文章编号:1000-0887(2010)06-0690-13

接触表面中多场耦合方程的边界层特征解*

侯　磊[1,2], 李涵灵[1], 张家健[1], 林德志[1], 仇　璘[2,3]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所, 上海 200240;
3. 上海交通大学 数学系,上海 200240)

(郭兴明推荐)

摘要： 介绍由约束场和受重力影响的对流扰动耦合而成的衰减平衡向量场动力学方程的渐近求解. 为分析实验室内微观与自然界中宏观现象的正则和奇异扰动问题. 运用复合尺度方法进行 Fourier 调和分析、尺度变化,并引进新的参数,将一个复杂的三维约束耦合动力学方程降维投影并转化成复空间里一维的边界层问题. 通过渐近摄动分析,给出多场耦合中扰动问题的特征函数边界层解法,在例 2 中对流场扰动问题分析,得出从指数振荡解过渡到代数解的转点. 进一步分析计算非线性特征值问题并做了渐近摄动分析,最后给出多场耦合中扰动问题的特征值边界层解法. 最后,特征关系式的各参数表明其在接触表面中对动力衰变的关键影响.

关　键　词： 耦合动力学方程; 边界层问题; 特征值; 渐近摄动分析; 转点

中图分类号： O242.1　　**文献标志码：** A

DOI： 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.06.006

引　　言

早在 18 世纪初叶,Faraday 及其同时代的学者就认识到,在磁场中运动的固体或流体将经受着一个电动势的作用. 如果运动着的固体或流体是导体的话,那么将在导体内形成一个电回路,在这个回路内将有电流流动;或者导体与外界物质一道形成一个电回路,而在导体内也存在电流流动. 这样,电流和磁场间就存在互相作用,即磁场使运动的导体诱导起电流产生感应电流;反之诱导电流也产生诱导磁场而影响原来的外加磁场.

当运动的导体是耦合流场时,问题就更为复杂些. 特别,如果研究流场在约束场中运动规律的学科称之为耦合动力学. 因此,从本质上说耦合动力学就是研究耦合速度场和约束场之间相互作用的一门科学.

衰减平衡向量场动力学考察耦合在约束场作用下的运动规律,也即考察约束场如何影响着耦合运动,反之耦合的运动又是如何地影响着约束场. 因此,必须考察耦合运动的速度场和介质内部的约束场. 而实验室内微观与自然界中宏观现象又向我们提出运用复合尺度方法进

* **收稿日期：** 2010-01-23; **修订日期：** 2010-05-12
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10871225);上海市浦江人才计划资助项目(D)(06PJ14416)
作者简介： 侯磊(1957—),男,上海人,教授(联系人. Tel:+86-21-66132924;E-mail: houlei@shu.edu.cn).

行分析求解的要求.本文将一个复杂的三维约束耦合动力学方程转化成复空间里一维的边界层问题,并进行了渐近摄动分析,得出多场耦合中扰动问题的特征值边界层解法.

1　问题的表述

我们首先考虑的是简单的模型板组成的一个无限平面流动薄层指定的剪切平衡向量场

$$\underline{B_0} = \underline{e_x}B_{0x}(y) + \underline{e_z}B_{0z}(y),\ \underline{V_0} = \underline{e_x}V_{0x}(y) + \underline{e_z}V_{0z}(y),$$

受到的重力加速度 $\underline{e_y}g$ 指向 y 轴正方向.假设平衡速度场 $\underline{V_0}$ 平行于约束场 $\underline{B_0}$,平衡密度 ρ 假定只在 y 轴上改变.我们认为阻抗性的约束场方程对于不可压缩的平衡速度场,有统一的阻抗率和只包括垂直分量的碰撞的一部分粘性张量.由约束场和受重力影响的对流扰动耦合而成的衰减平衡向量场动力学方程由以下 4 个方程[1-4]组成:

$$\nabla\times\rho\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V}\cdot\nabla\underline{V}\right) = \nabla\times\left[\frac{1}{c}(\underline{j}\times\underline{B}) + \rho\underline{g} + \mu_{\perp}\nabla^2\underline{V}\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla\times(\underline{V}\times\underline{B}) + \frac{\eta}{4\pi}\nabla^2\underline{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{V}) = 0, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\underline{B} = \nabla\cdot\underline{V} = 0, \tag{4}$$

其中式(1)为动量守恒方程,式(2)为扩散方程,式(3)为连续方程,式(4)则反映约束场为无源场和约束场的不可压缩性(实际上模型允许轻微的压缩变形).ρ 和 V 为密度和速度,η 为阻抗系数,$\mu_{\perp}$ 为粘度的垂直系数.

流动的速度场、平衡约束向量场和密度考虑平衡量和摄动量,$\underline{V} = \underline{V_0} + \underline{V_1}$, $\underline{B} = \underline{B_0} + \underline{B_1}$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$,其中$\underline{V_1}$,$\underline{B_1}$,ρ_1 为摄动量.

由广义 Maxwell 方程,我们有

$$\underline{j} = \frac{c}{4\pi}\nabla\times\underline{B},$$

则

$$\frac{1}{c}\nabla\times(\underline{j}\times\underline{B}) = \frac{1}{c}\nabla\times\left(\frac{c}{4\pi}\nabla\times\underline{B}\right)\times\underline{B} = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[(\underline{B}\cdot\nabla)\underline{B} - \frac{1}{2}\nabla B^2\right] =$$

$$\frac{1}{4\pi}\nabla\times(\underline{B}\cdot\nabla)\underline{B},$$

动量方程可以写为

$$\nabla\times\rho\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V}\cdot\nabla\underline{V}\right) = \nabla\times\left[\frac{1}{4\pi}(\underline{B}\cdot\nabla)\underline{B} + \rho\underline{g} + \mu_{\perp}\nabla^2\underline{V}\right]. \tag{5}$$

线性化[1].对卷积动量方程(5)应用算子 $\underline{e_y}\cdot\nabla\times$,然后得到两个耦合方程描述了 y 分量的一阶速度 V_{y1} 和平衡约束场 B_{y1}.取所有一阶摄动量转化为像单纯 Fourier 调和函数 $\exp[\mathrm{i}(k_x x + k_z z) + \omega t]$,其中 $\boldsymbol{k} = \{k_x, 0, k_z\}$ 是水平波动向量而 ω 是增长速度,则我们从方程(5)得到

