应用数学和力学,第 31 卷 第 6 期
2010 年 6 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 31, No. 6, Jun. 15, 2010

文章编号:1000-0887(2010)06-0722-09

非线性约束下非完整系统的平衡稳定性*

V·柯维克[1], M·维什柯维克[2], D·狄加瑞克[1], A·阿伯拉达维克[1]

(1. 贝尔格莱德大学 机械工程学院,11120 贝尔格莱德,塞尔维亚;
2. 克拉克耶瓦茨大学 机械工程学院,36000 克拉列沃,塞尔维亚)

(陈立群推荐)

摘要: Kozlov 将 Liapunov 第一方法推广到非线性力学系统,用来解决保守和耗散力场中,运动力学系统平衡位置的不稳定性.文中讨论的系统运动限于理想的非线性非完整约束.将势能和约束函数展开为 Maclaurin 级数,对其第一非平凡多项式的阶,确定了相互间关系的 5 种情况,并对生成的非线性非完整约束方程进行了分析.将 3 种线性齐次约束下的非完整系统平衡位置的不稳定定理(Kozlov,1986),推广到非线性非完整约束.另外两种情况下的新定理,也是将 Kozlov(1994)的结果,拓展到非线性约束下的非完整系统.

关 键 词: Liapunov 第一方法; 非完整系统; 平衡的不稳定性

中图分类号: O175.13;O316 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2010.06.009

1 引言及预备知识

本文在有势力的稳态场中,研究非完整力学系统的运动.系统的位形由 Lagrange 坐标系 $\boldsymbol{q} = (q^1, \cdots, q^n)$ 确定.假设系统的运动取决于 $p(p < n)$ 个理想的非线性、非齐次、非完整又相互独立的约束,即①

$$\Psi^{\nu}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0, \qquad \nu = f + 1, \cdots, f + p = n, \tag{1}$$

其中,当约束独立时, $\operatorname{rank}[\partial\Psi^{\nu}/\partial\dot{q}^i] = p$, 导出如下形式:

$$\dot{q}^{\nu} = \psi^{\nu}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}'), \tag{2}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{q}}' = (\dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^f)$.

系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}a_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}^i\dot{q}^j, \ \Pi = \Pi(\boldsymbol{q}), \tag{3}$$

对所有的 $\boldsymbol{q}$ 值,动能 T 关系 $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n)$ 一定为正.用下面的矢量给出广义的势力场

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}) = (-\partial\Pi/\partial q^1, \cdots, -\partial\Pi/\partial q^n). \tag{4}$$

---

* **收稿日期:** 2009-12-14; **修订日期:** 2010-03-04
基金项目: 塞尔维亚共和国科学部技术局资助项目(144019;114052)
作者简介: Vukman Čović(E-mail:covicv@eunet.rs).
本文原文为英文,黄绍红 译,张禄坤 校.

① 更多的指标可用 $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, f; \nu, \rho, \theta = f+1, \cdots, n; i, j, u = 1, \cdots, n$. 重复的指标,表示求和.

系统的运动微分方程为[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^{\nu}}+\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\nu}}\right]=0, \tag{5}$$

该方程仍受约束方程(2)所制约.

若在点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$，满足条件

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^{i}}\right)_{(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0)}=0,\ \psi^{\nu}(\boldsymbol{q}_0,\dot{\boldsymbol{q}}'=\boldsymbol{0})=0, \tag{6}$$

则此点为该系统的平衡位置(Ⅱ类). 进一步,一般认为没有损耗,可取 $\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{0}$. 还将假设函数 $\psi^{\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}')$，$a_{ij}(\boldsymbol{q})$ 和 $\Pi(\boldsymbol{q})$ 是无限可微的.

势能的 Maclaurin 级数为

$$\Pi=\Pi_{(m)}(\boldsymbol{q})+\Pi_{(m+1)}(\boldsymbol{q})+\cdots, \tag{7}$$

其中 $\Pi(m)(\boldsymbol{q})$ 是一个 m 阶的齐次式,函数 $\psi^{\nu}=\psi^{\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}')$ 的 Maclaurin 级数为

$$\begin{aligned}\psi^{\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}')={}&\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}(\boldsymbol{q})+\bar{\psi}^{\nu}_{(k+1)}(\boldsymbol{q})+\cdots+(\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{q})+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l+1)}(\boldsymbol{q})+\cdots)\dot{q}^{\alpha}+\\&(\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha\beta(r)}(\boldsymbol{q})+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha\beta(r+1)}(\boldsymbol{q})+\cdots)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+\cdots,\end{aligned} \tag{8}$$

其中，$\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}(\boldsymbol{q})$，$\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{q})$，$\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha\beta(r)}(\boldsymbol{q})$ 分别是 $k,l,r(l,r\geqslant 0)$ 阶的齐次式. 显然可得(参见式(8)) $k\geqslant 1$. 当 $l=0$ 情况,量 $\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{0})$ 表示常数,因而记 $\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{0})=\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}$.

