文章编号:1000-0887(2010)06-0756-09　　ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

含有非线性梯度项的退化抛物方程解的爆破率估计*

张正策，　王　彪

(西安交通大学 理学院,西安 710049)

(郭兴明推荐)

摘要：　利用尺度变换方法和抛物方程的正则性估计,证明了一类含有非线性梯度项的退化多孔介质方程解的爆破率,它是由扩散项和边界流相互作用决定的. 与以前有关的结论比较,有趣的发现是,次数不超过 2 的梯度项不会影响解的爆破率.

关　键　词：　退化抛物方程；　梯度；　爆破；　非线性边界流

中图分类号：　O175.26;O175.29;O29　　　**文献标志码**：　A

DOI：10.3879/j.issn.1000-0887.2010.06.013

引　　言

本文将考虑下列带有非线性梯度项的多孔介质方程：

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{m-1}{m}(u^m)_{xx} - (m-1)u^{m-p}|u_x|^p - \\ \qquad (m-1)u^{m-2}|u_x|^2, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ (u^m)_x(0,t) = 0,\ (u^m)_x(1,t) = mu^q(1,t), & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

其中参数 $q \geqslant m > 1$, $p < 2$, 以及 $u_0(x) > 1$ 是连续的并且满足兼容性条件.

注　我们注意到, $q \geqslant m > 1$ 这个限制条件是合理的,因为当 $q < m$ 时,一定存在全局解(参见文献[1]).

非线性抛物方程

$$u_t = \frac{m-1}{m}(u^m)_{xx} - (m-1)u^{m-p}|u_x|^p - (m-1)u^{m-2}|u_x|^2 \tag{2}$$

(其中 $m \neq 0$) 是一个对应于带有非线性对流扩散项物理问题的数学模型. 方程(2)的右端是对流项,在不饱和多孔介质理论中,对流项是代表重力作用的部分. 而且,当 $m = 2$ 时,方程(2)还是水纹学里面的 Boussinesq 方程,它还涉及到很多领域的石油技术和地下水的水纹.

---

* **收稿日期**：　2010-01-30; **修订日期**：　2010-04-19

基金项目：　国家自然科学基金青年资助项目(10701061)

作者简介：　张正策(1976—),男,河南邓州人,副教授,博士(联系人. Tel：+86-29-82663522；E-mail：zhangzc@mail.xjtu.edu.cn)；

王彪(E-mail:wang.biao@stu.xjtu.edu.cn).

在过去的几十年中,对不带对流项的多孔介质方程的研究已经很多(参见文献[2-10]),例如,在文献[2],Galaktionov 和 Levine 研究了下面的方程:

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x,t) \in (0,+\infty)\times(0,T), \\ -u_x^m(0,t) = u^q(0,t), & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,+\infty). \end{cases} \tag{3}$$

他们证明了,当 $0 < q \leqslant (m+1)/2$ 时,方程(3)的所有非负解都是全局的;而当 $q > (m+1)/2$ 时,方程的解会在有限时间内爆破。另外,他们还证明了,当 $(m+1)/2 < q \leqslant m+1$ 时,所有非负解将在有限时间爆破;当 $q > m+1$ 时,全局的非零非负解存在。但是,他们都没有研究爆破率估计。在文献[3]中,Quirós 和 Rossi 得到了下列方程的爆破率:

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx},\ v_t = (v^n)_{xx}, & (x,t) \in (0,+\infty)\times(0,T), \\ -(u^m)_x(0,t) = v^p(0,t), & \\ -(v^n)_x(0,t) = u^q(0,t), & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & x \in (0,+\infty), \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{2p+n+1}{(m+1)(n+1)-4pq},\ \beta_1 = \frac{p(m-1-2q)+m(n+1)}{(m+1)(n+1)-4pq},$$

$$\alpha_2 = \frac{2p+m+1}{(m+1)(n+1)-4pq},\ \beta_2 = \frac{q(n-1-2p)+n(m+1)}{(m+1)(n+1)-4pq}.$$

他们证明:当 $pq < (m+1)(n+1)/4$ 时,方程(4)的解是全局的;当 $pq > (m+1)(n+1)/4$ 时,它的解会在有限时间爆破。当 $pq > (m+1)(n+1)/4$,$\alpha_1+\beta_1 \leqslant 0$,或者 $\alpha_2+\beta_2 \leqslant 0$,方程(4)的每个正解都会在有限时间爆破;当 $\alpha_1+\beta_1 > 0$ 和 $\alpha_2+\beta_2 > 0$ 时,对于足够大的初值,方程(4)存在爆破解,而当初值很小的时候,它存在全局解。而且,他们还得到了 u 和 v 的爆破率,分别为 $O((T-t)^{-\alpha_1})$ 和 $O((T-t)^{-\alpha_2})$。