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{V_1} + \underline{V_0}\cdot\nabla\underline{V_1} + \underline{V_1}\cdot\nabla\underline{V_0}\right) =$$

$$\underline{e_y}\cdot\left\{\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\left[(\underline{B_0}\cdot\nabla)\underline{B_1}+(\underline{B_1}\cdot\nabla)\underline{B_0}\right]+\nabla\times\nabla\times(\rho\underline{g}+\mu_{\perp}\nabla^2\underline{V_1})\right\}. \quad (6)$$

现在分别对方程(6)做如下调和分析.方程左边各项简化为

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{V_1}=w\left[k^2\rho_0V_{y1}-(\rho_0V_{y1}')'\right],$$

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0(\underline{V_0}\cdot\nabla)\underline{V_1}=\mathrm{i}\left[k^2\rho_0(\underline{\boldsymbol{k}}\cdot\underline{\boldsymbol{V}_0})V_{y1}-(\rho_0(\underline{\boldsymbol{k}}\cdot\underline{\boldsymbol{V}_0}))'V_{y1}'-\rho_0(\underline{\boldsymbol{k}}\cdot\underline{\boldsymbol{V}_0})V_{y1}''\right],$$

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0(\underline{V_1}\cdot\nabla)\underline{V_0}=\mathrm{i}\left[(\underline{\boldsymbol{k}}\cdot\underline{\boldsymbol{V}_0})''\rho_0V_{y1}+(\underline{\boldsymbol{k}}\cdot\underline{\boldsymbol{V}_0})'(\rho_0V_{y1})'\right].$$

这是在 y 上的微分,而方程右边各项简化为

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times(\underline{B_0}\cdot\nabla)\underline{B_1}=\mathrm{i}\left[k^2(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}-(\underline{k}\cdot\underline{B_0})'B_{y1}'-(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}''\right],$$

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times(\underline{B_1}\cdot\nabla)\underline{B_0}=\mathrm{i}\left[(\underline{k}\cdot\underline{B_0})''B_{y1}+(\underline{k}\cdot\underline{B_0})'B_{y1}'\right],$$

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_1\underline{g}=k^2\rho_1g,$$

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\mu_{\perp}\nabla^2(\underline{V_1})=-\mu_{\perp}(\nabla^2)^2\underline{V_{y1}}=\mu_{\perp}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)\underline{V_{y1}}.$$

对于密度摄动量 ρ_1 我们可以应用式(3)线性化 $\rho_1[\omega+\mathrm{i}(k\cdot V_0)]+\rho_0'V_{y1}=0$ 得到

$$k^2\rho_1g=-k^2g\frac{\rho_0'V_{y1}}{\omega+\mathrm{i}(k\cdot V_0)}.$$

根据磁流动力学专家 Furth, Killeen 和 Rosenbluth(1963)的方法[4],我们现在实行的标准量纲变量如下:

$$\psi=\frac{B_{y1}}{B},\ W=-\mathrm{i}k\tau_{\mathrm{R}}V_{y1},\ F=\frac{(\underline{k}\cdot\underline{B_0})}{kB},\ \alpha=ka,$$

$$P=\omega\tau_{\mathrm{R}},\ S=\frac{\tau_{\mathrm{R}}}{\tau_{\mathrm{H}}},\ \rho=\frac{\rho_0}{\langle\rho\rangle},\ k^2=k_x^2+k_z^2,\ y=a\mu,$$

$$R^*=\tau_{\mathrm{R}}k\cdot\underline{V_a}(y),\ G=-g\frac{\rho_0'}{\rho_0}\tau_{\mathrm{H}}^2,\ N^*=4\pi\frac{\mu_{\perp}}{\eta}.$$

这里 $\tau_{\mathrm{R}}=4\pi a^2/\eta$, $\tau_{\mathrm{H}}=a\sqrt{4\pi\rho}/B$ 是边界层的阻抗和约束耦合动力学的时间尺度,S 是拟 Reynolds 数,$\langle\rho\rangle$ 和 B 是密度量和约束场强度,a 是流层的特征量纲.在阻抗的扩散时间尺度上,F 表示约束场的单位尺度,R^* 表示流场的单位尺度.

时间尺度 τ_{R} 和 τ_{H} 根据不同问题的考虑会有相应的变化.例如,在星体的内部 $\tau_{\mathrm{R}}\sim10^9$ a,在太阳黑子中为 $\tau_{\mathrm{R}}\sim50$ a;而在试验室高热原子核反应的融合等离子体中为 $\tau_{\mathrm{R}}\sim10$ Ms.典型的中性氢云具有10^4 个太阳的质量,密度达到 10 m_{H} 和10^{-6} Gs 的磁场,时间尺度为 $\tau_{\mathrm{H}}\sim10^7$ a,然而在试验室高热原子核反应的融合等离子体中 $\tau_{\mathrm{H}}\sim10^{-6}$ μs[4-6].抗扩散与磁耦合动力学的时间尺度的比是非常大的.拟 Reynolds 数 S 的值对于试验室高热原子核反应的融合等离子体基本在$10^3\sim10^7$ 之间.在天体物理学的应用中特征量纲 a 是非常大的,S 同样地被发现是一个大的数字.高的拟 Reynolds 数的意义就是对阻抗扩散影响微小的,在边界层外稳态约束场被认为是一个很好的逼近.

