文章编号:1000-0887(2010)06-0710-12

n 维复 Swift-Hohenberg 方程的动态分叉*

肖庆坤, 高洪俊

(南京师范大学 数学科学学院 数学研究所,南京 210046)

(陈立群推荐)

摘要: 考虑复 Swift-Hohenberg 方程的分叉问题. 首先对复 Swift-Hohenberg 方程在一维区域 $(0,L)$ 上的吸引子分叉进行了考虑. 而后给出了 n 维复 Swift-Hohenberg 方程,在一般区域上 Dirichlet 边界条件下和周期边界条件下,当参数 λ 穿过某些分叉点时从平凡解处分叉出吸引子,并对吸引子分叉的稳定性进行了分析.

关 键 词: Swift-Hohenberg 方程; 分叉; 稳定性; 中心流形

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j. issn. 1000-0887. 2010. 06. 008

引 言

Swift-Hohenberg 方程由 Swift 和 Hohenberg[1] 于 1976 年首先提出,是一个研究卷波的 Rayleigh-Bénard 不稳定性的简单模型. 无论是从分析方面或者是数值计算方面,这一方程都被广泛研究[2-6]. 在文献[2-4]中,作者研究了具有三次非线性项的 Swift-Hohenberg 方程解的渐近行为.

复 Swift-Hohenberg 方程是一个研究物理学中各种斑图形成现象的模型方程[7-8]. 这其中包括重力场中水平流层中对流的 Rayleigh-Bénard 问题[3,9]、Taylor-Couette 流[10]、化学反应[11]和大尺度流与螺旋核不稳定性[12]. 这都是有关于远离平衡点系统的效应. 在光学中,这种方程也用来考虑大型激光的空间结构和同步泵浦光参量振子.

在文献[13]中,作者研究了实 Swift-Hohenberg 方程和一般 Swift-Hohenberg 方程在 Dirichlet 边界条件和周期边界条件下的吸引子分叉和渐近行为. 在文献[14]中,Han 和 Yari 研究了复 Swift-Hohenberg 方程在一维闭区间上的动态分叉问题.

在本文中,我们考虑如下复 Swift-Hohenberg 方程的吸引子分叉:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda u - (\alpha + \mathrm{i}\beta)(q + \Delta)^2 u - (\sigma + \mathrm{i}\rho) | u |^2 u, \tag{1}$$

其中 $u:\Omega \times [0,\infty) \mapsto \mathbf{C}$ 为一复数值的未知函数,$\Omega \subset R^n (1 \leqslant n \leqslant 3)$ 是开的有界的光滑区域. α,

* **收稿日期:** 2009-11-20; **修订日期:** 2010-05-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871097);江苏省研究生培养创新工程 2009 年度资助项目(CX09B-296Z)
作者简介: 肖庆坤(1983—),男,山东人,博士生(E-mail: xiaoqingkun@hotmail.com);
高洪俊(联系人. Tel:+86-25-85898771;E-mail: gaohj@njnu.edu.cn).

β,σ,ρ 和 λ 均为实的常数,特别地,α 和 σ 为正数.

方程(1)的初始条件为

$$u(x,0)=\phi+\mathrm{i}\psi. \tag{2}$$

我们考虑方程(1)的边界条件是 Dirichlet 边界条件

$$u=0,\ \Delta u=0,\qquad x\in\partial\Omega, \tag{3}$$

或者是周期边界条件

$$\Omega=(0,2\pi)^n,\qquad u\ \text{是}\ \Omega\text{-周期的}. \tag{4}$$

主要的方法就是由 Ma 和 Wang[15-16] 发展的吸引子分叉理论. 这种理论基于一种被命名为吸引子分叉的分叉. 分析的另一个重要因素就是中心流形约化理论.

本文是这样安排的:第 1 节,回顾了由 Ma 和 Wang 发展的抽象分叉理论;第 2 节,研究了一维区域(0,L)中,复 Swift-Hohenberg 方程在 Dirichlet 边界条件下的吸引子分叉;第 3 节,讨论了在更为一般的区域上,复 Swift-Hohenberg 方程在 Dirichlet 边界条件下的吸引子分叉;第 4 节,考虑了复 Swift-Hohenberg 方程在周期边界条件下的情况.

1　抽象分叉理论

在本节中,将回顾由 Ma 和 Wang[15-16] 发展的抽象发展方程的动态分叉理论的一些结果.

令 H 和 H_1 为两个复值的 Hilbert 空间,$H_1\hookrightarrow H$ 是一个稠密紧包含. 线性映射 $L:H_1\to H$ 被称为全连续场, 如果 $L=A+B$, 其中 $A:H_1\to H$ 是一个线性同胚, $B:H_1\to H$ 是一个线性紧算子. 考虑非线性发展方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=L_\lambda u+G(u,\lambda), \tag{5}$$

$$u(0)=u_0, \tag{6}$$

其中, $u:[0,\infty)\to H$ 是未知函数,$\lambda\in\mathbf{R}$ 是系统参数,$L_\lambda:H_1\to H$ 是连续依赖于 $\lambda\in\mathbf{R}$ 的参数化的线性全连续场,并且满足

$$L_\lambda=A+B_\lambda\ \text{是一个扇形算子}, \tag{7}$$

其中, $A:H_1\to H$ 是一个线性同胚,$B_\lambda:H_1\to H$ 是一个含参数的线性紧算子.