具有对流项的多孔介质方程则更为困难些,文献[11]里面列举了很多有待研究的公开问题。Andreu 等在文献[12]中,研究了下面具有对流项的方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m - \|\nabla u^\alpha\|^q + u^p, & (x,t) \in \Omega\times(0,+\infty), \\ u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

其中 Ω 是 $R^N(N \geqslant 1)$ 中的一个有界区域,$u_0(x) \geqslant 0$,$m \geqslant 1$,$\alpha > 0$,$p \geqslant 1$ 和 $q \geqslant 1$。可是,他们仅仅得到了全局弱解存在的条件。

在文献[13]中,Zheng 和 Liu 研究了具有对流项的多孔介质方程解的爆破条件:

$$\begin{cases} u_t = a_1\Delta u^{m_1} - b_1 u^{m_1-2}|\nabla u|^2 + u^{p_1}v^{q_1}, & (x,t) \in \Omega\times(0,T), \\ v_t = a_2\Delta v^{m_1} - b_2 v^{m_2-2}|\nabla v|^2 + v^{p_2}v^{q_2}, & (x,t) \in \Omega\times(0,T), \\ u(x,t) = v(x,t) = \varepsilon_0, & (x,t) \in \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\Omega \subset R^N$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,$p_1 > 0$,$q_1 > 0$,$p_2 > 0$,$q_2 > 0$,$\varepsilon_0 > 0$,$m_i > 0$,$a_i > 0$,$b_i > 0(i=1,2)$,$u_0(x)$,$v_0(x) \geqslant \gamma_0$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的光滑函数,并且在 $\partial\Omega$ 上具有兼容性。他们还得到了方程组(6)的解的爆破条件,但是他们没有研究解的爆破率。

而且,在文献[14]中,Zhou 和 Mu 研究了下面具有对流项的多孔介质方程:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{m-1}{m}(u^m)_{xx} - (m-1)u^{m-2}|u_x|^2, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ (u^m)_x(0,t) = 0,\ (u^m)_x(1,t) = mu^q(1,t), & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1], \end{cases} \tag{7}$$

其中 $q > m > 1$,$u_0(x) \geq 1$ 是连续的并且满足兼容性条件. 他们主要研究了解的爆破率,并且得到了多孔介质方程的对流项不影响解的爆破率的结论.

最近,很多数学工作者都在研究解的梯度爆破问题,例如,Souplet[11],Hu 和 Yin[15],Gao 和 Hu[16],Fila 和 Lieberman[17],Li 和 Souplet[18],Zhang 和 Hu[19-20]. 梯度爆破也即,在有限时间内,解的空间导数变成无界而解本身仍然有界. 我们指出,对于本文方程(1),梯度爆破是不会发生的. 我们在此强调一下,一般的非线性抛物方程(组)的全局解的存在性和解的爆破的结果已经引起相当大的关注,还有很多相关性的工作,涉及到更一般的拟线性算子和区域,有关的文章参见文献[20-24].

在本文中,我们研究当 $q \geq m > 1$ 和梯度项的次数 $p \leq 2$ 时更一般的情况,并且用尺度变换的方法和抛物方程的正则性估计来研究多孔介质方程解的爆破率,当 p 不超过 2 时,我们得到了与文献[14] 相同的爆破率. 对于 $p > 2$ 的情况,方程的解也会爆破,但是由于 Schauder 估计不再成立,我们不能再使用相同的方法得到解的爆破率. 为此,必须采用新的技巧,我们将在后继论文中讨论这种情况.

本文安排如下:在第 1 节,研究解的爆破条件和爆破率;最后,在附录中,给出了一个适用于带有非线性梯度项的一般退化抛物方程的爆破引理.

文中, C 在不同的地方,代表着依赖于参数 m,q,p 的不同正常数.

1 爆破条件和爆破率

在这节,将证明本文的 4 个主要定理.

定理 1.1 假设 u 是方程(1) 在[0,1] 上的解,当 $q > m > 1$, 方程(1)的每个解将在有限时间爆破.