由这些变量项,我们从式(6)左边有

$$\underline{e_y}\cdot\nabla\times\nabla\times\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{V_1}+\underline{V_0}\cdot\nabla\underline{V_1}+\underline{V_1}\cdot\nabla\underline{V_0}\right)=$$

$$\omega\,[k^2\rho_0V_{y1}-(\rho_0V_{y1}')']+\mathrm{i}\,[k^2\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})V_{y1}-\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})V_{y1}''+(\underline{k}\cdot\underline{V_0})''\rho_0V_{y1}]=$$
$$[\omega+\mathrm{i}(\underline{k}\cdot\underline{V_0})]\,[k^2\rho_0V_{y1}-(\rho_0V_{y1}')']+\mathrm{i}\,[\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})']'V_{y1}=$$
$$\frac{1}{\mathrm{i}k\tau_R^2}[\omega\tau_R+\mathrm{i}\tau_R(\underline{k}\cdot\underline{V_0})]\left[\frac{\alpha^2}{a^2}\rho_0V_{y1}-\frac{1}{a^2}(\rho_0V_{y1}')'\right]\mathrm{i}k\tau_R+$$
$$\frac{\mathrm{i}k\tau_RV_{y1}}{k\tau_R^2}[\rho_0(\underline{k}\cdot\underline{V_0})']'\tau_R=$$
$$\frac{1}{\mathrm{i}ka^2\tau_R^2}[P+\mathrm{i}R^*][-\alpha^2\rho_0W+(\rho_0W')']+\mathrm{i}\frac{W}{\mathrm{i}k\tau_R^2a^2}[\rho_0(R^*)']'=$$
$$\frac{1}{\mathrm{i}ka^2\tau_R^2}\{[P+\mathrm{i}R^*][(\rho_0W')'-\alpha^2\rho_0W]+\mathrm{i}[\rho_0(R^*)']'W\}.$$

上面是对 μ 的微分. 同样从式(6)右边有

$$\underline{e_y}\cdot\left\{\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times[(\underline{B_0}\cdot\nabla)\underline{B_1}+(\underline{B_1}\cdot\nabla)\underline{B_0}]+\nabla\times\nabla\times(\rho\underline{g}+\mu_\perp\nabla^2\underline{V_1})\right\}=$$
$$\frac{\mathrm{i}}{4\pi}[k^2(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}-(\underline{k}\cdot\underline{B_0})B_{y1}''+(\underline{k}\cdot\underline{B_0})''B_{y1}]+$$
$$k^2\rho_1g-\mu_\perp\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)\underline{V_{y1}}=$$
$$\frac{\mathrm{i}(\underline{k}\cdot\underline{B_0})}{4\pi}\left[k^2B_{y1}-B_{y1}''+\frac{(\underline{k}\cdot\underline{B_0})''}{(\underline{k}\cdot\underline{B_0})}B_{y1}\right]+k^2\rho_1g-\frac{\mu_\perp}{a^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\alpha^2\right)\frac{W}{-\mathrm{i}k\tau_R}=$$
$$\mathrm{i}\frac{1}{ka^2\tau_R^2}\left\{\left[\psi''-\psi\left(\alpha+\frac{F''}{F}\right)\right]\alpha^2S^2F+\frac{\alpha^2S^2GW}{P+\mathrm{i}R^*}+N^*\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\alpha^2\right)^2W\right\}.$$

由式(6)左右两边相等得

$$\frac{1}{\mathrm{i}ka^2\tau_R^2}\{[P+\mathrm{i}R^*][(\rho_0W')'-\alpha^2\rho_0W]+\mathrm{i}[\rho_0(R^*)']'W\}=$$
$$\frac{1}{\mathrm{i}ka^2\tau_R^2}\left\{\left[\psi''-\psi\left(\alpha+\frac{F''}{F}\right)\right]\alpha^2S^2F+\frac{\alpha^2S^2GW}{P+\mathrm{i}R^*}+N^*\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\alpha^2\right)^2W\right\}.$$

所以动量方程最后变为

$$[P+\mathrm{i}R^*][(\rho_0W')'-\alpha^2\rho_0W]+\mathrm{i}[\rho_0(R^*)']'W=$$
$$\left[\psi''-\psi\left(\alpha+\frac{F''}{F}\right)\right]\alpha^2S^2F+\frac{\alpha^2S^2GW}{P+\mathrm{i}R^*}+N^*\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}-\alpha^2\right)^2W. \tag{7}$$

同样,对扩散方程(2)线性化并采取 y 分量得到

$$wB_{y1}=\mathrm{i}(\underline{k}\cdot\underline{B_0})V_{y1}-\mathrm{i}(\underline{k}\cdot\underline{V_0})B_{y1}+\frac{\eta}{4\pi}\nabla^2B_{y1}. \tag{8}$$

通过量纲化方程(2),可以化为

$$(P+\mathrm{i}R^*)\psi+FW=\psi''-\alpha^2\psi. \tag{9}$$

2　多场耦合中扰动问题的特征函数解

多场耦合中扰动问题的边界层解可以分为边界层内解和外解问题 2 个部分[7-9]. 按照前面的分析,当 S 很大时,对阻抗扩散影响微小,边界层外稳态约束场被认为是一个很好的逼近. 对方程(7) 两边除以 S^2,当 G 充分小时,由 $1/S^2\to0$ 可以得到外解问题微分方程 $\psi''-\psi(\alpha+$

$F''/F)=0$. 对此方程我们可以利用常规分析方法得到渐近解. 明显地, $g=\alpha$ 是方程的一个解. 将其代入有

$$\psi=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\alpha\mu}(F+\alpha),\ \mu>0\\ \mathrm{e}^{\alpha\mu}(-F+\alpha),\ \mu<0\end{cases}=\mathrm{e}^{-\alpha|\mu|}(|F|+\alpha),$$

$$\psi'=\begin{cases}-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\mu}(F+\alpha)+\mathrm{e}^{-\alpha\mu}(1-F^2), & \mu>0,\\ \alpha\mathrm{e}^{\alpha\mu}(-F+\alpha)+\mathrm{e}^{-\alpha\mu}(-1+F^2), & \mu<0,\end{cases}$$

所以有外解与内解在 0 点左右匹配的跳跃条件, 即内解的边界条件

$$\psi'(0+)=-\alpha^2+1,\ \psi'(0-)=\alpha^2-1,$$

$$\Delta'_{\mathrm{ext}}=\frac{\psi'(0+)-\psi'(0-)}{\psi(0)}=\frac{-2\alpha^2+2}{2}=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right).$$

为计算边界层的内解, 文献[1-3]已对 MHD 方程进行了线性变化, 通过 Fourier 调和分析、尺度变化, 并引进新的参数, 将一个复杂的三维耦合动力学方程转化成复空间里一维的边界层问题的四阶微分方程[8]

$$(P+\mathrm{i}R\theta)\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\theta^2}-\theta^2H+\frac{G}{(F')^2}\frac{H-\mathrm{i}R}{P+\mathrm{i}R\theta}-N\frac{\mathrm{d}^4H}{\mathrm{d}\theta^4}=P\theta-\frac{F''}{\Delta F'},\tag{10}$$

$$\Delta'=\Delta\int_{-\infty}^{\infty}(P+\theta H)\,\mathrm{d}\theta,\tag{11}$$

其中特征值 P 为复数, 特征函数 H 为复函数, R 为切变流特征参数, G 为重力参数, N 为粘度参数.