我们可以知道 L_λ 生成解析半群 $\{\mathrm{e}^{-tL_\lambda}\}$,对于任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,我们可以定义分数次算子 L_λ^α,其定义域为 $H_\alpha=D(L_\lambda^\alpha)$,并且有如果 $\alpha_2<\alpha_1$,则 $H_{\alpha_1}\subset H_{\alpha_2}$,$H_0=H$.

另外地,我们假设非线性项 $G(\cdot,\lambda):H_\alpha\to H$,$0\leqslant\alpha\leqslant1$,是连续依赖于参数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 的参数化的 $C^r(r\geqslant1)$ 有界算子族,并且有

$$G(u,\lambda)=o(\|u\|_{H_\alpha}),\qquad\forall\lambda\in\mathbf{R}. \tag{8}$$

我们假设线性算子 A 有特征值列 $\{\rho_k\}\subset\mathbf{C}$ 和特征函数列 $\{e_k,h_k\}\subset H_1$:

$$\begin{cases}Az_k=\rho_kz_k,\ z_k=e_k+\mathrm{i}h_k, & \\ \operatorname{Re}\rho_k\to\infty, & \text{当}\ k\to\infty,\\ |\operatorname{Im}\rho_k/(\operatorname{Re}\rho_k+a)|\leqslant C, & \text{对某常数}\ a,C>0,\end{cases} \tag{9}$$

并且 $\{e_k,h_k\}$ 是 H 的一组基.

条件(9)意味着 A 是一个扇形算子. 对于紧算子 $B_\lambda:H_1\to H$,假设存在一常数 $0\leqslant\theta<1$ 使得

$$B_\lambda: H_\theta \to H \text{ 是有界的}, \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

复数 $\beta = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$ 被称为算子 $L_\lambda: H_1 \to H$ 的特征值，其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$，如果存在 $z \in H_1$，$z \neq 0$ 使得

$$L_\lambda z = \beta z, \ z = x + \mathrm{i}y,$$

其中 x, y 是实值函数，或等价的，

$$L_\lambda x = \alpha_1 x - \alpha_2 y,$$

$$L_\lambda y = \alpha_2 x + \alpha_1 y.$$

令算子 L_λ 的特征值（计入重数）由下面给出：

$$\beta_1(\lambda), \beta_2(\lambda), \cdots, \beta_k(\lambda) \in \mathbf{C}.$$

假设

$$\operatorname{Re}\beta_i(\lambda)\begin{cases} < 0, & \text{当 } \lambda < \lambda_0 \text{ 时}, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0 \text{ 时}, \\ > 0, & \text{当 } \lambda > \lambda_0 \text{ 时}. \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m+1, \tag{11}$$

$$\operatorname{Re}\beta_i(\lambda_0) < 0, \qquad \forall m + 2 \leqslant i. \tag{12}$$

下面我们引出无穷维 Hilbert 空间中的吸引子分叉定理[15-16].

定理 1.1（吸引子分叉定理） 令 H 和 H_1 为两个复值的 Hilbert 空间，$H_1 \hookrightarrow H$ 是一个稠密紧包含，并假设式(7)、(8)、(11)、(12) 成立. 令 L_λ 在 $\lambda = \lambda_0$ 处的特征函数空间为

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{m+1} \{u \in H_1 \mid (L_{\lambda_0} - \beta_i(\lambda_0))^k u = 0, \ k = 1, 2, \cdots\}, \tag{13}$$

并且 $u = 0$ 是方程(5) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的局部渐近稳定平衡点. 则下面结论成立：

1）方程(5) 从 $(u, \lambda) = (u, 0)$ 在 $\lambda > \lambda_0$ 处分叉出一个吸引子 A_λ，其维数 $m \leqslant \dim A_\lambda \leqslant m + 1$，并且当 $m > 0$ 时是连通的；

2）A_λ 是一列 $(m + 1)$ 维胎面 M_k 的极限，且有 $M_{k+1} \subset M_k$. 特别地，如果 A_λ 是有限单复形，则 A_λ 同伦于 S^m；

3）对任何 $u_\lambda \in A_\lambda$ 可表示为

$$u_\lambda = v_\lambda + o(\| v_\lambda \|_{H_1}), \qquad v_\lambda \in E_0;$$

4）如果 A_λ 中方程(5) 的奇点数是有限的，那么有如下指标公式：

$$\sum_{u_i \in A_\lambda} \operatorname{ind}[-(L_\lambda + G), u_i] = \begin{cases} 2, & \text{当 } m = \text{奇数时}, \\ 0, & \text{当 } m = \text{偶数时}; \end{cases} \tag{14}$$

5）如果 $u = 0$ 是方程(5) 在 $\lambda = \lambda_0$ 全局稳定的平衡点，那么对任何有界开集 $U \subset H$，$0 \in U$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得当 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$ 时，在 $(0, \lambda_0)$ 处分叉出的吸引子 A_λ 吸引 U/Γ，其中 Γ 是 $u = 0$ 的稳定流形，余维数 $= m + 1$. 特别地，如果方程(5) 在 H 中存在全局吸引子，则 $U = H$.

2 在一维区域 $(0, L)$ 上 Swift-Hohenberg 方程在 Dirichlet 边界条件下的分叉

在本节和下节中，我们讨论复 Swift-Hohenberg 方程在 Dirichlet 边界条件下的分叉. 为了讨论的方便，在本节和下节中令方程(1) 中的 q 为 1.

