

下部有常热通量加热作用时非均匀 温度梯度和磁场对 Marangoni 对流作用的影响*

S·P·M·艾沙¹, N·M·阿里芬¹, R·纳扎尔², M·N·萨阿德¹

(1. 马来西亚博特拉大学 数学研究所,43400 UPM 沙登,雪兰莪,马来西亚;

2. 马来西亚国民大学 数学科学学院,43600 UKM 班吉,雪兰莪,马来西亚)

(林建忠推荐)

摘要: 在一个水平流体层中,下部加热和上部致冷,热通量为常数时,研究磁场和非均匀温度梯度对 Marangoni 对流作用的影响.对线性稳定分析进行了详细的研究.分析了各种参数对对流作用的影响.考虑了6种基本的温度分布曲线,给出了造成失稳影响的一些普遍结论.

关键词: Marangoni 对流; 非均匀温度; 磁场; Galerkin 法; 摄动解

中图分类号: O357 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.001

引 言

Marangoni 对流问题,在相关工程上的应用,如熔化后晶体的生长^[1]、不均匀温度场中液滴的迁移^[2]和火焰覆盖的液体燃料池^[3]等,使其成为很多研究的课题. Pearson^[4]最早开始了 Marangoni 对流作用的研究,分析中假定自由表面不可变形,振幅又无穷小,他考虑了两种情况:所谓“导热”情况,即流体层刚性的下边界恒温,又不发生温度的扰动;所谓“绝热”情况,即下边界有一恒定的热通量,热通量没有扰动^[5].很多学者^[6-10]对他的分析作了研究.

适合上述文献的 Marangoni 对流,基本的温度梯度必须是均匀的. Vidal 和 Acrivos^[11], Debler 和 Wolf^[12], Nield^[13]研究了非均匀温度梯度对 Marangoni 对流作用的影响. Rudraiah^[14], Friedrich 和 Rudraiah^[15]考察了旋转又非均匀基本温度梯度对 Marangoni 对流的综合影响.他们指出了旋转会抑制对流.

Chandrasekhar^[16]就均匀的基本温度梯度,论述了磁场对稳定的浮力驱动对流作用的影响.他指出了磁场的作用可以提高 Rayleigh 数的临界值,从而对流体层起到稳定作用. Nield^[17]在自由表面不可变形的流体层中,最早分析了磁场对稳定的 Bénard-Marangoni 对流作用的影

* 收稿日期: 2009-07-03; 修订日期: 2010-01-11

基金项目: 马来西亚拿督阿理科与技术(MOSTI)科学研究基金资助项目

作者简介: N. M. Arifin, 副教授, 博士(联系人. Tel: +603-89466850; Fax: +603-89437958;

E-mail: norihan@math.upm.edu.my).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

响.他发现了,临界 Marangoni 数随竖向磁场强度的增加而单调地增加.水平流体层承受均匀基本温度梯度时,涉及磁场对稳定的 Marangoni 对流作用的影响,可在 Wilson^[18-20]的研究工作中找到. Rudraiah 等^[21]就水平流体层刚性下边界,承受没有扰动的恒温作用(“导热”)时,研究了非均匀温度梯度和磁场,对 Marangoni 对流的综合影响.利用单一条件 Galerkin 展开法,指出适当的非均匀温度梯度和磁场,对 Marangoni 对流起到了抑制作用. Rudraiah 等^[22]进一步研究了磁场和非均匀温度梯度,对 Bénard-Marangoni 对流的影响,分析了“导热”情况下的对流.随后,Char 和 Chen^[23]拓展了 Rudraiah 等^[22]的研究工作,考虑了自由表面是可以变形的,发现可变形自由上表面的卷曲,造成系统更不稳定.

在本文的研究中,利用线性稳定理论,水平流体层在外加均匀磁场和非均匀温度梯度(边界热通量为常数,又没有温度扰动,称为“导热”情况)作用时,对稳定 Marangoni 对流的作用作了重新的检验.与 Rudraiah 等^[21]类似,最终的特征值问题通过单一条件 Galerkin 展开法进行求解.

1 数学方程

考虑一个深度为 d 的水平流体层,其上表面自由,下表面受热作用,并满足竖直方向温度梯度为常数.流体层的下边界是刚性的、电和热都完全绝缘的,上边界是自由的.在该自由面上有一热通量为常数作用.该界面上有一表面张力 τ ,且假定 τ 为温度的线性函数:

$$\tau = \tau_0 - \gamma(T - T_0), \tag{1}$$

其中 τ_0 为温度 T_0 时的 τ 值,常数 γ 对大多数流体来说是正值.直角坐标系的两个水平的 x 轴和 y 轴,置于下固体边界面上, z 轴正方向指向自由表面.磁场 \mathbf{H} 作用在 z 方向.