边界层内解的特征函数渐近扰动方法如下. 对边界层方程(10)进行 $H(\theta)$ Fourier 变换, 定义

$$h(k)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta,$$

将原物理场方程转变为 Fourier 空间内微分算子特征函数渐近求解问题.

令 $\varepsilon=1/R$, 可以得到粘性撕裂模式的微分算子[9]

$$Lh=h''+\frac{1}{\varepsilon}(k^2h)'-(k^2P+k^4N)h$$

和三阶微分算子(也可以称为粘性撕裂 G 模式算子)

$$Mh=\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}-P\right)Lh-\frac{G}{(F')^2}h=$$

$$2\pi\mathrm{i}P\frac{1}{\varepsilon}\delta''(k)-2\pi\left(\mathrm{i}P^2+\frac{RF''}{\Delta F'}\right)\delta'(k)+2\pi\left[\frac{PF''}{\Delta F'}-\mathrm{i}\frac{G}{\varepsilon(F')^2}\right]\delta(k).$$

下面讨论主要特征函数渐近扰动问题

$$\varepsilon h''+(k^2h)'-\varepsilon Pk^2h=0,\qquad \varepsilon\to0,$$

$$-k_0<k\leqslant0,\ h''-Pk^2h=0\Rightarrow h_1\sim k^{-1/2}\mathrm{e}^{\pm0.5P^{1/2}k^2},$$

$$-k<k_0<0,\ \varepsilon h''+(k^2h)'=0\Rightarrow h_2\sim\mathrm{e}^{-k^3/3\varepsilon},\qquad k\to-\infty.$$

对于 $-k_0<k\leqslant0$, 我们可以忽略流场项, 但对于大的 k, 则是流场项起主导作用. 所以当 $k\to-\infty$ 时我们可以忽略 P 惯性项.

因为当流场项近似地平衡 P 惯性项, 解的转化是从指数振荡解到代数解的过渡, 即

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}k^2h'\right| \approx |Pk^2h|.$$

因为在摄动区域有 $h' \approx kP^{1/2}h$,所以有 $|\varepsilon^{-1}k_0^3P^{1/2}h| \approx |Pk_0^2h|$, 可以得出从指数振荡解到代数解的过渡的转点

$$k_0 \approx \frac{1}{\varepsilon}|P|^{1/2}.$$

因此,当 $0 \leqslant \chi \leqslant \pi$,对于 $Mh = 0$, $-\infty < k < 0, 0 < k < +\infty$,我们可以根据 $\mathrm{Re}(P)$ 和 N 的值把特征函数归为 4 种形态:

1）当 $N = 0, \mathrm{Re}(P) > 0$ 时,

$$h(k) \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{-k^3/(3\varepsilon)}, & k \to +\infty, \\ k^{-2}\mathrm{e}^{\varepsilon Pk}, & k \to -\infty; \end{cases}$$

2）当 $N = 0, \mathrm{Re}(P) < 0, \varepsilon \to 0$ 时,

$$h(k) \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{-k^3/(3\varepsilon)}, & k \to +\infty, \\ k^{-2}, & k \to -\infty; \end{cases}$$

3）当 $N = 0, \mathrm{Re}(P) < 0$ 时,

$$h(k) \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{-k^3/(3\varepsilon)}, & k \to +\infty, \\ k^{-1/2}\mathrm{e}^{\pm 0.5P^{1/2}k^2}, & -k_0 < k \leqslant 0, \\ k^{-2}, & -\infty < k < -k_0; \end{cases}$$

4）当 $N \neq 0$ 时,

$$h(k) \sim \begin{cases} \exp\{-[R + \sqrt{1/\varepsilon^2 + 4N}]k^3/6\}, & k \to +\infty, \\ \exp\{-[R - \sqrt{1/\varepsilon^2 + 4N}]k^3/6\}, & k \to -\infty. \end{cases}$$

在 4) 中,由于我们引入了粘度 N 的影响,$h(k)$ 的结构产生加速衰减的变化.

考虑到流场 ε 变得很小时增长率 P 的特性,我们进行的渐近性的研究使我们能够在很小的 ε 极限分析下估计 P. 粘性撕裂 N-G-模式方程给出如下:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} - P\right)Lh - \frac{G}{(F')^2}h = 0, \qquad -\infty < k < 0,\ 0 < k < \infty, \tag{12}$$

这里,

$$Lh = \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}k^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k^2h) - (k^2P + k^4N)h \tag{13}$$

是粘性撕裂模式算子. 在原点 $k = 0$ 相关的边界和跳跃条件为

$$h(\pm\infty) = 0,\ h(0+) = 1,\ h'(0\pm) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\chi}, \tag{14}$$

$$h''(0+) - h''(0-) = -2\pi\mathrm{i}\frac{G}{(F')^2}, \tag{15}$$

而特征值关系为

$$2\pi P = \frac{h(0-)}{h'(0-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi} - \frac{h(0+)}{h'(0+)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}, \qquad -\pi < \chi < \pi. \tag{16}$$

在原点两边, h 和 h' 的值都需要得到 P 的渐近估计.

本文中我们先进行渐近分析以确定特征解 h,然后预测小的参数 ε 下的特征值 P 以支持数

值分析. 由 $Lh=0$ 渐近逼近以确定撕裂模的增长率. Bondeson 和 Persson(1986)[7] 发现粘性限制在 $N=0$ 的情况下,当 ε 变得很小时撕裂模的增长率,表现为如下形式:

$$P \sim \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}e^{i\chi}\right)^{1/2} + \frac{\cos\chi\Gamma(1/3)}{2\pi\varepsilon^{-1/3}3^{2/3}}, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

从这里可以看出当 ε 变小时 $\mathrm{Re}(P)$ 增大,其物理解释是剪切流沿 $\underline{B_0}$ 破坏撕裂模式,这和 Tokamaka 中性束注入产生明显的后果一样. 有些学者指出了大量流动($\varepsilon \to 0$) 可能存在因为 $|\chi| < \pi$,所以撕裂模相应的 $\Delta' < 0$(例如 $\pi/2 < |\chi| < \pi$) 可引起不稳定.

