表示数值解)

4 结 论

通过 Laplace-Fourier 变换,导出了一类时间分数阶偏微分方程无穷区域上的 Cauchy 问题和 Signaling 问题的基本解.另外,用 Sine-Laplace 或 Cosine-Laplace 变换,分别导出了有限区间上带 Dirichlet 和 Neumann 边界条件的分数阶微分方程的解析解,此解由 Mittag-Leffler 函数的

级数形式表示,且级数收敛.因此,我们可以通过无穷级数的截取计算来获得其近似解,最后用数值算例验证了该方法的有效性.这类时间微分方程的解也可看作是相应整数阶偏微分方程的解在分数阶情况下的延拓推广.

致谢 感谢华南理工大学中央高校基本科研业务费专项资金(2009ZM0050)的资助.

参考文献:

- [1] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [2] Gorenflo R, Luchko Y, Mainardi F. Wright function as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation[J]. *J Comp Appl Math*, 2000, **118**(1/2): 175-191.
- [3] Mainardi F, Paradisi P, Gorenflo R. Probability distributions generated by fractional diffusion equations[C]//Kertesz J, Kondor I. *Econophysics: an Emerging Science*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [4] Mainardi F, Luchko Y, Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2001, **4**(2):153-192.
- [5] Wyss W. The fractional diffusion equation[J]. *J Math Phys*, 1986, **27**(11):2782-2785.
- [6] Chen J, Liu F, Anh V. Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **338**(2):1364-1377.
- [7] Agrawal O P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, **29**(1/4):145-155.
- [8] Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order[C]//Carpinteri A, Mainardi F. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. New York: Springer,1997: 223-276.

General Solution for a Class of Time Fractional Partial Differential Equation

HUANG Feng-hui¹, GUO Bo-ling²

(1. *Department of Mathematics, School of Sciences, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P. R. China;*

2. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, P. R. China*)

Abstract: A class of time fractional partial differential equation, including time fractional diffusion equation, time fractional reaction-diffusion equation, time fractional advection-diffusion equation and their corresponding integer-order partial differential equations, was considered. The fundamental solutions for the Cauchy problem in a whole-space domain and signaling problem in a half-space domain were obtained by using Fourier-Laplace transforms and their inverse transforms. The appropriate structures for the Green functions were provided. On the other hand, the solutions in the form of a series for the initial and boundary value problems in a bounded-space domain were derived by the Sine-Laplace or Cosine-Laplace transforms. Two examples were presented to show the application of the present technique.

Key words: fractional differential equation; Caputo fractional derivative; Green function; Laplace transform; Fourier transform; Sine(Cosine) transform