

弹性固体和微极多孔晶体界面及其结合 松散度对弹性波传播的影响*

R·库玛, M·潘确

(库鲁克西察大学 数学系,库鲁克西察-136119,印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 在松散结合的弹性固体和微极多孔立方晶体半空间之间的界面上,研究周期平面波的反射和透射,假定界面性质类似于断层,断层上的牵引力保持连续,但允许产生有限的滑移.用图形给出各种反射波和透射波的振幅比.文中还演绎出某些重要的特殊情况.

关键词: 微极; 多孔; 立方晶体; 反射系数; 透射系数; 结合参数

中图分类号: O345;O347.4⁺1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.05.008

引 言

Nunziato 和 Cowin^[1]将物体分类,讨论了含有孔隙(真空)的固体弹性材料的非线性理论.其后 Cowin 和 Nunziato^[2]发展为含真空的线弹性材料理论,开展了多孔固体力学性能的数学研究.他们在经典连续模型中引入孔隙,通过给每个材料颗粒赋予附加自由度,即引入材料空洞的单位体积率;因此,材料的体质量密度将成为两个场的乘积:真空体积率和基体材料质量密度的乘积.

Suhubi 和 Eringen^[3]及 Eringen^[4]的微形态理论,把一个材料体看成是一个连续的、大量可变形颗粒的集合,每个颗粒拥有有限的大小和内部结构,用在无限小变形和低速运动假设时,微形态理论可以简化为 Mindlin 微结构理论^[5].当材料的微结构理论用于刚性材料时,它就成为微极理论^[6].

Scarpetta^[7], Passarella^[8], Marin^[9]就带孔洞的微极材料,进行了不同类型问题的讨论. Minagawa 等^[10]讨论了平面谐波在立方微极介质中的传播问题.

我们并不知道地球表面以下地层的精确状态.因此,出于理论研究的不同目的,我们考虑采用不同的模型.在两个弹性半空间界面上,地震波的反射和折射问题中,通常假设两个半空间在界面上是“焊接”接触的.因此假设,界面上将出现一层非常薄的粘性液体层,并把两种介质界面看作松散结合是合理的.

* 收稿日期: 2009-05-01; 修订日期: 2010-01-14

基金项目: 印度科学和工业研究会(CSIR)资助项目

作者简介: Rajneesh Kumar(联系人. E-mail:Rajneesh_kuk@rediffmail.com)

本文原文为英文,由吴承平译,张禄坤校.

本文就两种固体半空间(一种为弹性固体半空间,另一种为微极多孔立方晶体半空间),在其松散结合界面上,对平面波的反射和透射进行分析.

1 问题的数学表达和求解

按照 Passarella 的文献[8],在不计体力、体耦合、热源和外来的体力时,广义微极多孔各向异性介质中,对称支配中心的本构关系和平衡定律为

本构关系

$$\begin{cases} t_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + G_{ijkl}\Psi_{kl} + H_{ij}\Phi, & m_{ij} = G_{klhi}E_{kl} + \Gamma_{ijkl}\Psi_{kl} + P_{ji}\Phi, \\ g = -H_{ij}E_{ij} - P_{ij}\Psi_{ij} - a\Phi - a_i\Phi_{,i}, & h_i = a_i\Phi + D_{ij}\Phi_{,j}, \\ E_{ji} = u_{i,j} + \epsilon_{ijk}\phi_k, & \Psi_{ij} = \phi_{i,j}; \end{cases} \quad (1)$$

平衡定律

$$t_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i, \quad m_{ij,j} - \epsilon_{irs}t_{rs} = \rho J\dot{\phi}_i, \quad h_{i,i} + g = \rho\chi\Phi, \quad (2)$$

其中 t_{ij}, m_{ij} 分别为应力张量和耦合应力张量, h_i 为平衡应力矢量, g 为固有的平衡体力, ρ 为体质量密度, Φ 为体积率的改变, u_i, ϕ_i 分别为位移矢量分量和微极旋转矢量分量. 这里, 字母顶上的($\dot{}$)表示对时间的偏导数. $C_{ijkl}, G_{ijkl}, \Gamma_{ijkl}, H_{ij}, D_{ij}, P_{ij}, a, a_i$ 为材料的特征常数, 是 Passarella^[8]根据材料的对称性给出的.

对于均匀各向同性弹性体, 应力张量分量和运动方程为

$$t_{ij}^e = \lambda_e u_{k,k}\delta_{ij} + \mu_e (u_{i,j}^e + u_{j,i}^e), \quad t_{ij,j}^e = \rho^e \ddot{u}_i^e, \quad (3)$$

其中 λ_e 和 μ_e 为各向同性弹性固体的 Lamé 常数, 其它符号如前定义.