约束方程(2)对时间求导,考虑到方程(8),有式(仅包括对下一步分析有关的项)

$$\ddot{q}^{\nu}=\left(\frac{\partial\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}}{\partial q^{i}}+\frac{\partial\bar{\psi}^{\nu}_{(k+1)}}{\partial q^{i}}+\cdots\right)\dot{q}^{i}+(\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l+1)}+\cdots)\ddot{q}^{\alpha}+\cdots, \tag{9}$$

又,考虑到方程(8),微分方程(5)取式

$$\begin{aligned}&a_{\alpha i}\ddot{q}^{i}+\Gamma_{ij,\alpha}\dot{q}^{i}\dot{q}^{j}+\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial \Pi_{(m+1)}}{\partial q^{\alpha}}+\cdots+\\&(\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l+1)}+\cdots)\left(a_{\nu i}\ddot{q}^{i}+\Gamma_{ij,\nu}\dot{q}^{i}\dot{q}^{j}+\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^{\nu}}+\frac{\partial \Pi_{(m+1)}}{\partial q^{\nu}}+\cdots\right)=0,\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\Gamma_{ij,u}=(\partial a_{ju}/\partial q^{i}+\partial a_{ui}/\partial q^{j}-\partial a_{ij}/\partial q^{u})/2$.

方程(9)和(10)也可写成

$$\ddot{q}^{\nu}=\frac{\partial\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}}{\partial q^{i}}\dot{q}^{i}+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}\ddot{q}^{\alpha}+\cdots, \tag{11}$$

$$a_{\alpha i}(\boldsymbol{0})\ddot{q}^{i}+\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^{\alpha}}+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}\left(a_{\nu i}(\boldsymbol{0})\ddot{q}^{i}+\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^{\nu}}\right)+\cdots=0. \tag{12}$$

根据文献[2-7]的主要结果,将 Liapunov 第一方法推广到强非线性的微分方程系统,并进一步考虑如下陈述:若微分方程(2)和(5)有解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$，当 $t\to-\infty$ 时,有性质 $\boldsymbol{q}(t)\to\boldsymbol{0}$，则平衡位置 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$，$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

当 $m=2$ 时,可用 Liapunov 方法[8]求解,该方法归诸于稳定性的线性近似,本文不加考虑.

当 $m>2$ 时(参阅式(7)),寻找无限级数形式的解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$，当 $t\to-\infty$ 时,有性质 $\boldsymbol{q}(t)\to\boldsymbol{0}$，可能还是发散的[5-6]，

$$\sum_{s=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_s(\ln(-t))(-t)^{-s\mu}, \tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{a}_1=$常数，$\mu=$常数 >0，$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots$ 为 $\ln(-t)$ 的矢量多项式. 如果该级数存在并收敛,表

示方程(2)和(5)的解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$,当 $t\to-\infty$ 时,有性质 $\boldsymbol{q}(t)\to\mathbf{0}$. 若级数存在且发散,则正如文献[9]指出的,方程(2)和(5)存在解 $\tilde{\boldsymbol{q}}=\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$,级数(13)是其渐近形式. 可推断,级数(13)的存在,意味着,由微分方程(2)和(5)描述的运动平衡位置 $\boldsymbol{q}=\mathbf{0},\dot{\boldsymbol{q}}=\mathbf{0}$ 是不稳定的.

上面给出了级数存在性的条件,取[5-6] $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{e}$,其中 $\lambda>0,\boldsymbol{e}=(e^1,\cdots,e^n)$. 对级数(13),设 $\mu=2/(m-2)$,并结合方程(11)和(12),可导出如下关系(仅包括与后续分析相关的项):

$$m(e^{\nu}-\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}e^{\alpha})(-t)^{-a}-(m-2)\lambda^{k-1}\frac{\partial\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})e^i(-t)^{-b}+\cdots=0, \tag{14}$$

$$\left\{\frac{2ma_{\alpha i}(\mathbf{0})e^i}{(m-2)^2}+\lambda^{m-2}\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^{\alpha}}(\boldsymbol{e})+\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}\left[\frac{2ma_{\nu i}(\mathbf{0})e^i}{(m-2)^2}+\lambda^{m-2}\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^{\nu}}(\boldsymbol{e})\right]\right\}\times (-t)^{-a}+\cdots=0, \tag{15}$$

其中, $a=2(m-1)/(m-2)$, $b=(m+2k-2)/(m-2)$.

