文章编号:1000-0887(2010)05-0591-11

准静力学双面接触支承问题及其粘弹性材料的非局部摩擦*

A·拓亚林

(USTHB 数学系 动力系统实验室,BP 32 EL ALIA, 巴布足瓦 16111, 阿尔及利亚)

(郭兴明推荐)

摘要: 建立了描述变形体和基础间接触问题的数学模型.接触是双面的,并采用非局部摩擦定理建模,支承列入计算.粘结场(bonding field)的变化用一个一阶的常微分方程来表示,材料特性用一个非线性粘弹性本构关系建模.导出了该力学问题的变分公式,当摩擦因数充分小时,证明了其弱解的存在性和唯一性.依赖于时间的变分不等式、微分方程和 Banach 不动点理论,是该证明依据的基础.

关 键 词: 粘弹性材料; 粘结; 非局部摩擦; 不动点; 弱解

中图分类号: O151.25;O343.3 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2010.05.010

引 言

工业上和日常生活中,经常遇到含有变形体的接触问题,它在结构及力学系统中扮演着重要的角色.因为这个问题的重要性,在其建模和数值模拟的研究中,已经进行了大量的工作.文献[1]在变分不等式框架内,首先进行了摩擦接触问题的研究,在文献[2]中可以找到有关技术的数学、力学和数值方面的陈述.粘弹性材料,满足非局部摩擦定理的双面接触问题,在文献[3]中已有研究.本文的目的是,扩大该模型的研究,同时计入接触表面的粘结作用.文献[4-7]研究了变形体和基础之间,摩擦粘结接触的动力学或准静力学过程模型.文献[8]研究了带摩擦和粘结的单面准静力学接触问题,并得到了摩擦因数足够小时成立的结果.和文献[9-10]一样,我们使用的粘结场,带一个定义于边界接触面上的静力学变量 β.该变量的值仅限于 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.当 $\beta = 0$ 时,所有粘结面分离,无有效的粘结;当 $\beta = 1$ 时,全部粘结面均有效;当 $0 < \beta < 1$ 时,部分粘结有效,并处于部分支承状态.更多有关该课题的研究可参见文献[2,7,11-14].

在本文研究中,导出该力学问题的变分公式,并证明,当摩擦因数足够小时,存在唯一的弱解,且其解是局部正则的.文章由两部分组成,第 1 节介绍一些符号,并给出变分公式;第 2 节陈述和证明主要定理 1.1 的存在性及唯一性.

---

* **收稿日期:** 2009-05-21; **修订日期:** 2009-11-23
作者简介: Arezki Touzaline(E-mail: ttouzaline@yahoo.fr).
本文原文为英文,黄锋 译,张禄坤 校.

1 问题的综述及其变分公式

令 $\Omega \subset R^d(d=2,3)$ 为粘弹性体初始占有的区域,假设 Ω 是开的有界域,具有充分规则的边界 Γ. Γ 被分割为可度量的3部分,即 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$,其中 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 是不相交的开集,且 $\Gamma_1>0$. 在该粘弹性体上,Ω 作用有密度为 φ_1 的体力,Γ_2 上有密度为 φ_2 的作用力,Γ_3 为该物体的双面接触支承,并与基础产生摩擦力.

因此,该力学问题的经典公式可以表达如下.

问题 P_1 寻找位移场 $u:\Omega\times[0,T]\to R^d$,应力场 $\sigma:\Omega\times[0,T]\to S_d$,及粘结场 $\beta:\Gamma_3\times[0,T]\to[0,1]$, 使得

$$\sigma = A\varepsilon(\dot{u}) + B\varepsilon(u),\qquad \text{在 } \Omega\times(0,T) \text{ 内}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\sigma + \varphi_1 = 0,\qquad \text{在 } \Omega\times(0,T) \text{ 内}, \tag{2}$$

$$u = 0,\qquad \text{在 } \Gamma_1\times(0,T) \text{ 上}, \tag{3}$$

$$\sigma\nu = \varphi_2,\qquad \text{在 } \Gamma_2\times(0,T) \text{ 上}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_\nu = 0, \\ |\sigma_\tau + c_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)| \leqslant \mu|R\sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau + c_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)| < \mu|R\sigma_\nu| \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau + c_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)| = \mu|R\sigma_\nu| \Rightarrow \\ \qquad \exists\lambda \geqslant 0 \text{ s.t. } \dot{u}_\tau = -\lambda(\sigma_\tau + c_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)), \end{cases}\qquad \text{在 } \Gamma_3\times(0,T) \text{ 上}, \tag{5}$$

$$\dot{\beta} = -(c_\tau\beta|R_\tau(u_\tau)|^2 - \varepsilon_a)_+,\qquad \text{在 } \Gamma_3\times(0,T) \text{ 上}, \tag{6}$$

$$u(0) = u_0,\qquad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \tag{7}$$

$$\beta(0) = \beta_0,\qquad \text{在 } \Gamma_3 \text{ 上}. \tag{8}$$

方程(1)表示材料粘弹性的本构关系,其中 A 和 B 给出了非线性的本构函数, $\varepsilon(u)$ 表示线性化的应变张量,变量上方的一点表示对时间的导数. 考虑到线粘弹性体中的应力张量 $\sigma=(\sigma_{ij})$ 为

