文章编号:1000-0887(2010)06-0731-08
ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

粗糙核超奇异积分算子的加权有界性*

黄文礼[1], 陶祥兴[2], 李胜宏[1]

(1. 浙江大学 数学系,杭州 310027;
2. 浙江科技学院 数学系,杭州 310023)

(郭兴明推荐)

摘要: 利用 Fourier 变换和 Littlewood-Paley 理论,讨论了带粗糙核的超奇异积分算子的加权有界性. 证明了带粗糙核的超奇异积分算子从 Sobolev 空间到 Lebesgue 空间的有界性.

关 键 词: 超奇异积分算子; 粗糙核; A_p 权

中图分类号: O174.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.06.010

1 引言和主要结果

设 $n \geqslant 2$, S^{n-1} 是 R^n 中的单位球面, $\Omega(x)$ 是 0 次齐次的函数且满足

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\,\mathrm{d}x' = 0,$$

其中 $x' = x/|x|$ $(x \in R^n \setminus \{0\})$. 超奇性的奇异积分算子 $T_{\Omega,\alpha,h}$ 及其相应的极大算子 $T^*_{\Omega,\alpha,h}$ 分别在形式上定义为

$$T_{\Omega,\alpha,h} f(x) = \mathrm{p.\,v.} \int_{R^n} h(|y|) \frac{\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} f(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

$$T^*_{\Omega,\alpha,h} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|y|>\varepsilon} h(|y|) \frac{\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} f(x-y)\,\mathrm{d}y \right|, \tag{2}$$

这里的 h 是 $\mathbf{R}_+$ 上的可测函数.

Calderón 和 Zygmund[1] 用 C-Z 旋转法证明了当 $h=1$, $\alpha=0$, 且 $\Omega \in L(\log^+)L(S^{n-1})$ 时, 算子 $T_{\Omega,0,1}$, $T^*_{\Omega,0,1}$ 的 $L^p(1<p<\infty)$ 有界性. Fefferman[2] 用复插值法研究了当 $h \in L^\infty$, Ω 满足 Lipschitz 条件时, 算子 $T_{\Omega,0,h}$ 的 L^p 有界性. Duoandikoetxea 等[3] 用 Fourier 估计以及 Littlewood-Paley 理论证明了当 $\Omega \in \cup_{q>1} L^q(S^{n-1})$ 时算子 $T_{\Omega,0,h}$, $T^*_{\Omega,0,h}$ 的 L^p 有界性. Fan 和 Pan[4] 对此做了重要的改进和推广, 将核条件降到 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$. 随后, Chen 等[5] 研究了 $\alpha>0$, $h \in L^\infty$, $\Omega \in H^q(S^{n-1})$ (此处 $q=(n-1)/(n-1+\alpha)$) 的情形, 他们建立了算子 $T_{\Omega,\alpha,h}$ 的 $(\dot{L}^p_\alpha, L^p)$ 有界性. 最近, Chen 和 Zhang[6] 对 α 是非负整数, $h \in L^\infty$ 的情形进行研究得到算子 $T^*_{\Omega,\alpha,h}$ 的 $(\dot{L}^p_\alpha, L^p)$ 有界性. 假设 $h \in \Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)$, 这里 $\gamma>1$, 并且

* **收稿日期:** 2009-10-27; **修订日期:** 2010-05-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771110); 教育部重大项目基金资助项目(309018)
作者简介: 黄文礼(1982—), 男, 浙江金华人, 博士(联系人. E-mail: wlhuangmath@gmail.com).

$$\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+) = \left\{ h \in L^\gamma(\mathbf{R});\ \|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)} := \sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int_0^r |h(t)|^\gamma \mathrm{d}t\right)^{1/\gamma} < \infty \right\}.$$

Xia[7]研究了 $\alpha \geqslant 0$ 时,同样得到了算子 $T_{\Omega,\alpha,h}, T^*_{\Omega,\alpha,h}$ 的$(\dot{L}^p_\alpha, L^p)$ 的有界性,$1 < p < \infty$,即

$$\|T_{\Omega,\alpha,h}f\|_{L^p(R^n)} \leqslant C\|\Omega\|_{H^q(S^{n-1})}\|f\|_{\dot{L}^p_\alpha(R^n)}$$

以及

$$\|T^*_{\Omega,\alpha,h}f\|_{L^p(R^n)} \leqslant C\|\Omega\|_{H^q(S^{n-1})}\|f\|_{\dot{L}^p_\alpha(R^n)},$$

这里 $q = (n-1)/(n-1+\alpha)$,L^p_α 是齐次 Sobolev 空间.