定理 1.2 假设 u 是方程(1) 的解,在[0,1] 上,初值满足

$$\frac{m-1}{m}(u_0^m)_{xx} - (m-1)u_0^{m-p}|(u_0)_x|^p - (m-1)u_0^{m-2}|(u_0)_x|^2 \geq 0,$$

并且 u 在有限时间 T 爆破,那么

$$c(T-t)^{-1/(2q-m-1)} \leq \max_{x\in[0,1]} u(x,t) \leq C(T-t)^{-1/(2q-m-1)},$$

其中 $t \in (0,T)$,c,C 是大于 0 的常数.

定理 1.3 假设 u 是方程(1) 在[0,1] 上的解,当 $q = m > 1$,$p < 0$ 时,方程(1)的每个解将在有限时间爆破.

定理 1.4 假设 u 是方程(1) 的解,在[0,1] 上,初值满足

$$\frac{m-1}{m}(u_0^m)_{xx} - (m-1)u_0^{m-p}|(u_0)_x|^p - (m-1)u_0^{m-2}|(u_0)_x|^2 \geq 0,$$

并且 u 在有限时间 T 爆破,那么

$$c(T-t)^{-1/(m-1)} \leq \max_{x\in[0,1]} u(x,t) \leq C(T-t)^{-1/(m-1)},$$

其中 $t \in (0,T)$,c,C 是大于 0 的常数.

注 1.1 事实上,在定理 1.2 和定理 1.4 中,初值条件很容易得到满足. 例如, $u_0(x) = Ae^{Bx} + C$,其中常数 A,B 和 C 依赖于 p,m 和 q. 在流体力学中,该问题描述在研究不可压流体(如,水)经过多孔介质(如,海绵,土壤等)过滤或渗流时的力学行为. 对于指数形式的初值,我们假设不可压流关于介质具有几乎垂直(或水平)的速度,使得自由边界函数 $u(x,t)$ 在 $t = 0$ 时刻存在较大(或较小)的梯度,即变化率.

注 1.2 我们得到的方程(1)的爆破率是和文献[25-26]中没有对流项的爆破率是一致的. 也即,方程(1)的梯度项对爆破率没有贡献. 换句话说,对流项不足以影响边界流和扩散项的相互作用结果.

定理 1.1 和定理 1.3 的证明基于引理 2.1 的结果(参见附录),而定理 1.2 和定理 1.4 的证明是基于类似于文献[15,27-29]中抛物方程的正则性估计和尺度变换.

定理 1.1 的证明 我们做变换 $\eta = \ln u$ 并且把方程(1)转换成下列的形式:

$$\begin{cases} \eta_t = (e^{(m-1)\eta})_{xx} - (m-1)|\eta_x|^p e^{(m-1)\eta}, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ \eta_x(0,t) = 0,\ \eta_x(1,t) = e^{(q-m)\eta(1,t)}, & t \in (0,T), \\ \eta(x,0) = \eta_0(0) = \ln u_0(x), & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{8}$$

那么, $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = (m-1)|\eta_x|^p \geqslant 0$, $\lambda_3 = 1 > 0$, 它们满足引理 2.1 中第 1 个爆破条件(我们这里处理的是一维对称的情况),因此,方程(1)的解在有限时间爆破. □

定理 1.2 的证明 假设 η 是方程(8)的解,T 是有限爆破时间. 对于 $x \in [0,1]$, 由于

$$(e^{(m-1)\eta_0})_{xx} - (m-1)|(\eta_0)_x|^p e^{(m-1)\eta_0} \geqslant 0,$$

由极大值原理, $\eta_t \geqslant 0$, 那么

$$(e^{(m-1)\eta})_{xx} \geqslant (m-1)|\eta_x|^p e^{(m-1)\eta} \geqslant 0,$$

也即, $(e^{(m-1)\eta})_x$ 关于 x 是单调增的. 注意到 $\eta_x(0,t) = 0$,对于 $(x,t) \in [0,1]\times[0,T)$,我们有 $\eta_x(x,t) \geqslant 0$. 对任意的 $t > 0$,我们定义,对 $t^* \in (0,t)$,

$$M(t^*) = \eta(1,t^*) = \max_{x\in[0,1]} \eta(x,t^*), \tag{9}$$

对于 $(y,s) \in [-1/a,0]\times[-t^*/b,0]$,

$$\psi_{a,b}(y,s) = \exp\{(m-1)(\eta(ay+1,bs+t^*) - M(t^*))\}, \tag{10}$$

其中 a,b 是依赖于 m,q,M 的参数. 很容易看出,$e^{-(m-1)M(t^*)} \leqslant \psi_{a,b} \leqslant 1$,$\psi_{a,b}(0,0) = 1$,$\partial\psi_{a,b}/\partial s \geqslant 0$. 选择 $a = e^{(m-q)M}$,$b = e^{(1+m-2q)M}$, 经过简单计算易知,