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\dot{u}) + b_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u),$$

其中, $A=(a_{ijkh})$ 为粘性张量,$B=(b_{ijkh})$ 为弹性张量,$i,j,k,h=1,\cdots,d$. 方程(2)为平衡方程,方程(3)和(4)分别为位移和力的边界条件,其中 ν 表示 Γ 上单位外法线矢量, $\sigma\nu$ 表示 Cauchy 应力矢量. 方程(5)表示满足非局部摩擦定律的双面接触,支承列入计算. 这里,μ 为摩擦因数,R 为连续正则算子(参见文献[2]). 切向剪切应力不能大于最大摩擦阻力 $\mu|R\sigma_\nu|$. 因此,如果严格满足不等式条件,那么表面粘附于基础上,称为"粘住状态",如果满足等式条件,则存在相对滑动,称为"滑动状态". 参数 c_τ 和 ε_a 为依赖于 $x\in\Gamma_3$ 的粘附系数. R_τ 为截断算子,定义如下(见文献[14]):

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v, & |v| \leqslant L, \\ L\dfrac{v}{|v|}, & |v| > L, \end{cases}$$

其中 $L>0$ 为粘结处的特征长度. 常微分方程(6)描述了粘结场的变化,文献[14]中已有应用,其中 $[s]_+=\max(s,0)$, $\forall s\in\mathbf{R}$. 因为在 $\Gamma_3\times(0,T)$ 上,$\dot{\beta}\leqslant 0$, 一旦发生脱离,粘结就无法重建. 我们还希望弄清楚,在有限的时间内,该模型没有考虑到场的完全脱离(见文献[15]).

条件(7)和(8)分别表示初始的位移场和初始的粘结场．在 R^d，S_d 上求内积，得到相应的范数：

$$u \cdot v = u_i v_i,\ |v| = (v \cdot v)^{1/2}, \qquad \forall u, v \in R^d,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}\tau_{ij},\ |\boldsymbol{\tau}| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2}, \qquad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in S_d,$$

其中 S_d 为关于 $R^d(d = 2,3)$ 的二阶对称张量空间．因此以后指标 i 和 j 在 1 和 d 之间变化，并采用重复指标求和的约定．为了继续进行变分公式的推导，现在引入下列函数空间：

$$H = (L^2(\Omega))^d,\ H_1 = (H^1(\Omega))^d,\ Q = \{\ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\},$$

$$Q_1 = \{\ \boldsymbol{\sigma} \in Q : \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} \in H\}\ .$$

注意到，H 和 Q 为分别赋予规范内积的实 Hilbert 空间，

$$\langle u, v\rangle_H = \int_\Omega u_i v_i \mathrm{d}x,\ \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_Q = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}\mathrm{d}x,$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{Q_1} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_Q + \langle \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}\rangle_H .$$

线应变张量与位移 u 有关，

$$\boldsymbol{\varepsilon}(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad i, j = \{1, \cdots, d\}\ ,$$

$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$ 为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的散度．对于任意单元 $v \in H_1$，我们用 v_ν 和 v_τ 分别表示边界 Γ 上 v 的法向分量和切向分量：

$$v_\nu = v \cdot \boldsymbol{\nu},\ v_\tau = v - v_\nu \boldsymbol{\nu} .$$

类似地，对于正则函数 $\boldsymbol{\sigma} \in Q_1$，我们定义其法向和切向分量为

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu},$$

并有下面的 Green 公式存在：

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(v)\rangle_Q + \langle \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}, v\rangle_H = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot v \mathrm{d}a, \qquad \forall v \in H_1,$$

其中 $\mathrm{d}a$ 为表面的度量单元．令 V 为 H_1 的闭子空间，定义为

$$V = \{v \in H_1 : v = 0, 在\ \Gamma_1\ 上, v_\nu = 0, 在\ \Gamma_3\ 上\}\ .$$

因为 $\Gamma_1 > 0$，下面的 Korn 不等式成立[1]：

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(v)\|_Q \geqslant c_\Omega \|v\|_{H_1}, \qquad \forall v \in V, \tag{9}$$

其中，常数 $c_\Omega > 0$，仅依赖于 Ω 和 Γ_1．我们为 V 定义内积：

$$(u, v)_V = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u), \boldsymbol{\varepsilon}(v)\rangle_Q,$$

又，$\|\cdot\|_V$ 表示相关的范数．由 Korn 不等式(9)可知，范数 $\|\cdot\|_{H_1}$ 和 $\|\cdot\|_V$ 在 V 上等价．于是 $(V, \|\cdot\|_V)$ 为实 Hilbert 空间．此外，由 Sobolev 迹定理，存在 $d_\Omega > 0$，仅依赖于 Ω，Γ_1 和 Γ_3，使得

$$\|v\|_{(L^2(\Gamma_3))^d} \leqslant d_\Omega \|v\|_V, \qquad \forall v \in V. \tag{10}$$