本文研究算子 $T_{\Omega,\alpha,h}$ 在满足 $\alpha \geqslant 0, h \in \Delta_\gamma(\mathbf{R}_+), \gamma > 1$ 的条件下的加权有界性,所考虑的权是某类径向权.

在叙述定理前,我们先给出一些概念和记号.

定义 1 称 $\omega \in A_1(\mathbf{R}_+)$,如果对 $\omega(x) \geqslant 0, \omega(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$,存在常数 $C > 0$, 不等式

$$M\omega(x) \leqslant C\omega(x)$$

对几乎处处 $x \in \mathbf{R}_+$ 成立,其中 $M\omega$ 是在 $\mathbf{R}_+$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数.

称 $\omega \in A^I_p(R^n)$,如果 $\omega(x)$ 是 R^n 上的非负局部可积函数,对 $1 < p < \infty$,若存在常数 $C > 0$, 使得

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-1/(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{p-1} \leqslant C < \infty,$$

这里 $Q \in I^n$ 取遍边长平行于坐标轴的 n 维区间.

定义 2 称 $\omega(x) \in \tilde{A}_p(\mathbf{R}_+)$,如果 $\omega(x) = v_1(|x|)v_2(|x|)^{1-p}$,满足 $v_i \in A_1(\mathbf{R}_+)$ 单调下降,或者 $v_i^2 \in A_1(\mathbf{R}_+)$,$i = 1,2$.

易见,若 $\omega(t) \in \tilde{A}_p(\mathbf{R}_+)$,则 $\omega(|x|) \in A_p(R^n)$,其中 A_p 为 Muckenhoupt 权.

记 $\tilde{A}^I_p(\mathbf{R}_+) = \tilde{A}_p(\mathbf{R}_+) \cap A^I_p(R^n)$. 最近,Yabuta 证明了 $\tilde{A}_p(\mathbf{R}_+) \subset A^I_p(R^n)$, 因此我们有

$$\tilde{A}^I_p(\mathbf{R}_+) = \tilde{A}_p(\mathbf{R}_+).$$

我们将本文主要定理叙述如下:

定理 设 $1 < p < \infty, \alpha \geqslant 0$. 如果 $h \in \Delta_\gamma(\mathbf{R}_+), \gamma > 1$,$\Omega$ 为 Hardy 空间 $H^q(S^{n-1})$ 中的函数,$q = (n-1)/(n-1+\alpha)$ 且满足如下的消失性条件:

$$\int_{S^{n-1}} \xi^\beta \Omega(\xi)\mathrm{d}\xi = 0, \tag{3}$$

这里 β 是多重指标且 $|\beta| \leqslant [\alpha] + 1$,$[\alpha]$ 是不超过 α 的最大整数. 令 $\omega(x) \in \tilde{A}_p(\mathbf{R}_+)$, 且

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\gamma'}\right\},$$

这里 γ' 是 γ 的共轭数. 那么

$$\|T_{\Omega,\alpha,h}f\|_{L^p(\omega)} \leqslant C\|\Omega\|_{H^q(S^{n-1})}\|f\|_{\dot{L}^p_\alpha(\omega)},$$

这里常数 $C > 0$ 与 f 无关.

2 预备知识及引理

先回忆 $H^q(S^{n-1})(q < 1)$ 的原子分解.

定义 3 $a(x)$ 称为正则(q,r) 原子,若它是一个 $L^r(S^{n-1})(r > 1)$ 函数满足如下条件:

(i) $\mathrm{supp}(a) \subset \{x' \in S^{n-1}, |x' - x_0'| < \rho\}$, $x_0' \in S^{n-1}$, $\rho > 0$;

(ii) $\|a\|_{L^r(S^{n-1})} \leqslant \rho^{-(n-1)(1/q-1/r)}$;

(iii) $\int_{S^{n-1}} a(y')P_m(y')\mathrm{d}y'=0$, 这里 P_m是阶数 $m\leqslant N$ 的球面调和多项式, N是任一大于$[(n-1)(1/q-1)]$ 的整数.

定义 4 $a(x)$ 称为例外原子,若 $\|a(x)\|_\infty\leqslant 1$.