3 大流量限制下粘性撕裂模式特征值 P 渐近估计

一个估计特征值 P 问题的渐近方法,对于粘性撕裂方程,可以表示为一个奇异摄动展开:

$$h = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{18}$$

这里 $h_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是 n 次摄动解, $h_n \to 0, \varepsilon \to 0$. n 次解 h_n 和$(n-1)$ 次解 h_{n-1} 渐近递推关系是

$$\begin{cases} \varepsilon h_0'' + (k^2 h_0)' = 0, \\ \varepsilon h_n'' + (k^2 h_n)' = \varepsilon(k^2 P + k^4 N)h_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\cdots. \end{cases} \tag{19}$$

为了得到足够小的参数 ε,解 h_n 和 $h_n^{(m)}(m=0,1,2)$ 假定在定性讨论的特征函数 $h(k)$ 是衰减的. 0 阶解 $h_0(k)$ 和 n 阶解 $h_n(k)$ 满足边界条件

$$h_0(\pm\infty) = h_0'(\pm\infty) = 0,\ h_0(\pm\infty) = h_n'(\pm\infty) = 0, \tag{20}$$

所以我们可以分别对于正负 k 求解式(19).

3.1 零阶渐近解 $h_0(k)$

从式(12)的齐次方程可以得到一个简单的零阶解一般形式

$$h_0(k) = c_0 e^{-\xi} + c_1 e^{-\xi}\int_0^k e^{\xi}dk,\ \xi = \frac{1}{3\varepsilon}k^3, \tag{21}$$

这里 c_0 和 c_1 是任意常数.

从式(19)取 $n=1$,对零阶方程,分别在当 $k>0$ 时在$[k,+\infty)$上积分和在 $k<0$ 时在$(-\infty, k]$ 上积分得

$$h_1' + \frac{1}{\varepsilon}k^2 h_1 = P\int_{\infty}^{k} k^2 h_0 dk + N\int_{\infty}^{k} k^4 h_0 dk, \qquad k > 0,$$

$$h_1' + \frac{1}{\varepsilon}k^2 h_1 = P\int_{-\infty}^{k} k^2 h_0 dk + N\int_{-\infty}^{k} k^4 h_0 dk, \qquad k < 0.$$

再应用 L' Hospital 法则得到

$$h_0(k) = c_0 e^{-\xi}, \qquad k > 0. \tag{22}$$

同样,对于 $k<0$, 我们从式(12)有

$$h_0(k) = c_1 e^{-\xi}\int_{-\infty}^{k} e^{\xi}dk = o(k^{-2}), \qquad k \to -\infty. \tag{23}$$

由式(22)和(23),在 0 点 $k=\pm 0$ 处解 $h_0(k)$ 的值是

$$h_0(0+) = c_0,\ h_0'(0+) = 0, \tag{24}$$

$$h_0(0-) = \frac{c_1\varepsilon^{1/3}}{3^{2/3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\ h_0'(0-) = c_1. \tag{25}$$

3.2 高阶渐近解 $h_n(k)$

经使用0阶解 $h_0(k)$，我们现在可以估计在0点左右两边高阶解 $h_n(k)$ 的情况. 由式(19)，我们得到

$$h_1'(0+) = P\int_{\infty}^{0} k^2 h_0 \mathrm{d}k + N\int_{\infty}^{0} k^4 h_0 \mathrm{d}k = Pc_0\int_{\infty}^{0} k^2 \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}k + Nc_0\int_{\infty}^{0} k^4 \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}k =$$
$$-\varepsilon Pc_0 - \frac{2Nc_0\varepsilon^{5/3}}{3^{1/3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \tag{26}$$

$$h_1'(0-) = Pc_1\int_{-\infty}^{0} k^2 \mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}k'\mathrm{d}k + Nc_1\int_{-\infty}^{0} k^4 \mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}k'\mathrm{d}k =$$
$$Pc_1\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{\xi'} k^{-2}\mathrm{e}^{\xi'}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\xi + Nc_1\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0} k^2\mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{\xi'} k^{-2}\mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\xi =$$
$$3^{-2/3}Pc_1\varepsilon^{4/3}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\xi}\Gamma\left(\frac{1}{3},\xi\right)\mathrm{d}\xi + Nc_1\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0} \xi^{2/3}\mathrm{e}^{-\xi}\Gamma\left(\frac{1}{3},\xi\right)\mathrm{d}\xi =$$
$$O(P\varepsilon^{4/3}, N\varepsilon^2). \tag{27}$$

在这里

$$\Gamma(a,x) = \int_{x}^{\infty} u^{a-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \qquad (a > 0, x > 0)$$

是不完全 Gamma 函数.

为了估计在0点左右两边一阶解 $h_1(k)$，我们对等式(19)左右两边各乘以 e^{ξ}，然后对于 $k > 0$ 时在 $[0,k]$ 上积分和对于 $k < 0$ 是在$(-\infty,k]$ 上积分，去寻求收敛解. 因此我们有

$$\begin{cases} h_1\mathrm{e}^{\xi} = P\int_{0}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\int_{\infty}^{k} k^2 h_0 \mathrm{d}k\mathrm{d}k' + N\int_{0}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\int_{\infty}^{k} k^4 h_0\mathrm{d}k\mathrm{d}k', & k > 0, \\ h_1\mathrm{e}^{\xi} = P\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} k^2 h_0 \mathrm{d}k\mathrm{d}k' + N\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} k^4 h_0\mathrm{d}k\mathrm{d}k', & k < 0, \end{cases} \tag{28}$$

这里 h_1 满足假设条件 $h_1(\pm\infty) = 0$.