实矢量 $\boldsymbol{e}$ 的存在,有 $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{e},\lambda>0$, 级数(13)也存在,于是,描述其性质的第1项存在,通过一系列常系数的线性非齐次微分方程,导致该级数的余项存在. 因此,这些方程的非齐次性,可以表达为变量 $\ln(-t)$ 的已知多项式.

2 逆 Lagrange-Dirichlet 定理情况

当 $k>m/2$ 时,接着 $2(m-1)<m+2k-2$, 同时关系式(14)成为

$$e^{\nu}-\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}e^{\alpha}=0. \tag{16}$$

当条件 $\psi^{\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'=\mathbf{0})\equiv\mathbf{0}$ 得到满足时,先前的形式已经得到.

根据式(16),关系式(15)复原为

$$\kappa a^*_{\alpha\beta}(\mathbf{0})e^{\beta}+\frac{\partial\Pi^*_{(m)}}{\partial q^{\alpha}}(\boldsymbol{e})=0, \tag{17}$$

其中 $\Pi^*_{(m)}=\Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')$ 是函数 $\Pi_{(m)}=\Pi_{(m)}(\boldsymbol{q})$ 在 m 维平面

$$q^{\nu}-\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}q^{\alpha}=0 \tag{18}$$

上的限制,又

$$\kappa=\frac{2m}{(m-2)^2\lambda^{m-2}}, \tag{19}$$

$$a^*_{\alpha\beta}(\mathbf{0})=a_{\alpha\beta}(\mathbf{0})+a_{\alpha\nu}(\mathbf{0})\bar{\psi}^{\nu}_{\beta 0}+a_{\beta\nu}(\mathbf{0})\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}+a_{\nu\rho}(\mathbf{0})\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha 0}\bar{\psi}^{\rho}_{\beta 0}. \tag{20}$$

量 $a^*_{\alpha\beta}(\mathbf{0})$ 明显地呈现为正定二次形式的系数.

注意到,式(17)表示函数 $\Pi^*_{(m)}=\Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')$ 在椭球体 $a^*_{\alpha\beta}(\mathbf{0})q^{\alpha}q^{\beta}=1$ 上的极值条件,同时,如果极值存在,将是负的最小值,相应的 $\kappa>0$,以至于有关系式 $\kappa=-m\Pi^*_{(m)}$(见式(17)),接着由式(19),有唯一 $\lambda>0$. 这样,级数(13)第1项的存在,式 $\boldsymbol{q}^*=\lambda\boldsymbol{e}^*(-t)^{-2/(m-2)}$ 确定,同时要求[3-6]级数(13)存在,且平衡位置 $\boldsymbol{q}=\mathbf{0},\dot{\boldsymbol{q}}=\mathbf{0}$ 是不稳定性的.

可以把它归纳为如下的定理.

定理1 设力学系统满足如下条件:

$\Pi_{(m)}=\Pi_{(m)}(\boldsymbol{q})$ 在平面(18)上的齐次式的限制 $\Pi^*_{(m)}=\Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')(m>2)$ 是非平凡的,且在 $\boldsymbol{q}'=\mathbf{0}$ 没有最小值.

第一非平凡式不依赖于 k 阶矢量函数 $\boldsymbol{\psi}=(\psi^{f+1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'),\cdots,\psi^{n}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'))$ 的 Maclaurin 级数

中的广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}'$,满足条件 $k > m/2$,或条件 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'=\boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$.

当所有这些条件都满足时,所考虑力学系统的平衡位置是不稳定的.

证明　注意到上述需要注意的事项,对定理 1 的证明,只要处理在定理 1 条件中的表示,函数 $\Pi^*_{(m)}=\Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')$ 在椭圆 $a^*_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})q^\alpha q^\beta=1$ 上,存在负的最小值. 考虑到该限制,依照定理的条件,在 $\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{0}$ 处没有最小值,接着,函数 $\Pi^*_{(m)}=\Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')$ 在椭圆 $a^*_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})q^\alpha q^\beta=1$ 上,有最小值存在,且为负的. 当用 $\boldsymbol{q}$ 替换 $\boldsymbol{e}$ 后,清楚地表明,代数准则(17)是限制 $\Pi^*_{(m)}=\Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')$ 在椭圆 $a^*_{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})q^\alpha q^\beta=1$ 上的极值条件. 定理 1 证毕.

文献[3]用公式给出了在线性齐次约束下,非完整保守系统运动时,关于平衡位置不稳定性的定理. 定理 1 将文献[3]中的定理推广到非线性非齐次非完整约束系统. 当平衡位置的势能达到最大值时,定理 1 依然成立. 当约束完整时,定理 1 简化为文献[10-11]的结果. 当 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'=\boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$ 时,这时没有循环力,定理 1 又简化为文献[12]中的定理 2.