众所周知,对于$\Omega\in H^q(S^{n-1})$ $(q<1)$ 具有原子分解$\Omega=\sum_j c_ja_j$,这里a_j是例外原子或正则(q,∞) 原子,且$\sum_j|c_j|^q\leqslant\|\Omega\|^q_{H^q(S^{n-1})}$. 特别地,若$\Omega\in H^q(S^{n-1})$ 且满足定义 3 的 (iii) 所定义的消失性条件,则所有原子 a_j 可以选择为正则(q,∞) 原子.

因此,我们选择 a_j 为正则(q,∞) 原子,对$\Omega\in H^q(S^{n-1})$ 进行原子分解,得到$\Omega=\sum_j c_ja_j$,其中$\sum_j|c_j|^q\leqslant\|\Omega\|^q_{H^q(S^{n-1})}$,对 $p\geqslant 1$ 则有

$$\|T_{\Omega,\alpha,h}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\sum_j|c_j|\,\|T_{a_j,\alpha,h}f\|_{L^p(\omega)},\tag{4}$$

其中

$$T_{a_j,\alpha,h}f(x)=\mathrm{p.\,v.}\int_{R^n}h(|y|)\frac{a_j(y')}{|y|^{n+\alpha}}f(x-y)\mathrm{d}y.$$

要证定理成立,只要证明对每一个原子 a, 有

$$\|T_{a,\alpha,h}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|f\|_{\dot{L}^p_\alpha(\omega)},\tag{5}$$

其中常数 $C>0$ 与f,a,ρ 无关.

取$I_k=(2^k,2^{k+1}]$, 令 $\sigma_k(x)=h(|x|)(a(x')/|x|^{n+\alpha})\chi_{I_k}(|x|)$, 则 $T_{a,\alpha,h}f(x):=\sum_{k\in Z}\sigma_k*f(x):=\sum_{k\in Z}T_kf(x)$. 取一列径向函数$\{\phi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$,满足$\phi_j\in C^\infty(\mathbf{R}_+)$,$0\leqslant\phi_j\leqslant 1$;$\mathrm{supp}\phi_j\subset(2^{j-1},2^{j+1}]$,且设 ϕ 满足$\sum_{k\in Z}[\phi_j(x)]^2=1$,$x\neq 0$. 定义 $S(R^n)$ 上的乘子算子

$$(\widehat{S_jf})(\xi)=\phi_j(|A_\rho\xi|)\hat{f}(\xi),$$

这里, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$, $A_\rho\xi=(\rho^2\xi_1,\rho\xi_2,\cdots,\rho\xi_n)$. $T_{a,\alpha,h}$ 可分解为

$$T_{a,\alpha,h}f=\sum_{j\in Z}\left(\sum_{k\in Z}S_{j+k}(T_k(S_{j+k}f))\right):=\sum_{j\in Z}\bar{T}_jf,$$

其中 $T_k(S_{j+k}f)(x)=\sigma_k*(S_{j+k}f)(x)$.

由文献[7]中定理 1 的证明过程可知:

$$\|\bar{T}_jf\|_{L^2}\leqslant C2^{-j(1-\alpha)}\|f\|_{\dot{L}^2_\alpha},\quad j\geqslant 0,\tag{6}$$

$$\|\bar{T}_jf\|_{L^2}\leqslant C2^{j(\alpha+1/\gamma')}\|f\|_{\dot{L}^2_\alpha},\quad j<0.\tag{7}$$

引理 1 设 $\alpha\geqslant 0$,a 为(q,∞) 原子, $q=(n-1)/(n-1+\alpha)$. $h\in\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)$, $\gamma>1$,若 $1<\gamma'<p<\infty$,这里 γ' 是 γ 的共轭数. 令

$$M_{a,\alpha}f(x)=\sup_k\left|\int_{I_k}h(|y|)\frac{a(y')}{|y|^{n+\alpha}}f(x-y)\mathrm{d}y\right|.$$

若 $\omega(x)\in\tilde{A}^I_{p/\gamma'}(\mathbf{R}_+)$. 则存在与$f,a,\rho$ 无关的常数 C 使得

$$\|M_{a,\alpha}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|f\|_{\dot{L}^p_\alpha(\omega)}.\tag{8}$$