这样，在0点正边上，按照标准化的解 $h(0+) = c_0$，h_1 给出如下：

$$h_1(0+) = 0. \tag{29}$$

在0点负边上，h_1 给出如下：

$$h_1'(0-) = Pc_1\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} k^2\mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k\mathrm{d}k' +$$
$$Nc_1\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} k^4\mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k\mathrm{d}k' =$$
$$Pc_1\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} \mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{\xi'} k^{-2}\mathrm{e}^{\xi'}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\xi\mathrm{d}k +$$
$$Nc_1\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} k^2\mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{k'} k^{-2}\mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\xi\mathrm{d}k =$$
$$3^{-2/3}Pc_1\varepsilon^{4/3}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} \mathrm{e}^{-\xi}\Gamma\left(\frac{1}{3},\xi\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}k +$$
$$Nc_1\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k} \xi^{2/3}\mathrm{e}^{-\xi}\int_{-\infty}^{k'} \xi^{-2/3}\mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\xi\mathrm{d}k =$$
$$3^{-4/3}Pc_1\varepsilon^{5/3}\int_{-\infty}^{0} \xi^{-2/3}\mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k'} \mathrm{e}^{-\xi}\Gamma\left(\frac{1}{3},\xi\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi +$$

$$3^{-2/3}Nc_1\varepsilon^{7/3}\int_{-\infty}^{0}\xi^{-2/3}\mathrm{e}^{\xi}\int_{-\infty}^{k'}\xi^{2/3}\mathrm{e}^{-\xi}\Gamma\left(\frac{1}{3},\xi\right)\mathrm{d}\xi=$$
$$O(P\varepsilon^{5/3},N\varepsilon^{7/3}),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{30}$$

同样方法,我们可以得到二阶和三阶渐近解

$$h_2'(0+)\sim -P\int_{\infty}^{0}k^2(Pc_0\varepsilon^2k\mathrm{e}^{-\xi})\mathrm{d}k+N\int_{\infty}^{0}k^4(-P^2c_0\varepsilon^2k\mathrm{e}^{-\xi})\mathrm{d}k=$$
$$3^{-2/3}P^2c_0\varepsilon^{7/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)+3NPc_0\varepsilon^3 \tag{31}$$

和

$$|h_2'(0-)|\ll|h_0'(0-)|=c_1,\qquad \varepsilon\to 0,k<0. \tag{32}$$

所以当 ε 变小时 $h_2'(0-)$ 可能会被忽略.

二阶解 h_2 估计如下:

$$h_2=\mathrm{e}^{-\xi}\left[P\int_0^{k'}\mathrm{e}^{\xi}\int_0^{k}k^2h_1\mathrm{d}k\mathrm{d}k'+N\int_0^{k'}\mathrm{e}^{\xi}\int_0^{k}k^4h_1\mathrm{d}k\mathrm{d}k'\right]=$$
$$\mathrm{e}^{-\xi}\cdot O(P^2\varepsilon^{11/3},NP\varepsilon^{13/3}),\qquad \varepsilon\to 0,\ K>0, \tag{33}$$

从而导致

$$h_3'(0+)=P\int_{\infty}^{0}k^2h_2\mathrm{d}k+N\int_{\infty}^{0}k^4h_2\mathrm{d}k=O(P^3\varepsilon^{14/3},N^2P\varepsilon^{18/3}). \tag{34}$$

4 ε 变小时增长率 P 的估计

最后,对标准化的一阶解取 $c_0=1$,我们有在 $k=\pm 0$ 处的解为

$$h(0+)=h_0(0+)=1,$$
$$h(0-)=h_0(0-)+h_1(0-)=3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}c_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)+O(P\varepsilon^{5/3},N\varepsilon^{7/3})$$

和

$$\begin{cases} h'(0+)=h_1'(0+)+h_2'(0+)h_3'(0+)= \\ \qquad -\varepsilon Pc_0-\dfrac{2Nc_0}{3^{1/3}\varepsilon^{5/3}}\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)+3^{2/3}\varepsilon^{7/3}P^2c_0\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)+ \\ \quad 3\varepsilon^3NPc_0+O(\varepsilon^{14/3}P^3,\varepsilon^{18/3}N^2P), \\ h'(0-)=h_0'(0-)=c_1. \end{cases} \tag{35}$$

将 $h(0+)/h'(0+)$ 和 $h(0-)/h'(0-)$ 代入到特征值关系式(16)并匹配主项,我们得到

$$2\pi P=\frac{h(0-)}{h'(0-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}-\frac{h(0+)}{h'(0+)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\sim$$
$$\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}}{P+2\cdot 3^{-1/3}\varepsilon^{2/3}N\Gamma(2/3)-3^{-2/3}\varepsilon^{4/3}P^2(P^2/(3^{2/3}\varepsilon^{4/3}))\Gamma(1/3)+3\varepsilon^3NP}+$$
$$3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}. \tag{36}$$

应用二项式定理得

$$2\pi P\sim\frac{1}{P\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\left[1-\frac{2\varepsilon^{2/3}N\Gamma(2/3)}{3^{1/3}P}+\frac{\varepsilon^{4/3}P\Gamma(1/3)}{3^{2/3}}+\frac{4\varepsilon^{4/3}N^2\Gamma^2(2/3)}{3^{2/3}P^2}-\right.$$

$$\frac{4\varepsilon^2 NP\Gamma(2/3)\Gamma(1/3)}{3P} + 3^{-4/3}\varepsilon^{8/3}P^2\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)\Bigg] +$$

$$3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi} + O(\varepsilon^{5/3}P). \tag{37}$$

重写式(37),我们得到

$$2\pi P^2 \sim \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\left\{1 + \frac{2\varepsilon^{1/3}P\Gamma(1/3)\cos\chi}{3^{2/3}}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi})^{-1} - \frac{4\varepsilon^{2/3}N\Gamma(2/3)}{3^{1/3}P} + \cdots\right\}. \tag{38}$$

5 G-模式特征值 P 的估计

这一节介绍在非粘性极限 $N=0$ 大流量限制下 G-模式增长率 P 的渐近估计.