对 $p \in [1, \infty]$，使用 $L^p(0, T; V)$ 的标准范数．我们同时为 Sobolev 空间 $W^{1,\infty}(0, T; V)$ 定义范数：

$$\|v\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} = \|v\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;V)} .$$

对于任意实 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 及 $T > 0$，用符号 $C([0, T]; X)$ 表示从 $[0, T]$ 到 X 的连续函数空间，记 $C([0, T]; X)$ 为实 Banach 空间，有范数

$$\|x\|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X .$$

假设体力和面力遵循以下规律：

$$\varphi_1 \in C([0,T];H),\ \varphi_2 \in C([0,T];(L^2(\Gamma_2))^d). \tag{11}$$

由式(11)和 Riesz 的表示定理,存在函数 $f:[0,T]\to V$, 使得

$$(f(t),v)_V = \int_\Omega \varphi_1(t)\cdot v\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2}\varphi_2(t)\cdot v\mathrm{d}a,\qquad \forall v\in V,\ t\in[0,T], \tag{12}$$

而且,由式(11)和(12)还得到

$$f\in C([0,T];V).$$

我们还可以由下式定义函数 $j:Q_1\times V\to \mathbf{R}_+$:

$$j(g,v) = \int_{\Gamma_3}\mu\,|Rg_\nu|\,|v_\tau|\,\mathrm{d}a,\qquad \forall g\in Q_1,\ v\in V,$$

其中

$$R:H^{-1/2}(\Gamma)\to L^2(\Gamma)$$

是一个连续的映射. 假设摩擦因数 μ 满足

$$\mu\in L^\infty(\Gamma_3),\ \mu\geqslant 0,\qquad \text{a. e. 在 } \Gamma_3 \text{ 上}. \tag{13}$$

如文献[2], 存在一个常数 $C_R > 0$, 使得

$$\|Rg_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \leqslant C_R\|g\|_{Q_1},\qquad \forall g\in Q_1.$$

在问题 P_1 的研究中,我们假设粘度算子 A 满足

$$\begin{cases}
\text{(a) } A:\Omega\times S_d\to S_d;\\
\text{(b) 存在 } M_A>0\text{,使得}\\
\qquad |A(x,\varepsilon_1)-A(x,\varepsilon_2)|\leqslant M_A|\varepsilon_1-\varepsilon_2|,\\
\text{对于 } S_d \text{ 中的所有 } \varepsilon_1,\varepsilon_2\text{,a. e. } x \text{ 在 } \Omega \text{ 中};\\
\text{(c) 存在 } M_A>0\text{,使得}\\
\qquad (A(x,\varepsilon_1)-A(x,\varepsilon_2))\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\geqslant m_A|\varepsilon_1-\varepsilon_2|^2,\\
\text{对于 } S_d \text{ 中的所有 } \varepsilon_1,\varepsilon_2\text{, a. e. } x \text{ 在 } \Omega \text{ 中};\\
\text{(d) 对于 } S_d \text{ 中任意 } \varepsilon\text{,映射 } x\to A(x,\varepsilon) \text{ 在 } \Omega \text{ 上是 Lebesgue 度量的};\\
\text{(e) } x\to A(x,0)\in Q.
\end{cases} \tag{14}$$

弹性算子 B 满足

$$\begin{cases}
\text{(a) } B:\Omega\times S_d\to S_d;\\
\text{(b) 存在 } M_B>0\text{,使得}\\
\qquad |B(x,\varepsilon_1)-B(x,\varepsilon_2)|\leqslant M_B|\varepsilon_1-\varepsilon_2|,\\
\text{对于 } S_d \text{ 中的所有 } \varepsilon_1,\varepsilon_2\text{,a. e. } x \text{ 在 } \Omega \text{ 中};\\
\text{(c) 对于 } S_d \text{ 中任意 } \varepsilon\text{,映射 } x\to A(x,\varepsilon) \text{ 在 } \Omega \text{ 上是 Lebesgue 度量的};\\
\text{(d) } x\to B(x,0)\in Q.
\end{cases} \tag{15}$$

正如文献[7],我们假设粘度系数 c_τ 和 ε_a 满足条件

$$c_\tau,\varepsilon_a\in L^\infty(\Gamma_3),\qquad c_\tau,\varepsilon_a\geqslant 0\text{,a. e. 在 } \Gamma_3 \text{ 上}. \tag{16}$$

我们假设初始数据满足

$$u_0\in V, \tag{17}$$

$$\beta_0\in L^2(\Gamma_3),\qquad 0\leqslant\beta_0\leqslant 1\text{,a. e. 在 } \Gamma_3 \text{ 上}. \tag{18}$$

接着,令 $r:L^2(\Gamma_3)\times V\times V\to\mathbf{R}$ 为函数

$$r(\beta,u,v)=\int_{\Gamma_3}c_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)\cdot v_\tau\,\mathrm{d}s.$$

最后,需要定义该粘结场的下列集合:

$$\mathcal{O}=\{\theta:[0,T]\to L^2(\Gamma_3);0\leqslant\theta(t)\leqslant 1,\ \forall t\in[0,T],\text{a. e. 在 }\Gamma_3\text{ 上}\}.$$

现假设其解充分正则,应用 Green 公式,得到问题 P_1 有下面的变分公式.