$$\begin{cases} (\psi_{a,b})_s = (m-1)\psi_{a,b}(\psi_{a,b})_{yy} + (m-1)^2 e^{(2-p)(m-q)M}\psi_{a,b}^2, \\ \qquad\qquad (y,s) \in (-1/a,0)\times(-t^*/b,0), \\ (\psi_{a,b})_y(0,s) = (m-1)\psi_{a,b}^{(q-1)/(m-1)}(0,s),\ (\psi_{a,b})_y(-1/a,s) = 0, \\ \qquad\qquad s \in (-t^*/b,0). \end{cases} \tag{11}$$

我们指出,由于 $q > m > 1$,当 $t^* \to T$ 时,a 和 b 是趋于 0 的.

下面,我们断言存在正的常数 C_1,C_2 满足:

$$C_1 \leqslant \frac{\partial\psi_{a,b}}{\partial s}(0,0) \leqslant C_2, \qquad 当\ a,b\ 充分小. \tag{12}$$

式(12)的证明依赖于 $\{\psi_{a,b}\}$ 和 $\{(\psi_{a,b})_y\}$ 的一致有界性. 事实上,由方程(11)和 $0 \leqslant \psi_{a,b} \leqslant 1$, 我们很容易得到 $(\psi_{a,b})_y$ 是一致有界的, 而 $e^{(2-p)(m-q)M}\psi_{a,b}^2 (q > m,\ p < 2)$ 仍然是一致有界的. 由多孔介质型方程的有界解的结果(参见文献[30-31]),$\{\psi_{a,b}\}$ 在它们的共同区域上是等度连续的. 定义 $a_j = a(t_j^*)$,$b_j = b(t_j^*)$,当 $j \to +\infty$,$t_j^* \to T$. 如有必要我们可以取其子列,我们有在紧子集 $A = \{y \leqslant 0, s \leqslant 0\}$ 上,$\psi_{a,b} \to \psi$ 是一致的. 极限函数 ψ 是连续的而且 $\psi(0,0) = 1$. 因

此,对于任意的 $\varepsilon_0 \in (0,1)$,存在 $(0,0)$ 的邻域,定义成 $U \subset A$,满足在 U 上,$\psi > \varepsilon_0$,而且,在 $\overline{U}$ 上,对于充分大的 j,$\varepsilon_0/2 \leqslant \psi_{a_j b_j} \leqslant 1$. 由文献[32]中的 Schauder 估计,我们得到

$$\|\psi_{a_j b_j}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{U})} \leqslant C, \qquad \text{对于某个常数 } C > 0 \text{ 和 } 0 < \alpha < 1. \tag{13}$$

式(12)的第 2 个不等式得证.

下面用反证法来证明第 1 个不等式. 如果式(12)中的第 1 个不等式是不成立,那么,存在一个满足 $\partial\psi_{a,b}(0,0)/\partial s \to 0$ 的子列 $(a_j, b_j) \to (0,0)$. 重复上面的过程将会得到 $\psi_{a,b} \to \psi$,而且,在 $\{(y,s): \psi > 0\}$ 的紧子集上,式(13) 的估计仍然成立. 因此,我们得到,当 $\beta < \alpha$ 时,在 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 的意义下,$\psi_{a,b} \to \psi$,而且满足 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$,$\psi(0,0) = 1$,$\partial\psi/\partial s \geqslant 0$,那么 ψ 是下面方程的一个弱解:

$$\begin{cases} \psi_s = (m-1)\psi\psi_{yy} + (m-1)^2 e^{(2-p)(m-q)M}\psi^2, \\ \psi_y(0,s) = (m-1)\psi^{(q-1)/(m-1)}(0,s), \end{cases} \tag{14}$$

在区域 $\{y < 0\} \times (-\infty, 0]$ 上. 定义 $z = \psi_s$,在 $\{\psi > 0\}$ 集合上,我们得到

$$\begin{cases} z_s = (m-1)\psi z_{yy} + (m-1)z\psi_{yy} + 2(m-1)^2 e^{(2-p)(m-q)M}\psi z, \\ z_y(0,s) = (q-1)(\psi^{(q-m)/(m-1)}z)(0,s), \\ z(0,0) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

根据 Hopf 引理[7,33],$z \equiv 0$,也即,ψ 是独立于变量 s 的. 因此,$\psi = \psi(y)$ 且满足

$$\begin{cases} 0 = \psi_{yy} + (m-1)e^{(2-p)(m-q)M}\psi, \\ \psi_y(0) = m-1,\ \psi(0) = 1. \end{cases} \tag{16}$$

但是,问题(16)没有有界的弱解,这与 ψ 的有界性矛盾.