3　$m=2k$ 情况

在 $m=2k$ 情况下,方程(14)和(15)分别转化为

$$\kappa(e^\nu-\bar{\psi}^\nu_{\alpha 0}e^\alpha)-\bar{\psi}^\nu_{(k)}(\boldsymbol{e})=0, \tag{21}$$

$$\frac{m\kappa^2}{2}[a_{\alpha i}(\boldsymbol{0})+\bar{\psi}^\nu_{\alpha 0}a_{\nu i}(\boldsymbol{0})]e^i+\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^\alpha}(\boldsymbol{e})+\bar{\psi}^\nu_{\alpha 0}\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^\nu}(\boldsymbol{e})=0, \tag{22}$$

其中

$$\kappa=\frac{2}{(m-2)\lambda^{(m-2)/2}}. \tag{23}$$

现把它归纳为定理 2.

定理 2　设存在实矢量 $\boldsymbol{e}=(e^1,\cdots,e^n)$,$a_{ij}(\boldsymbol{0})e^ie^j=1$,并且正标量 κ 表示代数方程(21)和(22)的解,则所描述的力学系统的平衡位置 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$,$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

证明　当定理 2 的条件满足时,证明级数(13)的第一项存在,接着由于式(23)有唯一的正数 λ. 导致上述解的存在(见文献[3-7]),又级数(13)存在,因此平衡位置 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$,$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 不稳定.

4　$m>2k$ 情况

设对坐标执行正则变换

$$q^\alpha=\xi^\alpha,\ q^\nu=\xi^\nu+\bar{\psi}^\nu_{\alpha(l=0)}\xi^\alpha, \tag{24}$$

当 $l \geqslant 1$ 时,表达式(24)表示恒等变换,正则变换后的非完整约束方程(8)变为

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}^\nu(\boldsymbol{\xi},\dot{\boldsymbol{\xi}}')=&\tilde{\psi}^\nu_{(k)}(\boldsymbol{\xi})+\tilde{\psi}^\nu_{(k+1)}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+(\tilde{\psi}^\nu_{\alpha(l)}(\boldsymbol{\xi})+\tilde{\psi}^\nu_{\alpha(l+1)}(\boldsymbol{\xi})+\cdots)\dot{\xi}^\alpha+\\&(\tilde{\psi}^\nu_{\alpha\beta(r)}(\boldsymbol{\xi})+\tilde{\psi}^\nu_{\alpha\beta(r+1)}(\boldsymbol{\xi})+\cdots)\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta+\cdots,\end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n),\ \dot{\boldsymbol{\xi}}'=(\dot{\xi}^1,\cdots,\dot{\xi}^f),\\ \tilde{\psi}^\nu(\boldsymbol{\xi},\dot{\boldsymbol{\xi}}')=[\bar{\psi}^\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}')]^*,\ \tilde{\psi}^\nu_{(k)}(\boldsymbol{\xi})=[\bar{\psi}^\nu_{(k)}(\boldsymbol{q})]^*,\\ \bar{\psi}^\nu_{\alpha(l)}(\boldsymbol{\xi})=[\tilde{\psi}^\nu_{\alpha(l)}(\boldsymbol{q})]^*,\ \tilde{\psi}^\nu_{\alpha\beta(r)}(\boldsymbol{\xi})=[\bar{\psi}^\nu_{\alpha\beta(r)}(\boldsymbol{q})]^*.\end{cases} \tag{26}$$

上述关系式中,方括号上角带星号的量,表示按照变换(24),在新的坐标系中进行计算.

方程(8)变为

$$\tilde{\psi}^{\nu}(\boldsymbol{\xi},\dot{\boldsymbol{\xi}}')=\tilde{\psi}^{\nu}_{(k)}(\boldsymbol{\xi})+\tilde{\psi}^{\nu}_{(k+1)}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+(\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{\xi})+\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha(l+1)}(\boldsymbol{\xi})+\cdots)\dot{\xi}^{\alpha}+(\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha\beta(r)}(\boldsymbol{\xi})+\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha\beta(r+1)}(\boldsymbol{\xi})+\cdots)\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}+\cdots,$$

其中

$$\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}=\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{\xi})-\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha0}.$$

显然

$$\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{0})=\tilde{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0})-\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha0}=\boldsymbol{0}$$

成立.

此外,假定执行变换(24)后,所有的量,包括广义坐标,仍改用原先的符号.因而,前面已考虑过的 $\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha(l)}(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0})=0\rightarrow\bar{\psi}^{\nu}_{\alpha0}\equiv0$ 成立.