证明 不失一般性,设 $\mathrm{supp}(a)\subset B(\mathbf{1},\rho)\cap S^{n-1}$,其中$\mathbf{1}=(1,0,\cdots,0)$. 由原子 a 的积分消失性,有

$$M_{a,\alpha}f=\sup_k\left|\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t^{1+\alpha}}\int_{S^{n-1}}a(y')[f(x-ty')-f(x-t\mathbf{1})]\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right|.$$

如果$0<\alpha<1$,由文献[6] 中引理 2 的证明,对任意的 $y\in\mathrm{supp}(a)$,

$$\left|\int_{S^{n-1}} a(y')[f(x-ty')-f(x-t\mathbf{1})]\mathrm{d}y'\right| \leqslant$$

$$Ct^{\alpha}\int_{S^{n-1}} \rho^{\alpha}|a(y')|[M(D^{\alpha}f)(x-ty')+M(D^{\alpha}f)(x-t\mathbf{1})]\mathrm{d}y',$$

其中$\mathbf{1}=(1,0,\cdots,0)$,$M$ 是 Hardy-Littlewood 极大算子,D^{α} 是分数次微分算子,即

$$(\widehat{D^{\alpha}f})(\xi)=|\xi|^{\alpha}\hat{f}(\xi).$$

因此,由 Minkowski 不等式得

$$\|M_{a,\alpha}f\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|[M(D^{\alpha}f)(x-ty')+\right.$$

$$\left.M(D^{\alpha}f)(x-t\mathbf{1})]\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\right\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}M(D^{\alpha}f)(x-ty')\mathrm{d}t\right\|_{L^p(\omega)}\mathrm{d}y'+$$

$$C\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}M(D^{\alpha}f)(x-t\mathbf{1})\mathrm{d}t\right\|_{L^p(\omega)}\mathrm{d}y'. \tag{9}$$

令

$$I_1=\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}M(D^{\alpha}f)(x-ty')\mathrm{d}t\right\|_{L^p(\omega)},$$

$$I_2=\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}M(D^{\alpha}f)(x-t\mathbf{1})\mathrm{d}t\right\|_{L^p(\omega)}.$$

下面,我们处理 I_1,

$$I_1\leqslant\left\|\left(\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|^{\gamma}}{t}\mathrm{d}t\right)^{1/\gamma}\left(\sup_k\int_{I_k}[M(D^{\alpha}f)(x-ty')]^{\gamma'}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/\gamma'}\right\|_{L^p(\omega)}\leqslant$$

$$\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\left\|\left(\sup_k\int_{I_k}[M(D^{\alpha}f)(x-ty')]^{\gamma'}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/\gamma'}\right\|_{L^p(\omega)}\leqslant$$

$$\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\|(M_{\tilde{y}'}[M(D^{\alpha}f)(x)]^{\gamma'})^{1/\gamma'}\|_{L^p(\omega)}.$$

最后一个不等式中的算子 $M_{\tilde{y}'}$ 定义如下:

$$M_{\tilde{y}'}u(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r}\int_0^r u(x+t\tilde{y}')\mathrm{d}t, \tag{10}$$

它是 u 沿着 $\tilde{y}'$ 方向的 Hardy-Littlewood 极大函数,这里 $\tilde{y}'\in S^{n-1}$. 对于 $\omega\in\tilde{A}^{I}_{p/\gamma'}(\mathbf{R}_+)$,$p/\gamma'>1$,即 $p>\gamma'$, 我们有

$$\|(M_{\tilde{y}'}[M(D^{\alpha}f)(x)]^{\gamma'})^{1/\gamma'}\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|M(D^{\alpha}f)(x)\|_{L^p(\omega)},$$

因此

$$I_1\leqslant C\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\|M(D^{\alpha}f)\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\|D^{\alpha}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\|f\|_{\dot{L}^p_{\alpha}(\omega)}. \tag{11}$$

对 I_2 重复同样的过程,有

$$I_2\leqslant C\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\|f\|_{\dot{L}^p_{\alpha}(\omega)}. \tag{12}$$

于是,若 $0\leqslant\alpha<1$, 由式(9)、(11)和(12),可得

$$\|M_{a,\alpha}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|h\|_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}\|f\|_{\dot{L}^p_{\alpha}(\omega)}.$$