对于 ψ, 我们由式(12)得

$$C_1 \leqslant (m-1)e^{(1+m-2q)M}M_t(t^*) \leqslant C_2. \tag{17}$$

对式(17)从 t 到 T 积分,我们得到

$$\ln c(T-t)^{-1/(2q-m-1)} \leqslant \max_{x\in[0,1]} \eta(x,t) = M(t) \leqslant \ln C(T-t)^{-1/(2q-m-1)},$$

也即

$$c(T-t)^{-1/(2q-m-1)} \leqslant \max_{x\in[0,1]} u(x,t) \leqslant C(T-t)^{-1/(2q-m-1)},$$

其中

$$\begin{cases} c = (C_2(2q-m-1)/(m-1))^{-1/(2q-m-1)}, \\ C = (C_1(2q-m-1)/(m-1))^{-1/(2q-m-1)}. \end{cases} \qquad \square$$

定理 1.3 的证明 定理 1.3 的证明非常类似于定理 1.1 的证明,但是它们的证明也存在细微的差别. 我们做变换 $\eta = \ln u$ 并把方程(1)变成下面的形式:

$$\begin{cases} \eta_t = (e^{(m-1)\eta})_{xx} - (m-1)|\eta_x|^p e^{(m-1)\eta}, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ \eta_x(0,t) = 0,\ \eta_x(1,t) = e^{(q-m)\eta(1,t)}, & t \in (0,T), \\ \eta(x,0) = \eta_0(0) = \ln u_0(x), & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{18}$$

由引理 2.1 的结果(我们这里处理的是一维对称的情况),我们得到

$$\lambda_1 = 1 > 0,\ \lambda_2 = (m-1)|\eta_x|^p \geqslant 0,\ \lambda_3 = 1 > 0.$$

而且,当 $q = m > 1$,$p < 0$ 时,可以验证另一个爆破条件也满足. $\square$

定理 1.4 的证明 这个定理的证明非常类似与定理 1.2,如果我们重复几乎与定理 1.2 一样的过程,可以得到相同的爆破率的估计. $\square$

2 附录:爆破引理

在这节,将给出一个来自文献[1]的更一般的爆破引理.

引理 2.1 假设 u 是下列具有非线性边界条件的拟线性反应扩散方程的解:

$$\begin{cases} u_t = \lambda_1 \Delta e^{\tilde{m}u} - \lambda_2 e^{\tilde{q}u}, & \text{在 } \Omega \times (0,T) \text{ 中}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \lambda_3 e^{\tilde{p}u}, & \text{在 } \partial\Omega \times (0,T) \text{ 上}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 上}, \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_3, \tilde{m}, \tilde{q} > 0, \lambda_2, \tilde{p} \geqslant 0, \Omega \subset R^N$ 是一个边界 $\partial\Omega$ 光滑的有界区域,$u_0(x)$ 是一个大于 0 且满足兼容性条件的函数.

(i) 当 $\tilde{q} < 2\tilde{p} + \tilde{m}$ 时,那么方程(19)的解将在有限时间爆破.

(ii) 当 $\tilde{q} = 2\tilde{p} + \tilde{m}$ 且 $C\tilde{m}(\tilde{m} + \tilde{p})\lambda_1\lambda_3^2 > \lambda_2$ 时,$C > 0$ 是常数,那么方程的解将在有限时间爆破.

证明 为了证明这些结论,我们只需要找到方程(19)的一个合适下解 $\underline{u}$, 且这个下解在有限时间爆破.