当 $m>2k$ 时,微分方程(11)和(12)截去尾部后,成为

$$\ddot{q}^{\nu}=\frac{\partial\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}}{\partial q^{i}}\dot{q}^{i},\tag{27}$$

$$a_{\alpha i}(\boldsymbol{0})\ddot{q}^{i}=0.\tag{28}$$

在 $R^{n}=\{\boldsymbol{q}\}$ 中,指定 p 维平面(β):

$$q^{\alpha}=-\bar{a}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})a_{\beta\nu}(\boldsymbol{0})q^{\nu},\tag{29}$$

同时指定函数 $W=W(\boldsymbol{q})$.因而,将用 $W^{*}=W_{(q^{\alpha}=-\bar{a}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})a_{\beta\nu}(\boldsymbol{0})q^{\nu})}$ 表示函数 $W(\boldsymbol{q})$ 在平面(β)的限制.显然,$W^{*}=W^{*}(\boldsymbol{q}'')$ 成立,其中 $\boldsymbol{q}''=(q^{f+1},\cdots,q^{n})$.限制平面$(\beta)$由度规张量 $a_{ij}(\boldsymbol{0})$ 的系数确定,与考虑过的情况不同,如文献[2]中的例子,限制平面由非完整约束的系数确定.最终表达式中的坐标 $\bar{a}^{\alpha\beta}$,表示矩阵 $\boldsymbol{a}_{\alpha\beta}$ 的逆矩阵坐标.

现把它归纳为定理3.

定理3 所考虑的力学系统满足如下条件:

不等式 $1<k<m/2$ 成立;

存在一个实矢量 $\boldsymbol{e}''=(e^{f+1},\cdots,e^{n})$,$a_{\nu\rho}e^{\nu}e^{\rho}=1$,则

$$\kappa e^{v}=\bar{\psi}^{*}_{(k)}(\boldsymbol{e}''),\ \kappa=\mathrm{const}>0,\tag{30}$$

其中 $\bar{\psi}^{\nu*}_{(k)}=\bar{\psi}^{\nu*}_{(k)}(\boldsymbol{q}'')$ 是函数 $\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}=\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}(\boldsymbol{q})$ 在平面 $q^{\alpha}=-\bar{a}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})a_{\beta\nu}(\boldsymbol{0})q^{\nu}$ 的限制.

则描述该力学系统的平衡位置 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0},\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

证明 取 $\mu=1/(k-1)$,结合级数(13)的第一项以及截尾方程(27)和(28),给出如下关系:

$$\kappa e^{\nu}=\bar{\psi}^{\nu}_{(k)}(\boldsymbol{e}),\tag{31}$$

$$e^{\alpha}+\bar{a}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{0})a_{\beta\nu}(\boldsymbol{0})e^{\nu}=0,\tag{32}$$

其中

$$\kappa=\frac{1}{(k-1)\lambda^{k-1}}.\tag{33}$$

关系式(31)和(32)将通向定理3中提及条件的代数关系式.在定理3条件满足的情况下,表示级数(13)第一项存在.接着,由于式(33)有唯一的正数 λ,使得上面给出的解存在(见文献[2-7]),级数(13)的存在,因而平衡位置 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0},\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 不稳定.定理3证毕.

注 对约束方程(2)取微分,得到二阶微分方程,取其首次积分,有关系式

$$\dot{q}^\nu - \psi^\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}') = C^\nu, \qquad C^\nu = \text{常数}.$$

当 $t \to -\infty$ 时,$\boldsymbol{q}(t) \to 0 \wedge \dot{\boldsymbol{q}}(t) \to 0$,接着 $t \to -\infty$ 时,$\psi^\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}') \to 0$,因此,可以推得 $C^\nu = 0$. 非完整约束方程得到满足.

5　有势力和耗散力场中平衡的不稳定性

考虑系统除了有势力(式(4))作用外,还有耗散力作用,其 Reyleigh 函数为

$$\Phi = \frac{1}{2} d_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}^i\dot{q}^j. \tag{34}$$

假设函数 $d_{ij} = d_{ij}(\boldsymbol{q})$ 是无限可微的. 该函数的 Maclaurin 级数为

$$d_{ij}(\boldsymbol{q}) = d_{ij(s_{ij})}(\boldsymbol{q}) + d_{ij(s_{ij}+1)}(\boldsymbol{q}) + \cdots,$$

其中 $d_{ij(s_{ij})}(\boldsymbol{q})$ 为 s_{ij} 阶的齐次式,$s_{ij} \geqslant 0$.

显然,耗散力的存在,并没有打乱有势力场的平衡位置 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$.

文献[5]就守恒力和耗散力场中的运动,关系齐次非完整力学系统的平衡位置,给出了用公式表示的不稳定定理. 当系统承受非线性非完整约束时,进一步推广为下面的定理4.