速度 \mathbf{U} ,温度 T 和磁场 \mathbf{H} 有如下的基础状态解:

$$\mathbf{U} = 0, \mathbf{H} = H_0 \mathbf{k}, -\frac{d}{dT} \frac{dT_0}{dz} = f(z), \tag{2}$$

其中, \mathbf{k} 为 z 方向上的单位矢量, $f(z)$ 为无量纲的温度梯度,满足下列条件:

$$\int_0^1 f(z) dz = 1. \tag{3}$$

为了研究非均匀温度梯度对 Marangoni 对流的影响,选择了 6 种基本温度曲线,并作为模型 1~6 在表 1 中列出.

表 1 稳态温度梯度曲线参考表

模型	稳态温度梯度曲线	$f(z)$
1	线性函数	1
2	反抛物线函数	$2(1 - z)$
3	抛物线函数	$2z$
4	阶跃函数	$\delta(z - \epsilon)$, 其中 δ 为 Dirac delta-函数
5	分段函数(下部加热)	$\begin{cases} \epsilon^{-1}, & 0 \leq z < \epsilon, \\ 0, & \epsilon < z \leq 1. \end{cases}$
6	分段函数(上部冷却)	$\begin{cases} 0, & 0 \leq z < 1 - \epsilon, \\ \epsilon^{-1}, & 1 - \epsilon < z \leq 1, \end{cases}$

其中 ϵ 为与时间相关的热深度参数

基于 Boussinesq 近似,在有磁场作用时,一个不可压缩导电流体的控制方程可以表达如下:

连续方程

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (4)$$

动量方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{\mu}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}; \quad (5)$$

能量方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) T = \kappa \nabla^2 T; \quad (6)$$

磁场方程

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \eta \nabla^2 \mathbf{H}; \quad (8)$$

其中, $\mathbf{U}, T, \mathbf{H}, \rho, \nu, \kappa, \eta$ 分别表示速度、温度、磁场、密度、运动学粘度、热扩散系数、电阻率, $\Pi = p + \mu |\mathbf{H}|^2 / (8\pi)$ 为磁场力, 其中 p 为流体压力, μ 为磁导率. 一旦发生运动, 该流体层的上自由表面, 在 $z = d + f(x, y, t)$ 处, 将发生变形. 在自由表面上, 除了要满足法向应力和切向应力的连续性条件之外, 还要满足通常的运动学条件. 温度要符合 Newton 的冷却定律, $k \partial T / \partial \mathbf{n} = h(T - T_\infty)$, 其中 k 表示流体的热传导率, h 表示自由表面与空气之间的传热系数, \mathbf{n} 是垂直于自由表面的外单位向量. 下壁面 $z = 0$ 处的边界条件, 既无相对滑动, 又因绝热, 没有温度的扰动.

为了简化分析, 将控制方程和边界条件写为无量纲形式. 无量纲方程中, 长度、速度、时间和温度梯度的大小分别取为 $d, \kappa/d, d^2/\kappa$ 和 $\kappa / (a(\Delta T \kappa / (d\gamma\nu))^{1/2})$. 此外, 本问题中将要用到 3 个无量纲参数, Marangoni 数 $M = \gamma \Delta T d / (\rho_0 \kappa \nu)$, Prandtl 数 $Pr = \nu / \kappa$ 和 Chandrasekhar 数 $Q = \mu H d (\sigma / (\rho \nu))$.

2 线性化

为了在寻求摄动解时, 使基础状态解是线性稳定的, 设任意量 $\Phi(x, y, z, t)$, 有如下形式的标准式,

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_0(x, y, z) + \phi(z) \exp[i(\alpha_x x + \alpha_y y) + st], \quad (9)$$