令 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$，其中 u_1, u_2 为实值的，则 Swift-Hohenberg 方程在条件(2) 下可等价地写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda u_1 - \alpha(1+\Delta)^2 u_1 + \beta(1+\Delta)^2 u_2 - \sigma(u_1^2+u_2^2)u_1 + \rho(u_1^2+u_2^2)u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \lambda u_2 - \alpha(1+\Delta)^2 u_2 - \beta(1+\Delta)^2 u_1 - \sigma(u_1^2+u_2^2)u_2 - \rho(u_1^2+u_2^2)u_1, \\ u_1(x,0) = \phi(x),\ u_2(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{15}$$

令

$$H = L^2(\Omega,\mathbf{C}),$$
$$H_1 = H^4(\Omega,\mathbf{C}) = \{u = u_1 + \mathrm{i}u_2 \mid u_1,u_2 \in H^4(\Omega), u \text{ 满足式(3)}\}, \tag{16}$$

其中 $H^4(\Omega)$ 是通常的实值 Hilbert 空间.

这样方程(15)可表示为如下形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} = L_\lambda \boldsymbol{U} + G\boldsymbol{U}, \\ \boldsymbol{U}(0) = (u_1(0),u_2(0))^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{17}$$

其中, $L_\lambda = -A + B_\lambda$ 和 $G: H_1 \mapsto H$ 定义如下:

$$-A\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -\alpha(1+\Delta)^2 u_1 + \beta(1+\Delta)^2 u_2 \\ -\alpha(1+\Delta)^2 u_2 - \beta(1+\Delta)^2 u_1 \end{pmatrix},$$

$$B_\lambda \boldsymbol{U} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$G\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -\sigma(u_1^2+u_2^2)u_1 + \rho(u_1^2+u_2^2)u_2 \\ -\sigma(u_1^2+u_2^2)u_2 - \rho(u_1^2+u_2^2)u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(u) \\ G_2(u) \end{pmatrix}.$$

由于 H_1 紧嵌入到 H,所以 $B: H_1 \mapsto H$ 是一个紧算子.

本节中,我们考察复 Swift-Hohenberg 方程在一个特殊区域:一维区域 $(0,L)$ 上的情况. 也就是说,我们考虑如下问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \lambda u - (\alpha + \mathrm{i}\beta)\left(1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u - (\sigma + \mathrm{i}\rho)|u|^2 u, \\ \qquad\qquad x \in (0,L),\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi + \mathrm{i}\psi, \qquad x \in (0,L),\ t > 0, \\ u = 0,\ u'' = 0, \qquad x = 0,L. \end{cases} \tag{18}$$

记

$$Q = \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2,$$

则下面的线性特征值问题

$$\begin{cases} Qu = \tau u, & x \in (0,L), \\ u = 0,\ u'' = 0, & x = 0,L \end{cases} \tag{19}$$

的特征值为

$$P\left(\frac{k\pi}{L}\right) = \left(\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - 1\right)^2, \qquad k = 1,2,\cdots,$$

其中 $P(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$. 另外,对应的特征函数为 $\sin(k\pi x/L)$. 容易得到,当 $k \to \infty$,$P(k\pi/L) \to \infty$.

故线性特征值问题

$$\begin{cases} L_\lambda \boldsymbol{U} = \gamma \boldsymbol{U}, & x \in (0, L), \\ \boldsymbol{U} = 0,\ \boldsymbol{U}'' = 0, & x = 0, L \end{cases} \tag{20}$$

有特征值列 $\{\gamma_k\}$,对应特征值函数 $\{e_k\}$. 还有

$$\gamma_k = \lambda - \alpha P\left(\frac{k\pi}{L}\right) - \mathrm{i}\beta P\left(\frac{k\pi}{L}\right),\ e_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \pm \mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

因此,假设对于任意的 $k \in \mathbf{N}, L \neq k\pi$,则 A 是一个线性同胚,所以,$L_\lambda = A + B_\lambda$ 是一个全连续场. 如果对于某个正数 k 有 $L = k\pi$,那么 $A + I$ 是一个线性同胚. 这种情况下 L_λ 仍然是一个全连续场,此时 $L_\lambda = A + I + (\lambda - 1)I$. 故我们假设 $L < \pi$.

另外, H 和 H_1 可分解如下:

$$H = E_1 \oplus \tilde{E}_2,\ H_1 = E_1 \oplus E_2,$$

其中

$$E_1 = \left\{ x_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \mathrm{i} y_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \middle| x_1,\ y_1 \in \mathbf{R} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} (x_k + \mathrm{i} y_k) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \middle| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k\pi)^8}{L^8} ({x_k}^2 + {y_k}^2) < \infty,\ x_k,\ y_k \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\tilde{E}_2 = \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} (x_k + \mathrm{i} y_k) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \middle| \sum_{k=2}^{\infty} ({x_k}^2 + {y_k}^2) < \infty,\ x_k,\ y_k \in \mathbf{R} \right\}.$$

算子 L_λ 可分解为

$$L_\lambda = L_{1,\lambda} \oplus L_{2,\lambda},$$

其中

$$L_{1,\lambda} = L_\lambda |_{E_1} : E_1 \mapsto E_1,\ L_{2,\lambda} = L_\lambda |_{E_2} : E_2 \mapsto \tilde{E}_2.$$