问题 P_2 寻找位移场 $u\in C^1([0,T];V)$, 应力场 $\sigma\in C([0,T];Q_1)$ 及粘结场 $\beta\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))\cap\mathcal{O}$, 使得

$$\sigma(t)=A\varepsilon(\dot u(t))+B\varepsilon(u(t)),\qquad \text{在 }\Omega\times(0,T)\text{ 内},\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\langle\sigma(t),\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot u(t))\rangle_Q+j(\sigma(t),v)-j(\sigma(t),\dot u(t))+\\&\quad r(\beta(t),u(t),v-\dot u(t))\geqslant(f(t),v-\dot u(t))_V,\qquad\forall v\in V,\ t\in[0,T],\end{aligned}\tag{20}$$

$$\dot\beta(t)=-(c_\tau\beta(t)|R_\tau(u_\tau(t))|^2-\varepsilon_a)_+,\qquad \text{a. e. }t\in(0,T),\tag{21}$$

$$u(0)=u_0,\qquad\text{在 }\Omega\text{ 内},\tag{22}$$

$$\beta(0)=\beta_0,\qquad\text{在 }\Gamma_3\text{ 上}.\tag{23}$$

本节的主要工作,是建立下面的定理.

定理 1.1 令 $T>0$,假设式(11)、(12)~(18)成立, 当常数 $\mu_0>0$ 时,如果

$$\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}<\mu_0$$

成立,则问题 P_2 有唯一解.

2 解的存在性和唯一性

参照文献[3],定理 1.1 分为以下几步证明.

首先,对于给出的 $\eta\in C([0,T];V)$ 和 $g\in C([0,T];Q_1)$, 考虑下面的变分问题.

问题 $P_{1\eta}$ 寻找 $v_{\eta g}:[0,T]\to V$ 和 $\sigma_{\eta g}:[0,T]\to Q_1$, 使得

$$\sigma_{\eta g}=A\varepsilon(v_{\eta g}(t))+\varepsilon(\eta(t)),\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\langle\sigma_{\eta g},\varepsilon(w)-\varepsilon(v_{\eta g}(t))\rangle_Q+j(g(t),w)-j(g(t),v_{\eta g}(t))\geqslant\\&\quad(f(t),w-v_{\eta g}(t))_V,\qquad\forall w\in V,\ t\in[0,T].\end{aligned}\tag{25}$$

现在说明下面结果.

引理 2.1 问题 $P_{1\eta}$ 存在唯一解,并满足 $v_{\eta g}\in C([0,T];V)$ 和 $\sigma_{\eta g}\in C([0,T];Q_1)$.

证明 令 $t\in[0,T]$,同时,令算子 $C:V\to V$, 由下式给出:

$$(Cv,w)_V=\langle A\varepsilon(v),\varepsilon(w)\rangle_Q,\qquad\forall v,w\in V.$$

由假设(14)可知, C 为强单调的 Lipschitz 连续算子. 泛函 $j(g(t),\cdot)$ 为 V 上连续的半范数,则根据椭圆变分不等式的经典证明[16],可以推出,存在唯一元素 $v_{\eta g}(t)\in V$, 使得

$$\begin{aligned}&\langle A\varepsilon(v_{\eta g}(t)),\varepsilon(w)-\varepsilon(v_{\eta g}(t))\rangle_Q+j(g(t),w)-j(g(t),v_{\eta g}(t))\geqslant\\&\quad(f(t)-\eta(t),w-v_{\eta g}(t))_V,\qquad\forall w\in V.\end{aligned}\tag{26}$$

因此,由式(26)可知, $v_{\eta g}(t)$ 为不等式(25)的唯一解. 现令 $t_1,t_2\in[0,T]$,在不等式(25)中,对 $t=t_1$,取 $w=v_{\eta g}(t_2)$,同时对 $t=t_2$,取 $w=v_{\eta g}(t_1)$. 利用式(14)中(c)和式(10),可以发现,在增加的不等式结果之后,存在常数 $c>0$, 使得

$$\|v_{\eta g}(t_1)-v_{\eta g}(t_2)\|_V\leqslant$$

$$c(\|f(t_1)-f(t_2)\|_V+\|\boldsymbol{\eta}(t_1)-\boldsymbol{\eta}(t_2)\|_V+\|g(t_1)-g(t_2)\|_{Q_1}).$$

因为$f\in C([0,T];V)$, $\boldsymbol{\eta}\in C([0,T];V)$和$g\in C([0,T];Q_1)$,所以$v_{\eta g}\in C([0,T];V)$.此外,由式(24)可知,对某一常数$c>0$,有