如果 $\alpha>1$ 且 α 不是一个整数,同样由文献[6]中引理 2 的证明,有

$$\left|\int_{S^{n-1}} a(y')[f(x-ty')-f(x-t\mathbf{1})]\mathrm{d}y'\right| \leqslant$$

$$C\int_{S^{n-1}}|a(y')|\sum_{|\beta|=[\alpha]}\int_0^1(1-s)^{[\alpha]-1}[(D^{\beta}f)(x-t\mathbf{1}+st(\mathbf{1}-y'))-$$
$$(D^{\beta}f)(x-t\mathbf{1})]|t(\mathbf{1}-y')|^{\beta}\mathrm{d}s\mathrm{d}y'.$$

因为 $0<\alpha-[\alpha]<1$,所以类似于 $0<\alpha<1$ 的情形我们得到

$$\|M_{a,\alpha}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\sum_{|\beta|=[\alpha]}\|M(D^{\alpha-[\alpha]}(D^{\beta}f))\|_{L^p(\omega)}\leqslant$$
$$C\sum_{|\beta|=[\alpha]}\|D^{\beta}f\|_{\dot{L}^p_{\alpha-[\alpha]}(\omega)}\leqslant C\|f\|_{\dot{L}^p_{\alpha}(\omega)}.$$

如果 $\alpha=0,1,\cdots$,由文献[8]中引理1的证明以及我们处理 $0<\alpha<1$ 时的方法,有

$$\|M_{a,\alpha}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|f\|_{\dot{L}^p(\omega)}^{\alpha}.$$

引理证毕.

3 定理的证明

定理的证明 当 $\gamma>2$ 时, 由 Hölder 不等式易知 $\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)\subset\Delta_2(\mathbf{R}_+)$, 故只需证明 $1\leqslant\gamma\leqslant2$ 时结论成立即可. 此时, $|1/p-1/2|<1/\gamma'$. 下面, 我们估计当 $|1/p-1/2|<1/\gamma'$ 时, $\bar{T}_jf$ 的 L^p 范数. 同上节一样,我们首先处理 $-1/\gamma'<1/p-1/2<0$,即 $2<p<2\gamma/(2-\gamma)$ 的情形.

假设 $\mathrm{supp}(a)\subset B(\mathbf{1},\rho)\cap S^{n-1}$ 其中 $\mathbf{1}=(1,0,\cdots,0)$. 由 f_k 记 $S_{j+k}f$,令 $(p/2)'$ 是 $p/2$ 的共轭数. 对于 $\omega(x)\in\tilde{A}^I_{(p/2)}(\mathbf{R}_+)$,可取 $u\in L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})$, $\|u\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}=1$,注意到对偶空间的 Rieze 表示定理,球坐标变换以及原子 a 的积分消失性,有

$$\left\|\left(\sum_k|T_kf_k|^2\right)^{1/2}\right\|^2_{L^p(\omega)}=\left\|\left(\sum_k|T_kf_k|^2\right)\right\|_{L^{p/2}(\omega)}=$$
$$\int_{R^n}\left(\sum_k|T_kf_k|^2\right)u(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{R^n}\left(\sum_k\left|\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t^{1+\alpha}}\int_{S^{n-1}}a(y')f_k(x-ty')\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\right|^2\right)u(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{R^n}\left(\sum_k\left|\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t^{1+\alpha}}\int_{S^{n-1}}a(y')[f_k(x-ty')-\right.\right.$$
$$\left.\left.f_k(x-t\mathbf{1})]\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\right|^2\right)u(x)\mathrm{d}x.$$

同样,这里 $\mathbf{1}=(1,0,\cdots,0)$. 不失一般性,设原子的中心为 $\mathbf{1}$.

根据引理1的证明过程,对 $0<\alpha<1$, 有

$$\left\|\left(\sum_k|T_kf_k|^2\right)^{1/2}\right\|^2_{L^p(\omega)}\leqslant$$
$$C\sum_k\int_{R^n}\left(\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|M(D^{\alpha}f_k)(x-ty')\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\right)^2u(x)\mathrm{d}x+$$
$$C\sum_k\int_{R^n}\left(\int_{I_k}\frac{|h(t)|}{t}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|M(D^{\alpha}f_k)(x-t\mathbf{1})\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\right)^2u(x)\mathrm{d}x:=$$
$$I_1+I_2. \tag{13}$$