其中, Φ_0 为基础状态解下的 Φ 值, $a = (\alpha_x^2 + \alpha_y^2)^{1/2}$ 为扰动总的水平波数, s 为复增长率, 实部表示不稳定增长率, 虚部表示其频率. 在临界稳定时, 摄动增长率 s 为 0, s 的实部 $\text{Re}(s) > 0$ 代表不稳定型, 而 $\text{Re}(s) < 0$ 代表稳定型. 将方程(9)代入方程(4)~(8), 并略去该摄动方程中二阶以及更高阶项, 相应的线性化方程仅与 z 有关, 分别得到温度 T 和 z 方向的速度分量 w 表示的扰动方程如下:

$$[(D^2 - a^2)^2 - QD^2]w = 0, \quad (10)$$

$$(D^2 - a^2)T + aM^{1/2}f(z)w = 0. \quad (11)$$

在上自由表面 $z = 1$ 上, 需满足

$$w = 0, \quad (12)$$

$$DT = 0, \quad (13)$$

$$D^2 w + aM^{1/2}T = 0; \quad (14)$$

在下刚性边界 $z = 0$ 上, 需满足

$$w = 0, \quad (15)$$

$$Dw = 0, \quad (16)$$

$$DT = 0, \quad (17)$$

算子 $D = d/dz$ 表示对坐标变量 z 的导数. 变量 w 表示 z 方向的速度在竖直方向的变化, T 表示温度.

3 求 解

利用单一条件的 Rayleigh-Ritz 法找出临界特征值. 将方程 (10) 乘以 w , 方程 (11) 乘以 T , 对所得到的方程从 $z = 0$ 到 $z = 1$ 进行分部积分, 并利用边界条件 (12) ~ (17), 取 $w = Aw_1$, $T = BT_1$, 其中 A 和 B 为常数, w_1 和 T_1 为试函数, 得到特征值方程:

$$M = - \frac{\langle (D^2 w_1)^2 + (2a^2 + Q)(Dw_1)^2 + a^4 w_1^2 \rangle \langle (DT_1)^2 + a^2 T_1^2 \rangle}{a^2 Dw_1(1)T_1(1) \langle w_1 f(z) T_1 \rangle}. \quad (18)$$

在方程 (18) 中, $\langle \dots \rangle$ 表示对 z 从 0 到 1 进行积分. 选择试函数

$$w_1 = z^2(1 - z), \quad T_1 = 1, \quad (19)$$

使它们除方程 (14)

$$D^2 w + a^2 MT = 0$$

之外, 所有边界条件 (12) ~ (17) 得到满足, 并同时满足但其残差包括在微分方程的残差之中. 将方程 (19) 代入方程 (18), 并进行积分, 得到

$$M = \frac{4}{35} \left(\frac{420 + a^4 + 28a^2 + 14Q}{f(z)} \right). \quad (20)$$

4 结果和讨论

为了研究磁场和非均匀温度梯度对 Marangoni 对流的影响, 当下边界承受规定的热流作

表 2 对 Chandrasekhar 数 Q 的各种数值, 得到的临界 Marangoni 数 M_c .

		Q	M_{c4}	M_{c6}	M_{c3}	M_{c5}	M_{c1}	M_{c2}
导热情况	Pearson ^[4] 的结果	0	-	-	-	-	79.6	-
		0	37.2	47.7	-	75.9	78.4	116.4
	Rudraiah 等 ^[21] 的结果	10^{-1}	37.3	47.8	-	76.1	78.6	116.6
		10^0	37.9	48.6	-	77.4	79.9	118.5
		10^1	44.0	56.4	-	89.8	92.7	137.6
		10^2	110.5	128.9	-	128.9	211.9	314.4
绝热情况	Pearson ^[4] 的结果	10^4	5 526.1	6 704.8	-	10 673.1	11 021.9	16 355.1
		0	-	-	-	-	48.0	-
	Nield ^[13] 的结果	0	-	-	40.0	-	48.0	60.0
		0	27.0	34.8	40.0	45.6	48.0	60.0
		10^{-1}	27.1	34.9	40.1	45.7	48.6	60.2
		10^0	27.9	35.9	41.1	47.1	49.6	62.0
本文结果	10^1	36.0	46.4	53.3	60.7	64.0	80.0	
	10^2	117.0	150.8	173.3	197.4	208.0	260.0	
		10^4	9 027.0	11 632.3	13 373.3	15 233.1	16 048.0	20 060.0

用时(包括“绝热”情况),表2给出了它们的数值结果.同时表2还给出了早期研究者的研究结果:Pearson^[4]和Rudraiah等^[21]针对“导热”情况,Pearson^[4]和Nield^[13]针对“绝热”情况.由表2可以看出,对于 $Q=0$,本文的结果与Pearson^[4]和Nield^[13]的结果是很一致的.比较表2中本文的临界Marangoni数可以知道,阶跃函数(模型4)是最不稳定的基本温度分布曲线,因为温度的跳跃就发生在自由表面附近;反抛物线函数(模型2)是最稳定的温度分布曲线.还可以看到,对于临界Marangoni数,这6个模型有以下不等式成立:

$$M_{c4} < M_{c6} < M_{c3} < M_{c5} < M_{c1} < M_{c2}.$$

由表2可以清楚地看出,对于Chandrasekhar数的各种数值,每一种温度曲线的临界波数保持不变.磁场的存在并不影响临界波数的值.表2和图1给出了外加磁场的影响结果.由表2可以看出,临界Marangoni数随着Chandrasekhar数 Q 的增加而增加,这是因为均匀磁场对Marangoni对流有着抑制作用.图1也给出了磁场强度的增加对Marangoni对流的影响.