由式(12)我们有

$$\left(h' + \frac{1}{\varepsilon}k^2 h\right)'' - P\varepsilon h'' - 2P(k^2 h)' = \varepsilon h\left(\frac{G}{(F')^2} - P^2 k^2\right). \tag{39}$$

做摄动展开

$$h = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{40}$$

这里零阶解和 n 阶解满足条件

$$\begin{cases} h_0(\pm\infty) = h_0'(\pm\infty) = h_0''(\pm\infty) = 0, \\ h_n(\pm\infty) = h_n'(\pm\infty) = h_n''(\pm\infty) = 0, \end{cases} \tag{41}$$

和第 3 节一样我们分别在 k 的正负微扰下解式(39). 有零阶差分项到非齐次项得到式(39)的渐近递推关系是

$$\begin{cases} (\varepsilon h_0' + k^2 h_0)'' = 0, \\ (\varepsilon h_n' + k^2 h_n)'' = P\varepsilon^2 h_{n-1}'' - 2\varepsilon P(k^2 h_{n-1})' + \left(\dfrac{G}{(F')^2} - P^2 k^2\right)\varepsilon^2 h_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 1,2,3,\cdots. \end{cases} \tag{42}$$

这个方法可以对于粘性撕裂模式增长率得到很好的估计,这在前面已经过测试. 我们只使用在 $k=\pm 0$ 只有两边 h 和 h' 的值来估计 P. n 阶展开解 h_n, h_n' 和 h_n'' 必须满足边界条件当 $k\to\infty$ 时这些解衰变.

与前相同,G-模渐近解可由摄动方法取得.

收集 $h(0+), h(0-), h'(0+), h'(0-), h''(0+), h''(0-)$ 这些结果在一起,对于 $\varepsilon\to 0$ 在 $k=0\pm$ 处我们最后得到

$$\begin{cases} h(0+) = 1, \\ h(0-) = 3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}c_0\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right) - 3^{-1/3}\varepsilon^{2/3}c_1\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right) + o(\varepsilon^{5/3}P); \\ h'(0+) = -\varepsilon P + \varepsilon^{7/3}3^{-2/3}P^2\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\varepsilon^{8/3}3^{-1/3}P\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right) + o(\varepsilon^{5/3}G), \\ h'(0-) = c_0 + c_0\varepsilon^{4/3}3^{-2/3}P\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right) + o(\varepsilon^{5/3}P); \\ h''(0+) = \dfrac{\varepsilon^{4/3}G}{3^{2/3}(F')^2}\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right) - \varepsilon^{8/3}3^{-1/3}P^2\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right) + o(\varepsilon^3 G), \\ h''(0-) = c_1. \end{cases} \tag{43}$$

在式(43)配平0次项,可以估计增长率 P. 特征值关系式为

$$2\pi P = \frac{h(0-)}{h'(0-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi} - \frac{h(0+)}{h'(0+)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}, \qquad -\pi < \chi < \pi.$$

比例 $h(0-)/h'(0-)$ 和 $h(0+)/h'(0+)$ 如下:

$$\frac{h(0-)}{h'(0-)} = \left\{3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}c_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - 3^{-1/3}\varepsilon^{2/3}c_1\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\Big/\left\{c_0 + c_0 3^{-2/3}\varepsilon^{4/3}P\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right\} \sim$$

$$\left\{3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - 3^{-1/3}\varepsilon^{2/3}\frac{c_1\Gamma(2/3)}{c_0}\right\}\cdot\left\{1 - 3^{-2/3}\varepsilon^{4/3}P\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right\}, \tag{44}$$

$$\frac{h(0+)}{h'(0+)} = \frac{1}{\varepsilon P\{1 - \varepsilon^{4/3}3^{-2/3}P\Gamma(1/3) - 2\varepsilon^{5/3}3^{-1/3}\Gamma(2/3)\}}, \tag{45}$$

在这里当 ε 足够小时二项展开式的高阶项被忽略了. 把式(44)和(45)代入特征值关系式得

$$2\pi P \sim \frac{1}{\varepsilon P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} + 2\cdot 3^{-2/3}\varepsilon^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cos\chi +$$

$$\left\{\frac{2\varepsilon^{2/3}\Gamma(2/3)}{P3^{1/3}} - \frac{\varepsilon^{5/3}P\Gamma(1/3)}{3^{4/3}}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} - \frac{c_1\varepsilon^{2/3}\Gamma(2/3)}{c_0 3^{1/3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}. \tag{46}$$

现在估计式(46)中的 $c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}/c_0$,

$$2\pi\frac{G}{(F')^2} = \frac{h''(0+)}{h'(0+)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\frac{h''(0-)}{h'(0-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}, \tag{47}$$

这里,由式(43)有

$$\frac{h''(0+)}{h'(0+)} = \frac{1}{\varepsilon P}\left\{\frac{\varepsilon^{4/3}G}{3^{2/3}(F')^2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\varepsilon^{8/3}P^2}{3^{1/3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\times$$

$$\left\{1 + \varepsilon^{4/3}3^{-2/3}P\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + 2\varepsilon^{5/3}3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + o(\varepsilon^{8/3}P^2)\right\} \sim$$

$$-\frac{\varepsilon^{1/3}G\Gamma(1/3)}{P3^{2/3}(F')^2}\left\{1 - \frac{3^{1/3}\varepsilon^{4/3}P^2\Gamma(2/3)(F')^2}{G\Gamma(1/3)}\right\}, \tag{48}$$

$$\frac{h''(0-)}{h'(0-)} = \frac{c_1}{c_0}\left\{1 - \varepsilon^{4/3}3^{-2/3}P\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + o(\varepsilon^{8/3}P^2)\right\} \sim$$

$$\frac{c_1}{c_0}\left\{1 - \varepsilon^{4/3}3^{-2/3}P\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right\}. \tag{49}$$