(i) 首先引入一个函数 $h(x)$, 它满足

$$\begin{cases} \Delta h = \kappa = \dfrac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial n} = 1, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ L := \max\limits_{x\in\Omega} h(x),\ L_1 := \max\limits_{x\in\Omega} |\nabla h(x)|. \end{cases}$$

由极大值原理,我们知道 $h(x)$ 在某一点 $x_0 \in \partial\,\overline{\mathrm{co}}(\Omega) \cap \partial\Omega$ 达到它的极大值,其中 $\partial\,\overline{\mathrm{co}}(\Omega)$ 是具有闭凸外壳 Ω 的边界. 设,在 Ω 中,$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{n}(x_0)$ 和 $\mu(x) = (\boldsymbol{\gamma}\cdot x - \min_{x\in\Omega}\boldsymbol{\gamma}\cdot x)$. 那么 μ 在 $\overline{\Omega}$ 上是正的且在点 x_0 达到最大值.

构造

$$\underline{u}(x,t) = \varphi\left(\delta(t) + \frac{aL_1\mu(x) + h(x)}{aL_1 + 1}\right), \tag{20}$$

其中

$$\varphi'(s) = \lambda_3 e^{\tilde{p}\varphi(s)},\ \varphi(0) > s_0 > 0, \tag{21}$$

$$\delta'(t) = \frac{\tilde{m}(\tilde{m} + \tilde{p})\lambda_1\lambda_3 e^{(\tilde{m}+\tilde{p})\varphi(\delta(t))}}{(aL_1 + 1)^2},\ \delta(0) = 0, \tag{22}$$

且 $a > 2$ 是个常数.

很容易看到 φ 和 δ 是正的单调增的凸函数. 我们得到

$$\underline{u}(x,t) = \varphi\left(\delta(t) + \frac{aL_1\mu(x) + h(x)}{aL_1 + 1}\right) \geqslant \varphi(0) > s_0. \tag{23}$$

假设 $\underline{u}$ 是定义在某个时间段的,我们将会证明它是一个下解. 因为

$$\begin{aligned} &\underline{u}_t - \lambda_1 \Delta e^{\tilde{m}\underline{u}} + \lambda_2 e^{\tilde{q}\underline{u}} = \\ &\quad \lambda_3 e^{\tilde{p}\underline{u}}\delta'(t) - \nabla(\lambda_1 \tilde{m} e^{\tilde{m}\underline{u}} \nabla\underline{u}) + \lambda_2 e^{\tilde{q}\underline{u}} \leqslant \\ &\quad \lambda_3 e^{\tilde{p}\underline{u}}\left(\frac{\tilde{m}(\tilde{m} + \tilde{p})\lambda_1\lambda_3 e^{(\tilde{p}+\tilde{m})\underline{u}}}{(aL_1 + 1)^2} - \frac{\lambda_2 e^{(\tilde{q}-\tilde{p})\underline{u}}}{\lambda_3} - \frac{\kappa\lambda_1 \tilde{m} e^{\tilde{m}\underline{u}}}{aL_1 + 1} - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\tilde m(\tilde m+\tilde p)\lambda_1\lambda_3 e^{(\tilde p+\tilde m)\underline{u}}(a-1)^2L_1^2}{(aL_1+1)^2}+\left.\frac{\lambda_2 e^{\tilde q\underline{u}}}{\lambda_3 e^{\tilde p\underline{u}}}\right)\leqslant 0, \tag{24}$$

其中常数 $a>2,\lambda_1,\lambda_3,\tilde m,\tilde q>0,\lambda_2,\tilde p\geqslant 0$ 和 $L_1\geqslant 1$.

同时,在边界 $\partial\Omega$ 上,我们有

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial n}-\lambda_3 e^{\tilde p\underline{u}}=\lambda_3 e^{\tilde p\underline{u}}\frac{aL_1(\partial\mu/\partial n)+\partial h/\partial n}{aL_1+1}-\lambda_3 e^{\tilde p\underline{u}}\leqslant 0. \tag{25}$$

因为 $\underline{u}>s_0$. 由式(23) ~ (25) 知,$\underline{u}$ 为方程(19)的一个下解.

我们做变换 $s=\varphi(r)$, 得到

$$\int^\infty \mathrm{d}r\Big/\left(\frac{\tilde m(\tilde m+\tilde p)\lambda_1\lambda_3 e^{(\tilde p+\tilde m)\varphi(r)}}{(aL_1+1)^2}-\frac{\lambda_2 e^{(\tilde q-\tilde p)\varphi(r)}}{\lambda_3}\right)=$$

$$\int^\infty \mathrm{d}s\Big/\left(\frac{\tilde m(\tilde m+\tilde p)\lambda_1\lambda_3^2 e^{(2\tilde p+\tilde m)s}}{(aL_1+1)^2}-\lambda_2 e^{\tilde q s}\right)<\infty,$$

其中 $\tilde q<2\tilde p+\tilde m$. 那么 $\delta(t)$ 在有限时间爆破,下解 $\underline{u}$ 也在有限时间爆破.