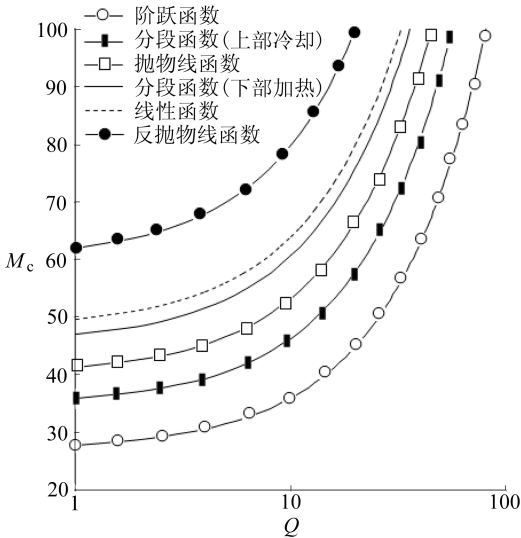


图1 临界Marangoni数 M_c 随Chandrasekhar数 Q 的变化

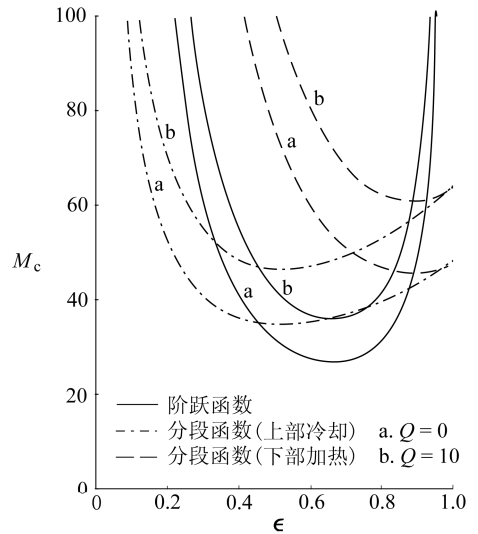


图2 对于不同的 Q 值,临界Marangoni数 M_c 随热深度的变化

图2给出了对于不同的热深度所计算出的临界Marangoni数.临界Marangoni数先是减小,达到某个最小值之后,又随着 ϵ 的增加而增加.对于阶跃函数,得到临界热深度 $\epsilon_c = 0.667$.对于分段线性函数(上部致冷),得到临界热深度 $\epsilon_c = 0.538$.对于分段线性函数(下部加热),得到临界热深度 $\epsilon_c = 0.889$.由图2还可以看出,对于不同的Chandrasekhar数,阶跃函数曲线、分段线性曲线(上部致冷)和分段线性曲线(下部加热)的临界热深度值是一样的.磁场的存在,并不影响这3种温度梯度曲线的临界热深度值.另外可以看出,最高的临界热深度出现在分段线性函数温度曲线(下部加热)上.

5 结 论

在一个流体层或一个没有温度扰动的常热通量边界中,研究非均匀的基本温度梯度曲线和磁场对Marangoni对流作用的影响.单一条件Galerkin法是确定该问题的一种好方法.我们发现,阶跃函数是最不稳定的基本温度分布曲线,因为温度的跳跃就发生在自由表面附近;反抛物线函数是最稳定的温度分布曲线.临界Marangoni数随着Chandrasekhar数的增加而增加.