然后,从式(47)、(48)和(49),我们有

$$-\frac{c_1}{c_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi} \sim \left\{2\pi\frac{G}{(F')^2} + \frac{\varepsilon^{1/3}G\Gamma(1/3)}{P3^{2/3}(F')^2}\left[1 - \frac{3^{1/3}\varepsilon^{4/3}P^2\Gamma(2/3)}{G(F')^2\Gamma(1/3)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right\}\times$$

$$\left\{1 + \frac{\varepsilon^{4/3}P\Gamma(1/3)}{3^{2/3}}\right\}. \tag{50}$$

结合式(46)和(50),可以得到

$$2\pi P \sim \frac{1}{\varepsilon P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} + \frac{2\varepsilon^{1/3}\Gamma(1/3)}{3^{2/3}}\cos\chi + \left\{\frac{2\varepsilon^{2/3}\Gamma(2/3)}{P3^{1/3}} - \frac{\varepsilon^{5/3}P\Gamma(1/3)}{3^{4/3}}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} +$$

$$\frac{\varepsilon^{2/3}\Gamma(2/3)}{3^{1/3}}\left\{2\pi\frac{G}{(F')^2} + 2\pi\frac{\varepsilon^{4/3}G\Gamma(1/3)}{3^{2/3}(F')^2} + \frac{\varepsilon^{1/3}G\Gamma(1/3)}{P3^{2/3}(F')^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} -\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon^{5/3}P\Gamma(2/3)}{3^{1/3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right\} =$$

$$
\frac{R}{P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}+2\frac{\varepsilon^{1/3}\Gamma(1/3)}{3^{2/3}}\cos\chi+2\pi\frac{\varepsilon^{2/3}G\Gamma(2/3)}{3^{1/3}(F')^2}+
2\pi\frac{\varepsilon^{2}GP\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{3(F')^2}+O(\varepsilon^{7/6}). \tag{51}
$$

忽略式(51)的高阶 ε 项,我们最终得到

$$
P\sim\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{1/2}\left\{1+2\frac{\varepsilon^{1/3}P\Gamma(1/3)}{3^{2/3}\varepsilon^{1/3}}\cos\chi\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{-1}+\frac{\varepsilon^{2/3}\pi GP\Gamma(2/3)}{3^{1/3}(F')^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{-1}\right\}=
$$

$$
\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{1/2}+\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{-1}\frac{\varepsilon^{1/3}\Gamma(1/3)\cos\chi}{3^{2/3}}+
\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{-1}\frac{\varepsilon^{2/3}\pi G\Gamma(2/3)}{3^{1/3}(F')^2}.
$$

因而,N-G-模式增长率渐近估计的最后形式是

$$
P\approx\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\right)^{1/2}+\frac{\varepsilon^{1/3}\Gamma(1/3)\cos\chi}{2\pi3^{2/3}}+\frac{\varepsilon^{2/3}3^{-1/3}G\Gamma(2/3)}{2(F')^2}-\frac{\varepsilon^{2/3}N\Gamma(2/3)}{3^{1/3}},\quad\varepsilon\to0. \tag{52}
$$

这样得到特征值谱 P 与参数 R,G,N 及 χ 的关系. 主要参数 χ 为对流扰动耦合界面上角度参数.

由此特征值谱可定出多场耦合问题的优化特征函数基. 运用渐近形式我们可以多尺度参数化分析碰撞力学模型的接触表面问题. 而非稳模增长率 P 的渐近估计表示扰动($\varepsilon=1/R$),接触角度(χ),滑动(N),外力(G)等参数对多物理耦合影响接触表面动力学的高敏感度.

参考文献:

[1] Hou L. Resistive instabilities in the magnetohydrodynamics[D]. Ph D Thesis. Dundee, UK: University of Abertay Dundee, 1994.

[2] Hou L, Paris R B, Wood A D. Resistive interchange mode in the presence of equilibrium flow[J]. *Physics of Plasmas*, *American Institute of Physics*, 1996, **3**(2): 473-481.

[3] 侯磊,韩月红,李金龙. 磁流耦合问题中边界层解法的探索[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2008, **141**(5): 10-16.

[4] Furth H P, Killen J, Rosenbluth M N. Finite-resistity instabilities of a sheet pinch[J]. *Physics of Fluids*, 1963, **6**(4):459-485.

[5] Paris R B, Sy W N-C. Influence of equilibrium shear flow along the magnetic field on the resistive tearing instability[J]. *Physics of Fluids*, 1983, **26**(10):2966- 2975.

[6] Presson M, Bondeson A. Oscillating magnetic islands in a rotating plasma[J]. *Physics of Fluids B*, 1990, **2**(10):2315-2321.

[7] Bondeson A, Presson M. Resistive tearing modes in the presence of equilibrium flows[J]. *Physics of Fluids*, 1986, **29**(9):2997-3007.

[8] Paris R B, Wood A D. Exponentially-improved asymptotics for the gamma function[J]. *Computat Appl Math*, 1992, **41**(1/2): 135-143.

[9] 苏煜城,吴启光. 奇异摄动问题数值方法引论[M]. 重庆:重庆出版社,1991.

Boundary-Layer Eigen Solutions for Multi-Field Coupled Equations in the Contact Interface

HOU Lei[1,2], LI Han-ling[1], ZHANG Jia-jian[1], LIN De-zhi[1], QIU Lin[2,3]

(1. *Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *P. R. China*;
2. *Division of Computational Sciences E-Institute of Shanghai Universities at SJTU*, *Shanghai* 200240, *P. R. China*;
3. *Department of Mathematics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *P. R. China*)

Abstract: The dissipative equilibrium dynamics studied the law of fluid motion under constraints in the contact interface of the coupling system. It needed to examine how constraints act upon the fluid movement, while the fluid movement reacted to the constraint field. It also needed to examine the coupling fluid field and media within the contact interface, and to use the multi-scale analysis to solve the regular and singular perturbation problems in micro-phenomena of laboratories and macro-phenomena of nature. The field affected by the gravity constraints was described. Applying the multi-scale analysis to the complex Fourier harmonic analysis, scale changes, and the introduction of new parameters, the complex three-dimensional coupling dynamic equations were transformed into a boundary layer problem in the one-dimensional complex space. Asymptotic analysis was carried out for inter and outer solutions to the perturbation characteristic function of the boundary layer equations in multi-field coupling. Examples were given for disturbance analysis in the flow field, showing the turning point from the index oscillation solution to the algebraic solution. With further analysis and calculation on nonlinear eigenfunctions of the contact interface dynamic problems by the eigenvalue relation, an asymptotic perturbation solution was obtained. Finally, a boundary layer solution to multi-field coupling problems in the contact interface was obtained by asymptotic estimates of eigenvalues for the G-N mode in the large flow limit. Characteristic parameters in the final form of the eigenvalue relation are key factors of the dissipative dynamics in the contact interface.

Key words: coupling dynamics equations; boundary problem; eigen-value; asymptotic perturbation analysis; turning point