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t_1)-\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t_2)\|_Q\leqslant$$
$$c(\|v_{\eta g}(t_1)-v_{\eta g}(t_2)\|_V+\|\boldsymbol{\eta}(t_1)-\boldsymbol{\eta}(t_2)\|_V),\tag{27}$$

由式(27),导出$\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}\in C([0,T];Q)$.现在,在式(25)中取$w=v_{\eta g}(t)\pm\varphi$,其中$\varphi\in(C_0^\infty(\Omega))^d$,可得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t)+\boldsymbol{\varphi}_1(t)=0,\qquad \text{在}\ \Omega\ \text{内},\ \forall t\in[0,T].\tag{28}$$

另一方面,有

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t_1)-\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t_2)\|_{Q_1}\leqslant$$
$$\|\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t_1)-\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}(t_2)\|_Q+\|\boldsymbol{\varphi}_1(t_1)-\boldsymbol{\varphi}_1(t_2)\|_H.\tag{29}$$

因此,既然$\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}\in C([0,T];Q)$和$\boldsymbol{\varphi}_1\in C([0,T];H)$,那么,式(29)隐含着$\boldsymbol{\sigma}_{\eta g}\in C([0,T];Q_1)$.下面由

$$\Lambda_\eta g=\boldsymbol{\sigma}_{\eta g},\qquad \forall g\in C([0,T];Q_1),\tag{30}$$

定义算子

$$\Lambda_\eta:C([0,T];Q_1)\to C([0,T];Q_1),$$

有如下引理.

引理2.2 对每个$g\in C([0,T];Q_1)$,函数$\Lambda_\eta g:[0,T]\to Q_1$属于$C([0,T];Q_1)$,同时,存在常数$\mu_0>0$,对$\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}<\mu_0$,使得算子$\Lambda_\eta$存在唯一的不动点$g_\eta\in C([0,T];Q_1)$.

证明 令g_1, $g_2\in C([0,T];Q_1)$,同时令$\{v_i,\boldsymbol{\sigma}_i\}$, $i=1,2$,对于$g=g_i$,问题$\mathrm{P}_{1\eta}$的解,有不等式

$$\|\Lambda_\eta g_1-\Lambda_\eta g_2\|_{C([0,T];Q_1)}\leqslant\frac{d_\Omega C_{RM_A}}{m_A}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\|g_1-g_2\|_{C([0,T];Q_1)}.\tag{31}$$

式(31)的证明,可以参见文献[3],若取

$$\mu_0=\frac{m_A}{d_\Omega C_R M_A},$$

可以推出,对于$\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}<\mu_0$,算子$\Lambda_\eta$是可压缩的,因此它有唯一的不动点$g_\eta$.

现在,对于$\boldsymbol{\eta}\in C([0,T];V)$,令$v_\eta\in C([0,T];V)$为下式给出的函数:

$$v_\eta=v_{\eta g_\eta},\tag{32}$$

又令$u_\eta:[0,T]\to V$为下式定义的函数:

$$u_\eta(t)=u_0+\int_0^t v_\eta(s)\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].\tag{33}$$

现考虑下列问题.

问题$\mathrm{P}_{\eta\beta}$ 寻找粘结场$\beta_\eta:[0,T]\to L^\infty(\Gamma_3)$,使得

$$\dot{\beta}_\eta(t)=-(\beta_\eta(t)c_\tau|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))|^2-\varepsilon_a)_+,\qquad \text{a.e.}\ t\in(0,T),\tag{34}$$

$$\beta_\eta(0)=\beta_0,\qquad \text{在}\ \Gamma_3\ \text{上}.\tag{35}$$

有以下结果.

引理2.3 问题$\mathrm{P}_{\eta\beta}$存在唯一解,且满足

$$\beta_\eta\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))\cap\mathcal{O}.$$

证明 令 $k>0$,同时考虑空间 X 定义如下:

$$X=\{\beta\in C([0,T];L^2(\Gamma_3));\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-kt}\|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}<+\infty\},$$

X 是一个范数如下的 Banach 空间:

$$\|\beta\|_X=\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-kt}\|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

该范数和标准范数 $\|\cdot\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}$ 等价. 现在,考虑由下式给出的映射 $T:X\to X$:

$$T\beta(t)=\beta_0-\int_0^t(c_\tau\beta(s)|R_\tau(u_{\eta\tau}(s))|^2-\varepsilon_a)_+\,\mathrm{d}a.$$

应用 $|R_r(u_{\eta r})|\leqslant L, r=\nu,\tau$,可知存在常数 $c>0$, 使得

$$\|T\beta_1(t)-T\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leqslant c\int_0^t\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\mathrm{d}s.$$

因为

$$\int_0^t\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^t\mathrm{e}^{ks}(\mathrm{e}^{-ks}\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)})\mathrm{d}s\leqslant\|\beta_1-\beta_2\|_{X_1}\frac{\mathrm{e}^{kt}}{k},$$

该不等式意味着

$$\|T\beta_1-T\beta_2\|_X\leqslant\frac{c}{k}\|\beta_1-\beta_2\|_X. \tag{36}$$

不等式(36)表明,对于 $k>c$, T 是可以压缩的. 可以推出,由 Banach 不动点定理, T 有唯一的不动点 β_η,其满足式(34)和(35). 该正则解 $\beta_\eta\in\mathcal{O}$ 正是式(35)和(18)的一个结果,详见文献[7].