由中心流形定理和 Liapunov-Schmidt 约化,吸引子分叉方程由下式给出:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \left(\lambda - \alpha P\left(\dfrac{\pi}{L}\right)\right) x_1 + \beta P\left(\dfrac{\pi}{L}\right) y_1 + P_1 G_1\left(x_1 \sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) + \mathrm{i} y_1 \sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) + h\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \left(\lambda - \alpha P\left(\dfrac{\pi}{L}\right)\right) y_1 - \beta P\left(\dfrac{\pi}{L}\right) x_1 + P_1 G_2\left(x_1 \sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) + \mathrm{i} y_1 \sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) + h\right), \end{cases} \tag{21}$$

其中 $h = h_1 + \mathrm{i} h_2$ 是中心流形函数,并且满足

$$h(x_1, y_1) = o(|x_1| + |y_1|)$$

和

$$\begin{cases} u = u_1 + \mathrm{i} u_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + \mathrm{i} y_k) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \\ P_1 G_1(u) = \displaystyle\int_0^L \{ -\sigma (u_1^2 + u_2^2) u_1 + \rho (u_1^2 + u_2^2) u_2 \} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x, \\ P_1 G_2(u) = \displaystyle\int_0^L \{ -\sigma (u_1^2 + u_2^2) u_1 - \rho (u_1^2 + u_2^2) u_2 \} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{22}$$

其中, $u_1, u_2, G_1, G_2, h_1, h_2$ 均为实值的.

我们给出一些先验估计.

定理 2.1　对于复 Swift-Hohenberg 方程(15),有下面的先验估计成立:

$$
|u(t)|_2 \leqslant \begin{cases} \exp\left(\left(\lambda - \alpha P\left(\dfrac{\pi}{L}\right)\right)t\right)|u(0)|, & \text{当}\ \lambda < \alpha P\left(\dfrac{\pi}{L}\right)\ \text{时}, \\ \dfrac{|u(0)|}{\sqrt{2\sigma L|u(0)|^2 t + 1}}, & \text{当}\ \lambda = \alpha P\left(\dfrac{\pi}{L}\right)\ \text{时}, \\ \max\left\{\sqrt{\dfrac{(\lambda - \alpha P(\pi/L))L}{\sigma}}, |u(0)|\right\}, & \text{当}\ \lambda > \alpha P\left(\dfrac{\pi}{L}\right)\ \text{时}. \end{cases} \tag{23}
$$

证明 由方程(15),我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L |u|^2 \mathrm{d}x = \\
&\int_0^L \{\lambda|u|^2 - \alpha(|u|^2 - 2|u'|^2 + |u''|^2) - \sigma|u|^4\}\mathrm{d}x \leqslant \\
&\int_0^L \left\{\lambda|u|^2 - \alpha P\left(\frac{\pi}{L}\right)|u|^2 - \sigma|u|^4\right\}\mathrm{d}x = \\
&\left(\lambda - \alpha P\left(\frac{\pi}{L}\right)\right)|u|_2^2 - \sigma||u|^2|_2^2,
\end{aligned}
$$

由 Hölder 不等式

$$
||u|^2|_2^2 \geqslant \frac{1}{L}|u|_2^4,
$$

因此,我们有下面的不等式:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_2^2 \leqslant 2\left(\lambda - \alpha P\left(\frac{\pi}{L}\right)\right)|u|_2^2 - \frac{2\sigma}{L}|u|_2^4,
$$

故定理得证.

总结起来,如果 $\lambda \leqslant \alpha P(\pi/L)$,那么平凡解在 $L^2((0,L),\mathbf{C})$ 中就是一个全局吸引子,如果 $\lambda > \alpha P(\pi/L)$,那么在 $L^2((0,L),\mathbf{C})$ 中,全局吸引子存在于球 B_R, 球的半径

$$
R = \sqrt{\frac{(\lambda - \alpha P(\pi/L))L}{\sigma}},
$$

以原点为圆心.

由文献[14],我们可以得到如下的动态分叉定理:

定理 2.2 对于复 Swift-Hohenberg 方程(15),以下结论成立:

1) 如果 $\lambda \leqslant \alpha P(\pi/L)$,则 $u = 0$ 是问题(15)的全局渐近稳定的平衡点;

2) 当 λ 穿过 $\alpha P(\pi/L)$ 时,特别地,对于任意的 $\alpha P(\pi/L) < \lambda < \alpha P(\pi/L) + \varepsilon, \varepsilon > 0$,问题(15)从 $(u,\lambda) = (0, \alpha P(\pi/L))$ 分叉出一个吸引子 Σ_λ;

3) 吸引子 Σ_λ 的维数介于 1 和 2 之间,是一列二维的胎面 M_k 的极限,且 $M_{k+1} \subset M_k$, 即

$$
\Sigma_\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k;
$$

4) 如果 $\beta \neq 0$,则该分叉为 Hopf 分叉,特别地,$\Sigma_\lambda = S^1$, 并且是渐近稳定的;

5) 如果 $\beta = 0$ 和 $\rho \neq 0$,那么分叉出的吸引子 Σ_λ 是一个周期轨道,是一个极限环. 如果 $\beta = 0$ 和 $\rho = 0$,那么 Σ_λ 由问题(18)的奇点组成;

6) 另外,对于任意的 $\alpha P(\pi/L) < \lambda < \alpha P(\pi/L) + \varepsilon$,$\Sigma_\lambda$ 吸引 $L^2((0,L),\mathbf{C})/\Gamma$ 中的所有有界集,其中 Γ 是 $u = 0$ 的稳定流形,在 $L^2((0,L),\mathbf{C})$ 中的余维数为 2.