现在来证明,对任意 $x\in\Omega$, $\underline{u}(x,t)$ 在某个时间段上有定义,并满足 $\underline{u}(x,0)\leqslant u_0(x)$. 设 $s^*=\min_{x\in\bar\Omega}u_0(x)$. 因为 $\max_{x\in\bar\Omega}\underline{u}(x,0)=\varphi((aL_1\mu(x_0)+h(x_0))/(aL_1+1))$ 和 φ,μ 与 δ 的连续性,只需证明,在 Ω 上,$\varphi((aL_1\mu(x_0)+h(x_0))/(aL_1+1))\leqslant s^*$.

在区间 (s,s^*) 上,我们定义 H 如下:

$$H(s)=\lambda_3 e^{\tilde p s},\qquad s\geqslant s^*,$$
$$H(s)\leqslant\lambda_3 e^{\tilde p s},\qquad s_0<s\leqslant s^*,$$
$$H(s_0)=\lambda_3 e^{\tilde p s_0}/2,$$

且满足

$$\frac{(\lambda_1\tilde m e^{\tilde m s}H'(s)+\lambda_1\tilde m^2 e^{\tilde m s}H(s))(a-1)^2L_1^2}{(aL_1+1)^2}-\frac{\lambda_2 e^{\tilde q s}}{H(s)}\geqslant$$
$$\frac{\tilde m(\tilde m+\tilde p)\lambda_1\lambda_3 e^{(\tilde p+\tilde m)s}(a-1)^2L_1^2}{(aL_1+1)^2}-\frac{\lambda_2 e^{\tilde q s}}{\lambda_3 e^{\tilde p s}}.$$

因为 $H(s_0)=\lambda_3 e^{\tilde p s_0}/2<\lambda_3 e^{\tilde p s_0}$, $H(s^*)=\lambda_3 e^{\tilde p s^*}$,这样的 $H(s)$ 是可以定义的.

现在设 $\varphi_1(s)$ 是

$$\varphi_1'(s)=H(\varphi_1'(s)),\ \varphi_1\left(\frac{aL_1\mu(x_0)+h(x_0)}{aL_1+1}\right)=s^*$$

的解.

由 $H(s_0)=\lambda_3 e^{\tilde p s_0}/2>0$ 可知,φ_1 是正的单调增的且满足 $\varphi_1(0)>s_0$. 事实上,s^* 是 φ_1 的最大值且满足 $\varphi_1(s^*)\leqslant\min_{x\in\bar\Omega}u_0(x)$,我们有 $\underline{u}(x,0)\leqslant\varphi_1(s^*)$,因此,$\underline{u}$ 可以适当地定义.

(ii) 这种情形下,(ii)的证明非常类似于(i),这里就省略了. □

参考文献:

[1] Song X F, Zheng S N. Multi-nonlinear interaction in quasilinear reaction-diffusion equation with nonlinear boundary flux[J]. *Math Comput Modelling*, 2004, **39**(2/3): 133-144.

[2] Galaktionov V A, Levine H A. On critical Fujita exponents for heat equtions with nonlinear flux conditions on the boundary[J]. *Israel J Math*, 1996, **94**(1): 125-146.

[3] Quirós F, Rossi J D. Blow-up sets and Fujita type curves for a degenerate parabolic system

with nonlinear boundary condition[J]. *Indiana Univ Math J*, 2001, **50**(1):629-654.

[4] Deng K, Levine H A. The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel[J]. *Math Anal Appl*, 2000, **243**(1): 85-106.

[5] Galaktionov V A, Vázquez J L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations[J]. *Discrete Contin Dyn Sys*, 2002, **8**(2): 399-433.

[6] Levine H A. The role of critical exponents in blow-up theorems[J]. *SIAM Rev*, 1990, **32**(2): 262-288.

[7] Pao C V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*[M]. New York, London: Plenum Press, 1992.

[8] Samarskii A A, Galaktionov V A, Kurdyumov S P, Mikhailov A P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1995.

[9] Vázquez J L. *The Porous Medium Equations: Mathmatical Theory*[M]. New York: Oxford Univ Press Inc, 2007.

[10] Wu Z Q, Zhao J N, Yin J X, Li H L. *Nonlinear Diffusion Equations*[M]. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co, 2001.