另外,根据 Riesz 的表示定理,定义函数

$$\Lambda:[0,T]\to V.$$

由式

$$(\Lambda\eta(t),w)_V=\langle B\varepsilon(u_\eta(t)),\varepsilon(w)\rangle_Q+r(\beta_\eta(t),u_\eta(t),w),\quad\forall w\in V,\ t\in[0,T] \tag{37}$$

得到引理2.4.

引理2.4 对每个 $\eta\in C([0,T];V)$,函数 $\Lambda\eta:[0,T]\to V$ 属于 $C([0,T];V)$,另外,唯一存在 $\eta^*\in C([0,T];V)$,使得 $\Lambda\eta^*=\eta^*$.

证明 令 $\eta\in C([0,T];V)$, $t_1,t_2\in[0,T]$,应用式(34),存在常数 $c>0$, 使得

$$\|\Lambda\eta(t_1)-\Lambda\eta(t_2)\|_V\leqslant\|B\varepsilon(u_\eta(t_1))-B\varepsilon(u_\eta(t_2))\|_Q+$$
$$c\|\beta_\eta^2(t_1)R_\tau(u_{\eta\tau}(t_1))-\beta_\eta^2(t_2)R_\tau(u_{\eta\tau}(t_2))\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

此外,应用算子 R_τ 的性质(参见文献[2]),使得

$$|R_r(u_{\eta\tau})|\leqslant L,\ |R_\tau(a)-R_\tau(b)|\leqslant|a-b|,\qquad\forall a,b\in R^d.$$

由式(15)中(b)及 $0\leqslant\beta_\eta(t)\leqslant1$, $\forall t\in[0,T]$,对某一常数 $c>0$, 有

$$\|\Lambda\eta(t_1)-\Lambda\eta(t_2)\|_V\leqslant$$
$$c(\|u_\eta(t_1)-u_\eta(t_2)\|_V+\|\beta_\eta(t_1)-\beta_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)}). \tag{38}$$

因此,当 $u_\eta\in C^1([0,T];V)$ 和 $\beta_\eta\in W^{1,\infty}(0,T;V)$ 时,式(38)隐含着 $\Lambda\eta\in C([0,T];V)$.

现在令 $\eta_1,\eta_2\in C([0,T];V)$. 对 $t\in[0,T]$, 利用初始条件(35),积分式(34),得到

$$\beta_{\eta_i}(t)=\beta_0-\int_0^t(c_\tau\beta_{\eta_i}(s)\,|\,R_\tau(u_{\eta_i\tau}(s))\,|^2-\varepsilon_a)_+\,\mathrm{d}a,$$

则存在常数 $c>0$, 使得

$$\|\beta_{\eta_1}(t)-\beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leqslant$$
$$c\int_0^t\|\beta_{\eta_1}(s)\,|\,R_\tau(u_{\eta_1\tau}(s))\,|^2-\beta_{\eta_2}(s)\,|\,R_\tau(u_{\eta_2\tau}(s))\,|^2\|_{L^2(\Gamma_3)}\mathrm{d}s.$$

根据截断算子 R_τ 的定义,记

$$\beta_{\eta_1}(s)=\beta_{\eta_1}(s)-\beta_{\eta_2}(s)+\beta_{\eta_2}(s).$$

经过一些初等运算之后,发现存在常数 $c>0$, 使得

$$\|\beta_{\eta_1}(t)-\beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leqslant$$
$$c\int_0^t\|\beta_{\eta_1}(s)-\beta_{\eta_2}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\mathrm{d}s+c\int_0^t\|u_{\eta\tau}(s)-u_{\eta\tau}(s)\|_{(L^2(\Gamma_3))^d}\mathrm{d}s.$$

利用式(10),前不等式隐含着

$$\|\beta_{\eta_1}(t)-\beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leqslant$$
$$c\int_0^t\|\beta_{\eta_1}(s)-\beta_{\eta_2}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\mathrm{d}s+cd_\Omega\int_0^t\|u_{\eta_1}(s)-u_{\eta_2}(s)\|_V\mathrm{d}s.$$

对某一常数 $c>0$, 有 Gronwall 不等式

$$\|\beta_{\eta_1}(t)-\beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leqslant c\int_0^t\|u_{\eta_1}(s)-u_{\eta_2}(s)\|_V\mathrm{d}s.\tag{39}$$

另一方面,与式(36)的证明过程相类似,存在常数 $c>0$, 使得

$$\|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\|_V\leqslant$$
$$c(\|u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\|_V+\|\beta_{\eta_1}(t)-\beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}).$$