注 2.1 在上面的讨论中,要求 $L < \pi$. 如 $L > \pi$, 有最大实部的特征值的重数可能会大于 2,我们将会在

第 3 节中更一般的区域上讨论这种情况.

在文献[3]中,作者得到在某些分叉点 kL_1 和 $kL_2(k=1,2,\cdots)$ 处产生非平凡分叉解,其中 L_1 和 L_2 满足 $P(\pi/L)=\lambda$,并且得到分叉解在 L_1 和 L_2 附近的局部行为. 然而,对于复 Swift-Hohenberg 方程,我们可以得到在 $\lambda=P(\pi/L)$ 处分叉出的吸引子的更多信息,包括关于稳定性的定理 2.2. 对于从该线性问题的其他特征值处分叉出的不变集也可以做类似讨论.

3 n 维区域上 Swift-Hohenberg 方程在 Dirichlet 边界条件下的分叉

在本节中,考虑 n 维 Swift-Hohenberg 方程(1)并附边界条件(3),这里 Ω 是一个 n 维区域, $1\leqslant n\leqslant 3$, 我们有以下结论.

定理 3.1 对于复 Swift-Hohenberg 方程(1)与(3),以下结论成立. 假设 λ_1 是算子$(1+\Delta)^2$ 的主特征值,μ_k 是 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的特征值,对应于 λ_1,特别地,$\lambda_1=(\mu_k-1)^2$,这样的 μ_k 的重数和为 m.

1) 如果 $\lambda\leqslant\alpha\lambda_1$,则 $u=0$ 是问题(15)全局渐近稳定的平衡点;

2) 当 λ 穿过 $\alpha\lambda_1$,即对于任意的 $\alpha\lambda_1<\lambda<\alpha\lambda_1+\varepsilon,\varepsilon>0$,问题(15) 从$(u,\lambda)=(0,\alpha\lambda_1)$ 处分叉出一个吸引子 Σ_λ;

3) Σ_λ 的维数介于 $2m-1$ 和 $2m$ 间,是一列 $2m$ 维胎面 M_k 的极限,并且 $M_{k+1}\subset M_k$, 即

$$\Sigma_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k;$$

4) 如果 $\beta^2+\rho^2\neq 0$, 那么分叉吸引子不含奇点;

5) 如果 $m=1,\beta^2+\rho^2\neq 0$,那么 Σ_λ 是一周期轨道;如果 $\beta=0$ 和 $\rho=0$,那么 Σ_λ 只由问题(15)的定态解构成;

6) 另外,对于任意的 $\alpha\lambda_1<\lambda<\alpha\lambda_1+\varepsilon,\Sigma_\lambda$ 吸引 $L^2((0,L),\mathbf{C})/\Gamma$ 中的所有有界集,这里 Γ 是 $u=0$ 的稳定流形,在 $L^2((0,L),\mathbf{C})$ 中余维数为 $2m$.

证明 令

$$H=L^2(\Omega,\mathbf{C}),$$

$$H_1=H^4(\Omega,\mathbf{C})=\{u=u_1+\mathrm{i}u_2\mid u_1,u_2\in H^4(\Omega),\ u\text{ 满足式(3)}\},\tag{24}$$

其中 $H^4(\Omega)$ 为通常的实值 Hilbert 空间. 算子 $L_\lambda=-A+B_\lambda$ 和 $G:H_1\mapsto H$ 的定义同第 2 节中相同.

已知问题(15)有一全局吸引子[17].

令 μ_k 为 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的特征值. 已熟知

$$0<\mu_1<\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_k\leqslant\cdots,\qquad \mu_k\to\infty,\qquad \text{当 } k\to\infty,\tag{25}$$

并且对应的特征函数 $\{e_k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一组正交基.

则 $-(1+\Delta)^2$ 在边界条件(3)下的特征值由下式给出:

$$-(\mu_k-1)^2,\qquad k=1,2,\cdots,$$

$\{e_k\}$ 为对应的特征函数.

容易得到算子 A 的特征值为

$$\alpha(\mu_k-1)^2+\mathrm{i}\beta(\mu_k-1)^2,\qquad k=1,2,\cdots.$$

相应的特征函数为

$$\eta_k=e_k\pm\mathrm{i}e_k,\qquad k=1,2,\cdots,$$

并且 $\{e_k,\mathrm{i}e_j\}$ 是 H 的一组正交基.