定理4　设所考虑的力学系统满足如下条件:

齐次式的限制 $\Pi^*_{(m)} = \Pi^*_{(m)}(\boldsymbol{q}')\,(m > 2)$,将 $\Pi_{(m)} = \Pi_{(m)}(\boldsymbol{q})$ 限制在平面(18)上,是非平凡的,且在 $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{0}$ 中,没有最小值.

满足条件 $\psi^\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}' = \boldsymbol{0}) \equiv 0$,或者,第一非平凡式不依赖于 k 阶矢量函数 $\boldsymbol{\psi} = (\psi^{f+1},\cdots,\psi^n)$ 的 Maclaurin 级数中的广义速度 $\boldsymbol{q}'$,并满足条件 $k > m/2$.

条件 $s > (m-2)/2$ 满足,其中 $\boldsymbol{s} = \inf(s_{11},\cdots,s_{nn})$,且在函数 $d_{ij} = d_{ij}(\boldsymbol{q})$ 的 Maclaurin 级数中,第一非平凡式的阶为 $s_{ij}(i,j = 1,\cdots,n)$.

满足所有这些条件时,所考虑力学系统的平衡位置不稳定.

证明　在所考虑的情况下,运动微分方程式(9),以及

$$a_{\alpha i}\ddot{q}^i + \Gamma_{ij,\alpha}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^\alpha} + \cdots + (d_{\alpha i(s_{\alpha i})} + \cdots)\dot{q}^i +$$
$$\bar{\psi}^\nu_{\alpha 0}\left[a_{\nu i}\ddot{q}^i + \Gamma_{ij,\nu}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^\nu} + \cdots + (d_{\nu i(s_{\nu i})} + \cdots)\dot{q}^i\right] + \cdots = 0. \tag{35}$$

取 $\mu = 2(m-2)$, 结合级数(13)的第一项,以及方程(9)和(35),得到如下关系(仅示出与后续分析有关的项):

$$m(e^\nu - \bar{\psi}^\nu_{\alpha 0}e^\alpha)(-t)^{-\bar{a}} - (m-2)\lambda^{k-1}\frac{\partial \bar{\psi}^\nu_{(k)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})e^i(-t)^{-\bar{b}} + \cdots = 0, \tag{36}$$

$$\left[\frac{2ma_{\alpha i}(\boldsymbol{0})e^i}{(m-2)^2} + \lambda^{m-2}\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^\alpha}(\boldsymbol{e})\right](-t)^{-\bar{a}} + \frac{2}{m-2}d_{\alpha i(s_{\alpha i})}(\boldsymbol{e})\lambda^s(-t)^{-\bar{c}} +$$
$$\bar{\psi}^\nu_{\alpha 0}\left\{\left[\frac{2ma_{\nu i}(\boldsymbol{0})e^i}{(m-2)^2} + \lambda^{m-2}\frac{\partial \Pi_{(m)}}{\partial q^\nu}(\boldsymbol{e})\right](-t)^{-\bar{a}} +\right.$$
$$\left.\frac{2}{m-2}d_{\nu i(s_{\nu i})}(\boldsymbol{e})\lambda^s(-t)^{-\bar{c}}\right\} + \cdots = 0, \tag{37}$$

其中

$$\bar{a} = 2(m-1)/(m-2),\ \bar{b} = (m+2k-2)/(m-2),\ \bar{c} = (2s+m)/(m-2).$$

与该定理的条件 $m < \inf(2k, 2s+2)$ 一致,则由式(36)和(37)得到判别式(16)和(17). 其余的证明与定理1对应部分的证明相同.

最后,考虑 $s=0$ 的情况,当量 $d_{ij}^0=d_{ij}(\mathbf{0})$ 表示正定二次式的系数(耗散完成).这时可归纳为定理5.

定理5 当所考虑的力学系统满足如下条件:

齐次式的限制 $\Pi_{(m)}^*=\Pi_{(m)}^*(\boldsymbol{q}')(m>2)$,将 $\Pi_{(m)}=\Pi_{(m)}(\boldsymbol{q})$ 限制在平面(18)上,是非平凡的,且在 $\boldsymbol{q}'=\mathbf{0}$ 中,没有最小值.

满足条件 $\psi^\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'=\mathbf{0})\equiv0$,或者,在 k 阶矢量函数 $\boldsymbol{\psi}=(\psi^{f+1},\cdots,\psi^n)$ 的 Maclaurin 级数中,第一非平凡式不依赖于广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}'$,满足条件 $k>m-1$.

耗散完成.

满足所有这些条件时,所考虑力学系统的平衡位置 $\boldsymbol{q}=\mathbf{0},\dot{\boldsymbol{q}}=\mathbf{0}$ 是不稳定的.