那么,利用式(39),存在常数 $c>0$, 使得

$$\|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\|_V\leqslant$$
$$c\|u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\|_V+c\int_0^t\|u_{\eta_1}(s)-u_{\eta_2}(s)\|_V\mathrm{d}s,\tag{40}$$

有

$$\|u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\|_V\leqslant\int_0^t\|v_{\eta_1}(s)-v_{\eta_2}(s)\|_V\mathrm{d}s$$

且函数 v_{η_i} 满足不等式

$$\langle A\varepsilon(v_{\eta_i}(t)),\varepsilon(w-v_{\eta_i}(t))\rangle_Q+(\eta_i(t),w-v_{\eta_i}(t))_V+j(\sigma_{\eta_i}(t),w)-$$
$$j(\sigma_{\eta_i}(t),v_{\eta_i}(t))\geqslant(f(t),w-v_{\eta_i}(t))_V,\qquad\forall w\in V,\tag{41}$$

其中, $i=1,2$,同时 $t\in[0,T]$.那么由式(41)(参见文献[3]), 对于 $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}<\mu_0$,存在常数 $c>0$, 使得

$$\|v_{\eta_1}(t)-v_{\eta_2}(t)\|_V\leqslant c\|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|_V,\qquad\forall t\in[0,T].$$

因此,得到

$$\|u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\|_V\leqslant c\int_0^t\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|_V\mathrm{d}s,\qquad\forall t\in[0,T].\tag{42}$$

利用式(40)和(42), 可以推出,存在常数 $c>0$, 使得

$$\|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\|_V\leqslant c\int_0^t\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|_V\mathrm{d}s.\tag{43}$$

现在令 $k>0$，记

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_k=\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-kt}\|\boldsymbol{\eta}(t)\|_V,\qquad\forall\boldsymbol{\eta}\in C([0,T];V).$$

显然，$\|\cdot\|_k$ 是定义在 $C([0,T];V)$ 上的范数，它和标准范数 $\|\cdot\|_{C([0,T];V)}$ 等价. 利用式(43)，与式(36)的证明相类似，经过一些计算后，有

$$\|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1-\Lambda\boldsymbol{\eta}_2\|_k\leqslant\frac{c}{k}\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2\|_k,\qquad\forall\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\in C([0,T];V).$$

所以，对于 $k>c$，算子 Λ 在空间 $C([0,T];V)$（赋予范数 $\|\cdot\|_k$）上是可以压缩的. 那么，由 Banach 不动点定理可知，Λ 有唯一的不动点 $\boldsymbol{\eta}^*\in C([0,T];V)$，结论得证. 现在完成了定理 1.1 证明的准备.

证明 存在性. 令 $\boldsymbol{\eta}^*\in C([0,T];V)$ 为 Λ 的不动点，对 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*$，令 v_{η^*} 和 u_{η^*} 为式(32)和(33)给出的函数. 令 β_{η^*} 为 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*$ 时问题 $\mathrm{P}_{\eta\beta}$ 的解，且 $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*g^*}$ 满足式(24). 那么(u_{η^*}，$\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*g^*}$，$\beta_{\eta^*}$)是问题 P_2 的一个解. 实际上，在式(25)中，选取 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*$，$g=g_{\eta^*}$，并利用式(24)，得到

$$\langle A\boldsymbol{\varepsilon}(v_{\eta^*}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(w)-\boldsymbol{\varepsilon}(v_{\eta^*}(t))\rangle_Q+(\boldsymbol{\eta}^*(t),w-v_{\eta^*}(t))_V+j(g_{\eta^*}(t),w)-j(g_{\eta^*}(t),v_{\eta^*}(t))\geqslant(f(t),w-v_{\eta^*}(t))_V,\qquad\forall w\in V,\ t\in[0,T].\tag{44}$$

当 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*$，即 $\beta=\beta_{\eta^*}$ 时，用 β 表示问题 $\mathrm{P}_{\eta\beta}$ 的解. 当 $\boldsymbol{\eta}^*=\Lambda\boldsymbol{\eta}^*$ 时，因为 $v_{\eta^*}=\dot{u}_{\eta^*}$，$g_{\eta^*}=\Lambda_{\eta^*}(g_{\eta^*})$，由式(44)、(37)和(33)，可以得到不等式(43). 同样，由式(24)和(37)，得到式(42)；由式(33)，得到等式(22)；正则解 $u_{\eta^*}\in C^1([0,T];V)$ 正是引理 2.1 及式(17)和(33)的一个结果. 显然，由问题 $\mathrm{P}_{\eta\beta}$ 可知，等式(21)和(23)成立. 同样，由引理 3.3，得到粘结场的正则解

$$\beta\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))\cap\mathcal{O}.$$

唯一性. 令

$$(u,\boldsymbol{\sigma},\beta)\in C^1([0,T];V)\times C([0,T];Q_1)\times W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))\cap\mathcal{O}$$

是问题 P_2 的一个解，并记为 $\boldsymbol{\eta}\in C([0,T];V)$，定义函数

$$(\boldsymbol{\eta}(t),w)_V=\langle B\boldsymbol{\varepsilon}(u(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(w)\rangle_Q+r(\beta(t),u(t),w),\qquad\forall w\in V,\ t\in[0,T],\tag{45}$$