假设 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下对应于 μ_k 的特征函数为

$$\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_m^*\}, \tag{26}$$

则空间 H 和 H_1 可以分解为

$$H = E_1 \oplus E_2,\ H_1 = E_1 \oplus \tilde{E}_2,$$

其中

$$E_1 = \left\{ \sum_{i,j=1}^{m} (x_i e_i^* + \mathrm{i} y_j e_j^*) \mid x_i, y_j \in \mathbf{R} \right\}.$$

由中心流形定理，$u = v + h$，其中 $v = v_1 + \mathrm{i}v_2 \in E_1$，$v_1, v_2$ 均为实值的，$h: E_1 \mapsto E_2$ 为复数值的中心流形函数，由 Liapunov-Schmidt 约化，式(1)与式(3)在 $\lambda = \lambda_1$ 的分叉方程写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \lambda v_1 - \alpha(1+\Delta)^2 v_1 + \beta(1+\Delta)^2 v_2 + P_1 G_1(v_1 + \mathrm{i}v_2 + h), \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \lambda v_2 - \alpha(1+\Delta)^2 v_2 - \beta(1+\Delta)^2 v_1 + P_1 G_2(v_1 + \mathrm{i}v_2 + h), \end{cases} \tag{27}$$

其中，λ 在 λ_1 附近，$\boldsymbol{G} = (G_1, G_2)^{\mathrm{T}}$ 的定义同第 2 节，$P_1: H \mapsto E_1$ 是投影算子.

方程(27)是由 $2m$ 个常微分方程组成的系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z_1}{\partial t} = (\lambda - \alpha\lambda_1) Z_1 + \beta\lambda_1 Z_2 + \\ \qquad [-\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) Z_1 + \rho(Z_1^2 + Z_2^2) Z_2] + o(|Z|^3), \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial t} = (\lambda - \alpha\lambda_1) Z_2 - \beta\lambda_1 Z_1 + \\ \qquad [-\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) Z_2 - \rho(Z_1^2 + Z_2^2) Z_1] + o(|Z|^3), \end{cases} \tag{28}$$

其中，$Z = Z_1 + \mathrm{i}Z_2$，Z_1, Z_2 均为实值的. 线性部分的主特征值仍是 $\lambda - \alpha\lambda_1 - \mathrm{i}\beta\lambda_1$，重数为 $2m$.

首先证明 $v = 0$ 在 $\lambda = \alpha\lambda_1$ 是渐近稳定的，其他结论由吸引子分叉定理可得到.

在 $\lambda = \alpha\lambda_1$，由式(27)得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x &= \int_\Omega (\lambda - \alpha\lambda_1) v^2 + G(v + h(v)) v \mathrm{d}x = \\ &\int_\Omega G(v) \mathrm{d}x + o(|v|^4) = \\ &-\sigma\int_\Omega |v|^4 \mathrm{d}x + o(|v|^4), \end{aligned}$$

这意味着 $v = 0$ 在 $\lambda = \alpha\lambda_1$ 是渐近稳定的.

所以由吸引子分叉定理，问题(15)在 $(u, \lambda) = (0, \alpha\lambda_1)$ 处分叉出一个吸引子 Σ_λ，Σ_λ 的稳定性也可以得到.

接下来证明如果 $\beta^2 + \rho^2 \neq 0$，分叉出的吸引子不含奇点.

如果 $\beta \neq 0$，则 L_λ 在 $\lambda = \alpha\lambda_1$ 处的特征值不为 0，因此，$L_\lambda: H_1 \to H$ 在 $\lambda = \alpha\lambda_1$ 附近是一个线性同胚. 也就是说，在 $(0, \alpha\lambda_1)$ 处没有分叉出定态解.

如果 $\beta = 0$，$\rho \neq 0$，

$$\int_\Omega \left[u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] \mathrm{d}x = \int_\Omega \rho |u|^4 \mathrm{d}x, \tag{29}$$

因此，Σ_λ 不含问题(15)的奇点.

如果 $\beta = \rho = 0$，问题(18)的定态方程可写为

$$\begin{cases}\lambda u-\alpha\left(1+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u-\sigma|u|^2u=0, & x\in(0,L),\ t>0,\\ u=0,\ u''=0, & x=0,L.\end{cases}\tag{30}$$

方程(30)是一个具有变分结构的方程,对应泛函为

$$F(u)=\int_0^L\left[-\frac{1}{2}|u''|^2+|u'|^2-\frac{1}{2}(\lambda-1)|u|^2+\frac{\sigma}{4}|u|^4\right]\mathrm{d}x.$$

由文献[15],方程(30)在 $(u,\lambda)=(0,\lambda)$ 分叉出一个奇点,因此,Σ_λ 一定含有方程(30)的奇点. 另一方面,方程(30)在正交群作用下是不变的,也就是说,对于任意的 $M\in O(2)$,作变换

$$\tilde{u}=Mu,\ u=(u_1,u_2),$$

方程(30)不改变形式. 如果 $u_\lambda\in\Sigma_\lambda$ 是方程(30)的一个奇点,那么 $\tilde{u}_\lambda=Mu_\lambda$ 也是方程(30)的奇点. 因此

$$\Sigma_\lambda=\{Mu_\lambda\mid M\in O(2)\}=S^1$$

由奇点构成. 证明完成.

注 3.1 对于一般区域 Ω 上的复 Swift-Hohenberg 方程,可能存在多于一个 μ_k 使得 $\lambda_1=(\mu_k-1)^2$,因此,算子 L_λ 的主特征值的重数不能确定.

注 3.2 对于一维的复 Swift-Hohenberg 方程的动态分叉在文献[14]中研究过,然而,n 维的情况还没有研究过.

4 Swift-Hohenberg 方程在周期边界条件下的分叉

在本节中,考虑 Swift-Hohenberg 方程在周期边界条件(4)的情况,我们假设方程(1)中的 q 满足 $1/2<q<1$.