[11] Souplet P H. Recent results and open problems on parabolic equations with gradient nonlinearities[J]. *Electronic J Differ Equations*, 2001, **2001**(20): 1-19.

[12] Andreu F, Mazón J M, Simondon F, Toledo J. Global existence for a degenerate nonlinear diffusion problem with nonlinear gradient term and source[J]. *Math Annalen*, 1999, **314**(4): 703-728.

[13] Zheng S N, Liu B C. A nonlinear diffusion system with convection[J]. *Nonlinear Anal*, 2005, **63**(1): 123-135.

[14] Zhou J, Mu C L. Blow-up rate for a porous medium equation with convection[J]. *Global J Pure Appl Math*, 2007, **3**(1): 13-18.

[15] Hu B, Yin H M. The profile near blow-up time for solution for the heat equation with a nonlinear boundary conditions[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1994, **346**(1): 117-135.

[16] Guo J S, Hu B. Blow-up rate estimates for the heat equation with a nonlinear gradient source term[J]. *Discrete Contin Dyn Sys*, 2008, **20**(4): 927-937.

[17] Fila M, Lieberman G. Derivative blow-up and beyond for quasilinear parabolic equations[J]. *Differential Integral Equations*, 1994, **7**(3/4): 811-821.

[18] Li Y X, Souplet P H. Single-point gradient blow-up on the boundary for diffusive Hamilton-Jacobi equations in planar domains[J]. *Comm Math Phys*, 2010, **293**(2): 499-517.

[19] Zhang Z C, Hu B. Rate estimates of gradient blow-up for a heat equation with exponential nonlinearity[J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, **72**(12): 4594-4601.

[20] Zhang Z C, Hu B. Gradient blow-up rate for a semilinear parabolic equation[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2010, **26**(2): 767-779.

[21] 白占兵. 一类四阶 p-Laplace 方程正解的存在性及多解性[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(12):1324-1328.

[22] Zheng S N, Wang W. Blow-up rate for a nonlinear diffusion equation[J]. *Appl Math Lett*, 2006, **19**(12):1385-1389.

[23] 杨作东,陆启韶. 一类非牛顿渗流系统爆破界的估计[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(3): 287-294.

[24] 张正策,李开泰. 奇异扰动的 p-Laplace 方程非负非平凡解和正解的结构[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(8): 847-854.

[25] Jiang Z X, Zheng S N. Blow-up rate for a nonlinear diffusion equation with absorption and nonlinear boundary flux[J]. *Adv Math (China)*, 2004, **33**(5): 615-620.

[26] Jiang Z X, Zheng S N, Song X F. Blow-up analysis for a nonlinear diffusion equation with nonlinear boundary conditions[J]. *Appl Math Letters*, 2004, **17**(2): 193-199.

[27] Chipot M, Fila M, Quitter P. Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions[J]. *Acta Math Univ Comenian*, 1991, **60**(1): 35-103.

[28] Giadas B, Spruck J. A prior bounds positive solutions of nonlinear elliptic equations[J]. *Comm Partial Differential Equations*, 1981, **6**(8): 883-901.

[29] Giga Y, Kohn R V. Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations[J]. *Comm Pure Appl Math*, 1985, **38**(3): 297-319.

[30] Ladyzenskaya O A, Solonikiv V A, Ural'ceva N N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*[M]. Translations of Mathematical Monographs. Rhode Island: Amer Math Soc, 1967.

[31] Ziemer W P. Interior and boundary continuity of weak solutions of degenerate parabolic equations[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1982, **271**(2): 733-748.

[32] Lieberman G M. *Second Order Parabolic Differential Equations*[M]. River Edge: World Scientific Co, 1996.

[33] Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

Blow-up Rate Estimate for Degenerate Parabolic Equation With Nonlinear Gradient Term

ZHANG Zheng-ce, WANG Biao

(*College of Science*, *Xi'an Jiaotong University*, *Xi'an* 710049, *P. R. China*)

Abstract: Blow-up rate was obtained for a porous medium equation with nonlinear gradient term and a nonlinear boundary flux. By using the scaling method and the regularity estimates of parabolic equations, the blow-up rate which was determined by the interaction between the diffusion and the boundary flux was gotten. Interestingly, compared with the previous results, the gradient term which exponent does not exceed 2 will not affect the blow-up rate for solutions.

Key words: degenerate parabolic equation; gradient; blow-up; nonlinear boundary flux