可以得到结论:当有外加磁场作用时,热毛细管力所引起对流的增强作用受到了抑制。

参考文献:

- [1] Schwabe D. Marangoni effects in crystal growth melts[J]. *PCH Physicochem Hydrodyn*, 1981, **2**(4): 263-280.
- [2] Subramanian R S. Slow migration of a gas bubble in a thermal gradient[J]. *AIChE J*, 1981, **27**(4): 646-654.
- [3] Sirignano W A. A critical discussion of theories of flame spread across solid and liquid fuels [J]. *Comb Sci Tech*, 1972, **6**: 95-105.
- [4] Pearson J R A. On convection cells induced by surface tension[J]. *J Fluid Mech*, 1958, **4**(5): 489-500.
- [5] Arifin N M, Hashim I. Growth rates of Bénard-Marangoni convection in a fluid layer in the presence of a magnetic field[J]. *Microgravity Sci Technol*, 2004, **15**(1): 22-27.
- [6] Scriven C, Sterling C V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity[J]. *J Fluid Mech*, 1964, **19**(3): 321-340.
- [7] Smith K A. On convective instability induced by surface-tension gradients[J]. *J Fluid Mech*, 1966, **24**(2): 401-414.
- [8] Takashima M. Nature of the neutral state in convective instability induced by surface tension and buoyancy[J]. *J Phys Soc Japan*, 1970, **28**(3): 810-815.
- [9] Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface—I: steady convection[J]. *J Phys Soc Japan*, 1981, **50**(8): 2745-2750.
- [10] Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface—II: overstability[J]. *J Phys Soc Japan*, 1981, **50**(8): 2751-2756.
- [11] Vidal A, Acrivos A. Nature of the neutral state in surface-tension driven convection[J]. *Phys Fluids*, 1966, **9**(3): 615-616.
- [12] Deblor W R, Wolf L F. The effects of gravity and surface tension gradients on cellular convection in fluid layers with parabolic temperature profiles[J]. *Trans Am Soc Mech Engrs, Series C, J Heat Tran*, 1970, **92**(3): 351-358.
- [13] Nield D A. The onset of transient convective instability[J]. *J Fluid Mech*, 1975, **71**(3): 441-454.
- [14] Rudraiah N. The onset of transient Marangoni convection in a liquid layer subjected to rotation about a vertical axis[J]. *Mater Sci Bull, Indian Acad Sci*, 1982, **4**(3): 297-316.
- [15] Friedrich R, Rudraiah N. Marangoni convection in a rotating fluid layer with non-uniform temperature gradient[J]. *Int J Heat Mass Tran*, 1984, **27**(3): 443-449.
- [16] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1961.
- [17] Nield D A. Surface tension and buoyancy effects in the cellular convection of an electrically conducting liquid in a magnetic field[J]. *Z Angew Math Phys*, 1966, **17**(1): 131-139.
- [18] Wilson S K. The effect of a uniform magnetic field on the onset of Marangoni convection in a layer of conducting fluid[J]. *Q J Mech Appl Math*, 1993, **46**(2): 211-248.
- [19] Wilson S K. The effect of a uniform magnetic field on the onset of steady Bénard-Marangoni convection in a layer of conducting[J]. *J Engng Math*, 1993, **27**(2): 161-188.
- [20] Wilson S K. The effect of a uniform magnetic field on the onset of steady Marangoni convection in a layer of conducting fluid with a prescribed heat flux at its lower boundary[J]. *Phys*

- Fluid*, 1994, **6**: 3591-3600.
- [21] Rudraiah N, Ramachandramurthy V, Chandna O P. Effects of magnetic field and non-uniform temperature gradient on Marangoni convection [J]. *Int J Heat Mass Tran*, 1985, **28** (8): 1621-1624.
- [22] Rudraiah N, Chandna O P, Garg M R. Effects of non-uniform temperature gradient on magneto-convection driven by surface tension and buoyancy [J]. *Ind J Tech*, 1986, **24**: 279-284.
- [23] Char M I, Chen C C. Effect of non-uniform temperature gradient on the onset of oscillatory Bénard-Marangoni convection of an electrically conducting liquid in a magnetic field [J]. *Int J Engng Sci*, 2003, **41**: 1711-1721.

Effect of Non-Uniform Temperature Gradient and Magnetic Field on Onset of Marangoni Convection Heated From Below by a Constant Heat Flux

S. P. M. Isa¹, N. M. Arifin¹, R. Nazar², M. N. Saad¹

(1. *Intitute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia;*

2. *School of Mathematical Sciences, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia*)

Abstract: The effect of magnetic field and a non-uniform temperature gradient on the Marangoni convection in a horizontal fluid layer, heated from below and cooled from above with a constant heat flux was investigated. A linear stability analysis was performed to undertake a detailed investigation. The influence of various parameters on the onset of convection was analyzed. Six non-uniform basic temperature profiles were considered and some general conclusions about their destabilizing effects were presented.

Key words: Marangoni convection; non-uniform temperature; magnetic field; Galerkin procedure; perturbed solutions