由 $h\in\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)$ 以及原子 a 的大小条件,得到

$$\int_{I_k}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|\frac{|h(t)|^{\gamma}}{t}\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\leqslant C\|h\|^{\gamma}_{\Delta_{\gamma}(\mathbf{R}_+)}.$$

由 Hölder 不等式,有

$$I_1 \leqslant C\|h\|^{\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\sum_k\int_{R^n}\int_{I_k}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|\times$$
$$\frac{|h(t)|^{2-\gamma}}{t}(M(D^{\alpha}f_k)(x-ty'))^2u(x)\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leqslant$$
$$C\|h\|^{\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\sum_k\int_{R^n}(M(D^{\alpha}f_k)(x))^2\int_{I_k}\frac{|h(t)|^{2-\gamma}}{t}\times$$
$$\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|u(x+ty')\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

令

$$M_a(u)(x)=\sup_k\left|\int_{I_k}\frac{|h(t)|^{2-\gamma}}{t}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|u(x+ty')\mathrm{d}y'\mathrm{d}t\right|,$$

我们有

$$\|M_a(u)\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|^{2-\gamma}}{t}u(x+ty')\mathrm{d}t\right\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\mathrm{d}y'.$$

再次利用 Hölder 不等式,有

$$\left\|\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|^{2-\gamma}}{t}u(x+ty')\mathrm{d}t\right\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$\left\|\left(\sup_k\int_{I_k}\frac{|h(t)|^{\gamma}}{t}\mathrm{d}t\right)^{(2-\gamma)/\gamma}\times\right.$$
$$\left.\left(\sup_k\int_{I_k}u(x+ty')^{\gamma/(2\gamma-2)}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{(2\gamma-2)/\gamma}\right\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$C\|h\|^{2-\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\left\|\left(\sup_k\int_{I_k}u(x+ty')^{\gamma/(2\gamma-2)}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{(2\gamma-2)/\gamma}\right\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$C\|h\|^{2-\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\left\|\{M_{\tilde{y}'}(u)^{\gamma/(2\gamma-2)}\}^{(2\gamma-2)/\gamma}\right\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$C\|h\|^{2-\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\|u\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})},$$

其中用到了如下事实,即 $(p/2)'>\gamma/(2\gamma-2)=(\gamma/(2-\gamma))'$ 以及算子 $M_{\tilde{y}'}$ 的加权有界性.因此

$$\|M_a u\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$C\|h\|^{2-\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\|u\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\int_{S^{n-1}}\rho^{\alpha}|a(y')|\mathrm{d}y'\leqslant$$
$$C\|h\|^{2-\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\|u\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})},$$

更进一步,我们有

$$I_1\leqslant C\|h\|^{\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\sum_k\int_{R^n}(M(D^{\alpha}f_k)(x))^2M_a u(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\|h\|^{\gamma}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\left\|\sum_k\int_{R^n}(M(D^{\alpha}f_k))^2\right\|_{L^{p/2}(\omega)}\|M_a(u)\|_{L^{(p/2)'}(\omega^{1-(p/2)'})}\leqslant$$
$$C\|h\|^{2}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\left\|\left(\sum_k\int_{R^n}\left(M(D^{\alpha}f_k)\right)^2\right)^{1/2}\right\|^2_{L^p(\omega)}. \tag{14}$$

利用同样的方法,我们有

$$I_2\leqslant C\|h\|^{2}_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)}\left\|\left(\sum_k\int_{R^n}(M(D^{\alpha}f_k)(x))^2\right)^{1/2}\right\|^2_{L^p(\omega)}. \tag{15}$$

由不等式(13)、(14)和(15),有

$$\left\| \left(\sum_k | T_k f_k |^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant C \| h \|_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)} \left\| \left(\sum_k (M(D^\alpha f_k)(x))^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)}.$$

对于 $\alpha > 1$ 和 $\alpha \neq [\alpha]$ 的情形,用证明引理 1 时的类似方法,我们有

$$\left\| \left(\sum_k | T_k f_k |^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C \| h \|_{\Delta_\gamma(\mathbf{R}_+)} \sum_{|\beta| = [\alpha]} \left\| \left(\sum_k (M(D^{\alpha-[\alpha]}(D^\beta f_k)))^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)}.$$

因此,对于 $\alpha \neq [\alpha]$ 以及 $2 < p < 2\gamma/(2-\gamma)$ 的情形,由 Littlewood-Paley 理论,我们有