又令

$$v=\dot{u}.\tag{46}$$

利用式(19)和(20)得到，v 是问题 $\mathrm{P}_{1\eta}$ 的一个解，又因为该问题有唯一解 $v_\eta\in C([0,T];V)$，可以推出

$$v=v_\eta.\tag{47}$$

因此，由式(22)、(46)、(47)，得到

$$u(t)=u_0+\int_0^t v_\eta(s)\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T],$$

即

$$u=u_\eta.\tag{48}$$

式(21)和初始条件 $\beta(0)=\beta_0$，隐含着 β 是问题 $\mathrm{P}_{\eta\beta}$ 的一个解，因此该问题存在唯一解 β_η，可以推出

$$\beta = \beta_{\eta}. \tag{49}$$

现在利用式(37)、(45)和式(48)、(49)，可以得到$\Lambda\eta = \eta$. 所以，由式(24)和(37)推出

$$\sigma = \sigma_{\eta}. \tag{50}$$

由引理3.4可知，算子Λ存在唯一的不动点，得到

$$\eta = \eta^{*}. \tag{51}$$

解的唯一性正是式(48)～(51)的一个结果.

参考文献：

[1] Duvaut G, Lions J-L. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*[M]. Paris: Dunod, 1972.

[2] Sofonea M, Han W, Shillor M. *Analysis and Approximations of Contact Problems With Adhesion or Damage*[M]. Pure and Applied Mathematics. L**76**. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall / CRC Press, 2006.

[3] Awbi B, Chau O, Sofonea M. Variational analysis of a frictional contact problem for viscoelastic bodies [J]. *Int Math J*, 2002, **1**(4): 333-348.

[4] Chau O, Fernandez J R, Shillor M, *et al*. Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, **159**(2): 431-465.

[5] Chau O, Shillor M, Sofonea M. Dynamic frictionless contact with adhesion[J]. *J Appl Math Phys*(*ZAMP*), 2004, **55**(1): 32-47.

[6] Fernandez J R, Shillor M, Sofonea M. Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion[J]. *Math Comput Modelling*, 2003, **37**(12): 1317-1333.

[7] Sofonea M, Hoarau-Mantel T V. Elastic frictionless contact problems with adhesion[J]. *Adv Math Sci Appl*, 2005, **15**(1): 49-68.

[8] Cangémi L. Frottement et adhérence: modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice[D]. PhD Thesis. Aix Marseille I: Univ Méditerranée, 1997.

[9] Frémond M. Adhérence des solides[J]. *J Mécanique Théorique et Appliquée*, 1987, **6**: 383-407.

[10] Frémond M. Equilibre des structures qui adhèrent ā leur support[J]. *C R Acad Sci*, *Série* Ⅱ, 1982, **295**: 913-916.

[11] Raous M, Cangémi L, Cocu M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact[J]. *Comput Meth Appl Mech Engng*, 1999, **177**(3/4): 383-399.

[12] Rojek J, Telega J J. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopeadic biomechanics—Ⅰ: general developements[J]. *J Theor Appl Mech*, 2001, **39**: 655-677.

[13] Shillor M, Sofonea M, Telega J J. *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*[M]. Lecture Notes Physics. Vol **655**. Berlin: Springer, 2004.

[14] Sofonea M, Arhab R, Tarraf R. Analysis of electroelastic frictionless contact problems with adhesion[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2006: 1-25. ID 64217.

[15] Nassar S A, Andrews T, Kruk S, *et al*. Modelling and simulations of a bonded rod[J]. *Math Comput Modelling*, 2005, **42**(5/6): 553-572.

[16] Brezis H. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité[J].

Annales Inst Fourier, 1968, **18**(1): 115-175.

[17] Cocou M, Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion[J]. *Math Model Num Anal*, 2000, **34**(5): 981-1001.

[18] Frémond. *Non Smooth Thermomechanics*[M]. Berlin: Springer, 2002.

Quasistatic Bilateral Contact Problem With Adhesion and Nonlocal Friction for Viscoelastic Materials

Arezki Touzaline

(*Laboratoire de Systèmes Dynamiques*, *Faculté de Mathématiques*, *USTHB*, *BP* 32 *EL ALIA*, *Bab-Ezzouar*, 16111, *Algérie*)

Abstract: A mathematical model which describes a contact problem between a deformable body and a foundation was considered. The contact was bilateral and was modelled with nonlocal friction law in which adhesion was taken into account. The evolution of the bonding field was described by a first-order differential equation and the material's behavior was modelled with a nonlinear viscoelastic constitutive law. A variational formulation of the mechanical problem was derived and the existence and uniqueness result of the weak solution were proved if the coefficient of friction was sufficiently small. The proof is based on arguments of time-dependent variational inequalities, differential equations and Banach fixed-point theorem.

Key words: viscoelastic materials; adhesions; nonlocal friction; fixed point; weak solution