令

$$H=L^2(\Omega,\mathbf{C}),\ H_1=\{u\in H^4(\Omega,\mathbf{C})\mid u\text{ 满足条件}(4)\},$$

算子 $L_\lambda=-A+B_\lambda$ 和 $G:H_1\mapsto H$ 的定义同第 2 节.

定理 4.1 对于 Swift-Hohenberg 方程(1)与边界条件(4),下面结论成立:

1) 当 $\lambda\leqslant\alpha(1-q)^2$,$u=0$ 是问题(1)、(4)的渐近稳定的平衡点;

2) 当 λ 穿越 $\alpha(1-q)^2$ 时,问题(1)、(4)在 $(u,\lambda)=(0,0)$ 处分叉出一个吸引子 $\Sigma_\lambda\subset L^2(\Omega,C)$;

3) Σ_λ 的维数介于 $4n-1$ 和 $4n$ 间,是一列 $4n$ 维胎面 M_k 的极限,且 $M_{k+1}\subset M_k$,即

$$\Sigma_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k;$$

4) 如果 $\rho\neq0$,Σ_λ 不含问题(1)、(4)的定态解. 如果 $\beta=0$,$\rho=0$,那么 Σ_λ 含有一个由奇点组成的 n 维胎面 T^n;

5) Σ_λ 吸引 $L^2(\Omega,\mathbf{C})/\Gamma$,其中 Γ 是 $u=0$ 的稳定流形,在 $L^2(\Omega,\mathbf{C})$ 中余维数为 $4n$.

证明 我们熟知线性特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta v=\mu v,\\ v(x+2k\pi)=v(x),\end{cases}\quad x\in\Omega\tag{31}$$

有特征值列

$$\mu_0=0<1=\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_k\leqslant\cdots,\qquad \mu_k\to\infty,\qquad k\to\infty\tag{32}$$

和特征函数列 $\{e_k,\mathrm{i}e_k\}$,并且是 H 和 H_1 的一组正交基,其中

$$\mu_k = |k|^2,\ k = (k_1, k_2, \cdots, k_n),\ |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2 .$$

第 2 个特征值 $\mu_1 = 1$ 有重数 $2n$, 对应特征函数为

$$\sin x_j,\ \cos x_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n . \tag{33}$$

因此,下面线性特征值问题

$$\begin{cases} L_\lambda v = \tau v, \\ v(x + 2k\pi) = v(x), \end{cases} \qquad x \in \Omega \tag{34}$$

的特征值由下式给出:

$$\lambda - \alpha(\mu_k - q)^2 - \mathrm{i}\beta(\mu_k - q)^2, \tag{35}$$

特征函数为

$$\cos kx \pm \mathrm{i} \cos kx,\ \sin kx \pm \mathrm{i} \sin kx, \qquad kx = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n,$$

其中 L_λ 如第 2 节中定义.

因此,问题(34)的主特征值是 λ,重数为 $4n$.

为了简便起见,令

$$e_{2j-1} = \sin x_j,\ e_{2j} = \cos x_j, \qquad j = 1, 2\cdots, n .$$

则 H 可分解为如下形式:

$$H = E_1 \oplus E_2,$$

$$E_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{2n} (z_{1j} + \mathrm{i} z_{2j}) e_j \mid z_{1j}, z_{2j} \in \mathbf{R} \right\} .$$

假设

$$u = u_1 + \mathrm{i} u_2,$$

$$(u_1, u_2) = (Z_1 + h_1(Z_1, Z_2), Z_2 + h_2(Z_1, Z_2)),$$

$$(Z_1, Z_2) = \sum_{j=1}^{2n} (z_{1j}, z_{2j}) e_j,$$

其中, $u_1, u_2, Z_1, Z_2, h_1, h_2$ 均为实值的.

这里 $h = h_1 + \mathrm{i} h_2 : E_1 \mapsto \widetilde{E}_2$ 是中心流形函数,且满足

$$h_1(Z_1, Z_2) = o(|Z_1| + |Z_2|) . \tag{36}$$

由 Liapunov-Schmidt 约化,我们得到如下的分叉方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}t} = \lambda Z_1 + PG_1(u), \\ \dfrac{\mathrm{d}Z_2}{\mathrm{d}t} = \lambda Z_2 + PG_2(u), \end{cases} \tag{37}$$

其中

$$PG_1(u) = \sum_{j=1}^{2n} e_j \int_\Omega [-\sigma(u_1^2 + u_2^2) u_1 + \rho(u_1^2 + u_2^2) u_2] e_j \mathrm{d}x, \tag{38}$$

$$PG_2(u) = \sum_{j=1}^{2n} e_j \int_\Omega [-\sigma(u_1^2 + u_2^2) u_2 - \rho(u_1^2 + u_2^2) u_1] e_j \mathrm{d}x, \tag{39}$$

则由方程(37)、(38)和(39)得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_{1i}}{\mathrm{d}t} = \lambda z_{1i} + \displaystyle\int_\Omega [-\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) Z_1 + \rho(Z_1^2 + Z_2^2) Z_2] e_i \mathrm{d}x + o(|z|^3), \\ \dfrac{\mathrm{d}z_{2i}}{\mathrm{d}t} = \lambda z_{2i} + \displaystyle\int_\Omega [-\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) Z_2 - \rho(Z_1^2 + Z_2^2) Z_1] e_i \mathrm{d}x + o(|z|^3) . \end{cases}$$

由文献[15]中吸引子分叉定理,可以得到问题(1)、(4)在 $(u,\lambda)=(0,0)$ 处分叉出一个吸引子 Σ_λ 及其稳定性.