证明 取 $\mu=1/(m-2)$,结合级数(13)与运动微分方程

$$\dot{q}^\nu=\bar{\psi}_{(k)}^\nu(\boldsymbol{q})+\cdots+\bar{\psi}_{\alpha0}\dot{q}^\alpha+\cdots$$

$$\begin{aligned}&a_{\alpha i}\ddot{q}^i+\Gamma_{ij,\alpha}\dot{q}^i\dot{q}^j+\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial\Pi_{(m+1)}}{\partial q^\alpha}+\cdots+(d_{\alpha i}^0+d_{\alpha i(1)}(\boldsymbol{q})+\cdots)\dot{q}^i+\\&\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu\left[a_{\nu i}\ddot{q}^i+\Gamma_{ij,\nu}\dot{q}^i\dot{q}^j+\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^\nu}+\frac{\partial\Pi_{(m+1)}}{\partial q^\nu}+\cdots+\right.\\&\left.(d_{\nu i}^0+d_{\nu i(1)}(\boldsymbol{q})+\cdots)\dot{q}^i\right]+\cdots=0,\end{aligned}\tag{38}$$

导得下列代数关系(仅示出与以下分析有关的项):

$$(e^\nu-\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu e^\alpha)(-t)^{-(m-1)/(m-2)}+\cdots=0,\tag{39}$$

$$\left[\kappa(d_{\alpha i}^0+\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu d_{\nu i}^0)e^i+\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^\alpha}(\boldsymbol{e})+\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^\nu}(\boldsymbol{e})\right](-t)^{-(m-1)/(m-2)}+\cdots=0,\tag{40}$$

这里

$$\kappa=\frac{1}{(m-2)\lambda^{m-2}}.\tag{41}$$

显然,当满足条件 $\psi^\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}'=\mathbf{0})\equiv0$ 时,关系式(39)保持不变,考虑

$$\bar{\psi}_{(k)}^\nu(\boldsymbol{q})+\bar{\psi}_{(k+1)}^\nu(\boldsymbol{q})+\cdots\equiv0$$

成立.

依照式(39)和(40),有如下代数判据:

$$e^\nu-\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu e^\alpha=0,\tag{42}$$

$$\kappa(d_{\alpha i}^0+\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu d_{\nu i}^0)e^i+\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^\alpha}(\boldsymbol{e})+\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu\frac{\partial\Pi_{(m)}}{\partial q^\nu}(\boldsymbol{e})=0,\tag{43}$$

简化为判据

$$\kappa d_{\alpha\beta}^{0*}e^\beta+\frac{\partial\Pi_{(m)}^*}{\partial q^\alpha}(\boldsymbol{e}')=0,\tag{44}$$

其中 $\Pi_{(m)}^*=\Pi_{(m)}^*(\boldsymbol{q}')$ 为函数 $\Pi_{(m)}=\Pi_{(m)}(\boldsymbol{q})$ 的限制,将其限于 m 维平面 $q^\nu-\bar{\psi}_{\alpha0}q^\alpha=0$,$\boldsymbol{e}'=(e^1,\cdots,e^f)$,$d_{\alpha\beta}^{0*}=d_{\alpha\beta}^0+d_{\alpha\nu}^0\bar{\psi}_{\beta0}^\nu+d_{\beta\nu}^0\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu+d_{\nu\rho}^0\bar{\psi}_{\alpha0}^\nu\bar{\psi}_{\beta0}^\rho$.

考虑到式 $d_{ij}^0\dot{q}^i\dot{q}^j$ 是正定的,且 $d_{\alpha\beta}^{0*}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta=(d_{ij}^0\dot{q}^i\dot{q}^j)_{(\dot{q}^\nu=\bar{\psi}_{\alpha0}\dot{q}^\alpha)}$ 成立,接着式 $d_{\alpha\beta}^{0*}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$ 也是正定的.由此可推断,以后的证明程序可按定理1的证明进行.证明的最后,仅需要完成下列替换:$a_{\alpha\beta}^*(\mathbf{0})\to d_{\alpha\beta}^{0*}$.定理5证毕.

6 实　　例

质量为 M 的质点,在势能为 $\Pi = a(x^3 - y^3 - xyz)$ 的力场中运动. 质点受非完整约束 $\dot{z} = b_1(x^2 + y^2) + b_2x^3\sin(c_1\dot{x} + c_2\dot{y}) - b_3x^2\cos(c_2\dot{y})$. 显然,质点的平衡位置 $x = y = z = 0, \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ 存在,而且是不稳定的. 指定 $M = 1$ kg, $a = 4$ kg/(m·s^2), $b_1 = 3\ (\mathrm{m\cdot s})^{-1}$, $b_2 = 1\ (\mathrm{m^2\cdot s})^{-1}$, $b_3 = 1\ (\mathrm{m\cdot s})^{-1}$, $c_1 = 1$ s/m, $c_2 = 2$ s/m,用直角坐标系(x, y, z) 再现 Lagrange 坐标集.