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p(\omega)} \leqslant C \left\| \left(\sum_k | T_k(S_{j+k} f) |^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C \sum_{|\beta| = [\alpha]} \left\| \left(\sum_k (M(D^{\alpha-[\alpha]}(D^\beta S_{j+k} f)))^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C \sum_{|\beta| = [\alpha]} \left\| \left(\sum_k | D^{\alpha-[\alpha]}(D^\beta S_{j+k} f) |^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C \sum_{|\beta| = [\alpha]} \left\| D^{\alpha-[\alpha]}(D^\beta f) \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant$$

$$C \sum_{|\beta| = [\alpha]} \| D^\beta f \|_{\dot{L}_{\alpha-[\alpha]}^p(\omega)} \leqslant C \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p(\omega)}.$$

用同样的方法,如果 $\alpha = 0, 1, \cdots$,并且 $2 < p < 2\gamma/(2-\gamma)$,有

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p(\omega)} \leqslant C \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p(\omega)}.$$

由对偶和插值理论,我们有

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p(\omega)} \leqslant C \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p(\omega)}, \qquad \text{对 } \alpha \geqslant 0 \text{ 且} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{r'}. \tag{16}$$

由 A_p 权理论,如果 $\omega(x) \in \tilde{A}_p^I(\mathbf{R}_+)$,那么自然地,对某个 $\varepsilon > 0$,有 $\omega^{1+\varepsilon} \in \tilde{A}_p^I(\mathbf{R}_+)$. 和式(16)类似,我们有

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p(\omega^{1+\varepsilon})} \leqslant C \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p(\omega^{1+\varepsilon})}. \tag{17}$$

在式(6)、(7)和(16)之间插值(其中,令 $\omega = 1$),对某个 $0 < \theta < 1$,有

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p} \leqslant C\, 2^{-j\theta([\alpha]+1-\alpha)} \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p}, \qquad j \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p} \leqslant C\, 2^{j\theta(\alpha+1/\gamma')} \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p}, \qquad j < 0. \tag{19}$$

在式(17)和(18),(17)和(19)之间用变测度 Stein-Weiss 插值定理,对某个 $\sigma > 0$,

$$\| \bar{T}_j f \|_{L^p(\omega)} \leqslant C\, 2^{-\sigma|j|} \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p(\omega)}.$$

因此

$$\| T_{a,\alpha,h} f \|_{L^p(\omega)} \leqslant C \sum_{j \in Z} \| \bar{T}_j f \|_{L^p(\omega)} \leqslant C \| f \|_{\dot{L}_\alpha^p(\omega)}.$$

定理得证.

参考文献:

[1] Calderón A P, Zygmund A. On singular integrals[J]. *Amer J Math*, 1956, **78**(2):289-309.

[2] Fefferman R. A note on singular integrals[J]. *Proc Amer Math Soc*, 1979, **74**(2):266-270.

[3] Duoandikoetxea J, Rubio De Francia J L. Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates [J]. *Invent Math*, 1986, **84**(3):541-561.

[4] Fan D, Pan Y. Singular integral operators with rough kernels supported by subvarieties[J]. *Amer J Math*, 1997, **119**:799-839.

[5] Chen J C, Fan D S, Ying Y M. Certain operators with rough singular kernels[J]. *Canad J Math*, 2003, **55**(3): 504-532.

[6] Chen Q L, Zhang Z F. Boundedness of a class of super singular integral operators and the associated commutators[J]. *Science in China A*, 2004 ,**47**(6): 842-853.

[7] Xia X. Boundedness of strongly singular integral operators with rough kernels[J]. *Journal of Beijing Normal University*, 2007, **43**(1):10-15.

[8] Chen Q L. Weighted estimates for a class of rough singular integrals [J]. *Journal of Zhejiang University*, 2004, **31**(5):481-483.

Weighted Estimates for Strongly Singular Integral Operators With Rough Kernels

HUANG Wen-li[1], TAO Xiang-xing[2], LI Sheng-hong[1]

(1. *Department of Mathematics*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Zhejiang University of Science and Technology*, *Hangzhou* 310023, *P. R. China*)

Abstract: The Fourier transform and Littlewood-Paley theory were used to give the weighted boundedness of the strongly singular integral operator. It is shown that the strongly singular integral operator is bounded from the Sobolev space to the Lebesgue space.

Key words: strongly singular intergral operators; rough kernels; A_p weights