如果 $\rho\neq0$,类似定理3.1中的证明,我们可以证明 Σ_λ 不含式(1)、(4)的定态解.

如果 $\beta=0,\rho=0$,则方程简化为一实方程,由文献[13],得到 Σ_λ 含有一个由奇点组成的 n 维胎面 T^n.

证明完成.

注4.1 本节中,我们考虑了 $1/2<q<1$ 时的情况,然而,当 $0<q<1/2$ 时,吸引子分叉同样可以讨论. 这种情况下,定理4.1中的 $\alpha(1-q)^2$ 要被替换为 αq^2,分叉出的吸引子的维数介于1和2之间. 其他几条结论类似于定理4.1也可得到,我们在此不做具体讨论. 当 $q=1$,$A+I$ 是一个线性同胚,把 A 与 λ 分别替换为 $A+I$ 与 $\lambda-1$,相应结论仍然可以得到. 当 $q=1/2$,$\alpha(1-q)^2=\alpha q^2$,此时吸引子的维数发生改变.

注4.2 在文献[14]中,1维复 Swift-Hohenberg 方程在周期边界条件下的动态分叉在第4节中给出讨论,这里我们讨论的是 n 维情况.

参考文献:

[1] Swift J B, Hohenberg P C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability [J]. *Phys Rev A*, 1977, **15**(1): 319-328.

[2] Peletier L A, Williams J F. Some canonical bifurcations in the Swift-Hohenberg equation [J]. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2007, **6**(1): 208-235.

[3] Peletier L A, Rottschäfer V. Pattern selection of solutions of the Swift-Hohenberg equation [J]. *Phys D*, 2004, **194**(1/2): 95-126.

[4] Peletier L A, Rottschäfer V. Large time behaviour of solutions of the Swift-Hohenberg equation [J]. *C R Math Acad Sci Paris*, 2003, **336**(3): 225-230.

[5] Collet P, Eckmann J P. *Instabilities and Fronts in Extended Systems*[M]. Princeton Series in Physics. New Jersey: Princeton University Press, 1990.

[6] Budd C J, Kuske R. Localized periodic patterns for the non-symmetric generalized Swift-Hohenberg equation [J]. *Phys D*, 2005, **208**(1/2): 73-95.

[7] Cross M C, Hohenberg P C. Pattern formation outside of equilibrium [J]. *Rev Mod Phys*, 1993, **65**(3): 851-1112.

[8] Buceta J, Lindenberg K, Parrondo J M R. Stationary and oscillatory spatial patterns induced by global periodic switching[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **88**(2): 024103.

[9] Tribelskii M I. Short wavelength instability and transition to chaos in distributed systems with additional symmetry [J]. *Phys Uspekhi*, 1997, **40**(2): 159-180.

[10] Hohenberg P C, Swift J B. Effects of additive noise at the onset of Rayleigh-Bénard convection [J]. *Phys Rev A*, 1992, **46**(8): 4773-4785.

[11] Staliunas K, Sanchez-Morcillo V J. Dynamics of phase domains in the Swift-Hohenberg equation [J]. *Phys Lett A*, 1998, **241**(1): 28-34.

[12] Aranson I, Assenheimer M, Steinberg V. Large-scale flow and spiral core instability in Rayleigh-Bénard convection [J]. *Phys Rev E*, 1997, **55**(5): R4877-R4880.

[13] Yari M. Attractor bifurcation and final patterns of the n-dimensional and generalized Swift-Hohenberg equations [J]. *Discr Contin Dyn Syst, Ser B*, 2007, **7**(2): 441-456.

[14] Han J, Yari M. Dynamic bifurcation of the complex Swift-Hohenberg equation [J]. *Discr Contin Dyn Syst , Ser B*, 2009, **11**(4): 875-891.

[15] Ma T, Wang S. *Bifurcation Theory and Applications*[M]. Nonlinear Science Ser A. Vol **53**. New Jersey: World Scientific, 2005.

[16] Ma T, Wang S. Dynamic bifurcation of nonlinear evolution equations [J]. *Chin Ann Math B*, 2005, **26**(2): 185-206.

[17] Chen Y J, Gao H J, Zhu Y P. Exponential attractors for the complex Swift-Hohenberg equation in some Banach spaces [J]. *Acta Math Appl Sinica*, 2007, **30**(4): 699-706.

Dynamic Bifurcation of the *n*-Dimensional Complex Swift-Hohenberg Equation

XIAO Qing-kun,　GAO Hong-jun

(*Institute of Mathematics*, *School of Mathematical Sciences*, *Nanjing Normal University*, *Nanjing* 210046, *P. R. China*)

Abstract: The bifurcation of the complex Swift-Hohenberg equation was considered. Attractor bifurcation of the complex Swift-Hohenberg equation on a one-dimensional domain $(0, L)$ was investigated. It's also shown that the n-dimensionalcomplex Swift-Hohenberg equation bifurcates from the trivial solution to an attractor under the Dirichlet boundary condition on a general domain and under the periodic boundary condition when the bifurcation parameter λ crosses some critical value. The stability property of the bifurcation attractor is also analyzed.

Key words: Swift-Hohenberg equation; bifurcation; stability; center manifold