解　点 $x = y = z = 0$ 满足条件(6),上述平衡位置存在. 约束方程的 Maclaurin 级数为

$$\dot{z} = 2x^2 + 3y^2 + x^3\dot{x} + 2x^3\dot{y} + 2x^2\dot{y}^2 + \cdots, \tag{45}$$

或对时间微分后

$$\ddot{z} = 4x\dot{x} + 6y\dot{y} + x^3\ddot{x} + 2x^3\ddot{y} + 3x^2\dot{x}^2 + 6x^2\dot{x}\dot{y} + 2x\dot{x}\dot{y}^2 + 4x^2\dot{y}\ddot{y} + \cdots, \tag{46}$$

因而 $k = 2$.

根据势能表达式,可推断 $m = 3$ 或 $m < 2k$. 因此,定理1的条件满足. 因为 $\Pi_{(3)} = 4(x^3 - y^3 - xyz)$,平面(18)有式 $z = 0$,随后,函数 $\Pi_{(3)} = \Pi_{(3)}(x, y, z)$ 在平面 $z = 0$ 的限制 $\Pi^*_{(3)} = 4(x^3 - y^3)$ 下,在 $x = y = z = 0$ 上,没有最小值. 接着,该质点的平衡位置 $x = y = z = 0, \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ 是不稳定的.

参考文献:

[1] Dobronravov V V. *Foundations of the Mechanics of Nonholonomic Systems*[M]. Moscow: Vysshaya Shkola,1971:247. (in Russian)

[2] Kozlov V V, Palamodov V P. On asymptotic solutions of the equations of classical mechanics [J]. *Soviet Math Dokl*, 1982, **263**(2): 285-289. (in Russian)

[3] Kozlov V V. On the stability of equilibria of non-holonomic systems[J]. *Soviet Math Dokl*, 1986, **33**(3): 654-656.

[4] Kozlov V V. Asymptotic motions and inversion of the Lagrange-Dirichlet theorem[J]. *J Appl Maths Mechs*,1986, **50**(6): 719-725.

[5] Kozlov V V. On the asymptotic motions of systems with dissipation[J]. *J Appl Maths Mechs*, 1994, **58**(5): 787-792.

[6] Kozlov V V, Furta S D. Lyapunov's first method for strongly non-linear systems[J]. *Resenhas IME-USP*, 2001, **5**(1):1-24.

[7] Furta S D. On asymptotic solutions of equations of motion of mechanical systems[J]. *J Appl Maths Mechs*,1986, **50**(6): 938-944.

[8] Lyapunov A M. *The General Problem of the Stability of Motion*[M]. Khar'kov: Khar'kov Mat Obshch, 1892:450. (in Russian)

[9] Kuznetsov A N. The existence of solutions of an autonomous system, recurring at a singular point, having a formal solution[J]. *Funktsional'nyi Analiz i Yego Prilozheniya*,1989, **23**(4): 63-74. (in Russian)

[10] Hagedorn P. Die umkehrung der stabilitātssātze von Lagrange—dirichlet und routh[J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1971, **42**(4): 281-316.

[11] Čović V, Vesković M. Hagedorn's theorem in some special cases of rheonomic systems[J]. *Mechanics Research Communications*, 2005, **32**(3): 265-280.

[12] Vesković M, Čović V. Lyapunov first method for nonholonomic systems with circulatory forces[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2007, **45**(9/10): 1145-1156.

On the Stability of Equilibria of Nonholonomic Systems With Nonlinear Constraints

V. Čović[1], M. Vesković[2], D. Djurić[1], A. Obradović[1]

(1. *University of Belgrade*, *Faculty of Mechanical Engineering*, *Kraljice Marije* 16, 11120 *Belgrade*, *Serbia*;

2. *University of Kragujevac*, *Faculty of Mechanical Engineering*, *Dositejeva* 19, 36000 *Kraljevo*, *Serbia*)

Abstract: Liapunov's first method, extended by Kozlov to nonlinear mechanical systems, was applied to the study of the instability of the position of equilibrium of a mechanical system moving in the field of conservative and dissipative forces. The motion of the system was limited by ideal nonlinear nonholonomic constraints. Five cases determined by the relationship between the degree of the first nontrivial polynomials in Maclaurin's series for the potential energy and the functions that can be generated from the equations of nonlinear nonholonomic constraints were analyzed. In the three cases the theorem on the instability of the position of equilibrium of nonholonomic systems with linear homogeneous constraints (Kozlov (1986)) was generalized to the case of nonlinear nonhomogeneous constraints. In the other two cases new theorems were set extending the result from Kozlov (1994) to nonholonomic systems with nonlinear constraints.

Key words: Liapunov first method; nonholonomic system; instability of equilibrium