问题的公式

设 $M(y > 0)$ 和 $M'(y < 0)$ 分别为微极多孔立方晶体和弹性固体半空间, 指定平面 $y = 0$ 为它们之间松散结合的界面. 根据 Atanackovic 等的文献[11], 对方程组(1)作适当的变换, 我们就能导出微极多孔立方晶体的方程. 我们将分析限于 xy -平面的二维问题, 以使所有的场变量与 z 坐标无关. 引入无量纲变量:

$$\begin{cases} \{x', y', u'_1, u'_2, u'_1{}^e, u'_2{}^e\} = \frac{\omega^*}{c_1} \{x, y, u_1, u_2, u_1^e, u_2^e\}, \\ \{\phi'_3, \Phi'\} = \frac{C_{11}}{C_{45}} \{\phi_3, \Phi\}, \quad t' = \omega^* t, \\ \omega^{*2} = \frac{C_{11} - C_{45}}{\rho J}, \quad c_1^{*2} = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad \{t'_{ij}, t'_{ij}{}^e\} = \frac{1}{C_{11}} \{t_{ij}, t_{ij}^e\}, \quad m'_{ij} = \frac{c_1^*}{\Gamma_{44}\omega^*} m_{ij}, \end{cases} \quad (4)$$

省去撇号, 并使用形式如下的平面波解:

$$\{u_1, u_2, \phi_3, \Phi, u_1^e, u_2^e\} = \{A, B, C, D, A_0, B_0\} e^{ik(ct - xp_1 - yp_2)}, \quad (5)$$

在方程(2)和(3)中, 利用方程(1), 并通过某些简化后得到:

$$A^* c^8 = B^* c^6 + C^* c^4 + D^* c^2 + E^* = 0 \quad (6)$$

和

$$c^4 - A' c^2 + B' = 0, \quad (7)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned}
 &A^* = WW', B^* = -(2UWW' + (1 + V^*)W + (1 + U^*)W'), \\
 &C^* = WW'(UU' - V^2) + (W + W')(U + U') + (1 + U^*)(1 + V^*) + \\
 &\quad p_1^2(U^*UW' + U'V^*W) + p_2^2(U'U^*W' + UV^*W) + \\
 &\quad p_1p_2(U^*W' - U^* - 2V^*W)V, \\
 &D^* = -\{(UU' - V^2)(W + W') + U + U' + p_1^2(UU^* + U'V^*) + \\
 &\quad p_2^2(UV^* + U'U^*) + p_1p_2V(U^*(1 - W') - 2V^*)\}, \\
 &A' = \frac{1}{\delta_1^2}(U_1^* + U_2^*), B' = \frac{1}{\delta_1^4}(U_1^*U_2^* - U_3^*(1 - \delta_2^2)), \\
 &E^* = UU' - V^2, U = p_1^2 + a_1p_2^2, U' = a_1p_1^2 + p_2^2, V = a_2p_1p_2, U^* = \frac{a_3a_5}{\omega^2a_6}, \\
 &V^* = \frac{a_4a_8}{\omega^2}, W = a_7 + \frac{2a_5}{\omega^2}, W' = a_{10} - \frac{a_9}{\omega^2}, a_1 = \frac{C_{44}}{C_{11}}, a_2 = \frac{C_{12} + C_{45}}{C_{11}}, \\
 &a_3 = \frac{(C_{44} - C_{45})C_{45}}{C_{11}^2}, a_4 = \frac{H_1C_{45}}{C_{11}^2}, a_5 = \frac{(C_{44} - C_{45})C_1^{*2}}{\Gamma_{44}\omega^{*2}}, a_6 = \frac{C_{45}}{C_{11}}, \\
 &a_7 = \frac{\rho Jc_1^{*2}}{\Gamma_{44}}, a_8 = \frac{H_1c_1^{*2}}{D_1\omega^{*2}a_6}, a_9 = \frac{ac_1^{*2}}{D_1\omega^{*2}}, a_{10} = \frac{\rho\chi c_1^{*2}}{D_1}, \delta_1^2 = \frac{c_1^{*2}}{c_2^{*2}}, \delta_2^2 = \frac{c_3^{*2}}{c_2^{*2}}, \\
 &c_2^{*2} = \frac{\lambda_e + 2\mu_e}{\rho_e}, c_3^{*2} = \frac{\mu_e}{\rho_e}, U_1^* = p_1^2 + p_2^2\delta_2^2, U_2^* = p_1^2\delta_2^2 + p_2^2, U_3^* = p_1^2p_2^2.
 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

将方程(6)的根命名为 c_5^2, c_6^2, c_7^2 和 c_8^2 , 分别给出了4种可能的波速, 即准纵向位移(qLD)波, 准纵向体积率(qLV)波(包括真空体积率的改变), 耦合的准横向位移(qTD)波和准横向微极旋转(qTM)波. 类似地, 方程(7)为 c^2 的二次方程, 给出2种可能的波, 即纵波(P波)和横波(SV波)的传播速度, 我们分别称这两个速度为 c_9 和 c_{10} . 图1显示, 界面上的入射波qLD, 或qLV, 或qTD, 或qTM, 将在 $y > 0$ 的半空间上产生反射的qLD, qLV, qTD和qTM波, 而在 $y < 0$ 的半空间上产生透射的P波和SV波.

给出总的位移、微极旋转和体积率场为

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\{u_1, u_2, \phi_3, \Phi\} = \sum_{j=1}^8 \{K_j, L_j, M_j, N_j\} e^{ip_j}, \\
 &\{u_1^e, u_2^e\} = \sum_{j=9}^{10} \{1, F_j\} K_j e^{ip_j},
 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned}
 &P_j = \omega[t - (x \sin e_j - y \cos e_j)/c_j], \quad j = 1, 2, 3, 4, 9, 10, \\
 &P_j = \omega[t - (x \sin e_j + y \cos e_j)/c_j], \quad j = 5, 6, 7, 8,
 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

ω 为角频率. 这里, 下标1, 2, 3, 4分别对应表示入射的qLD, qLV, qTD和qTM波, 而下标5, 6, 7, 8分别对应表示相应的反射波, 下标9, 10分别对应表示透射的P波和SV波.

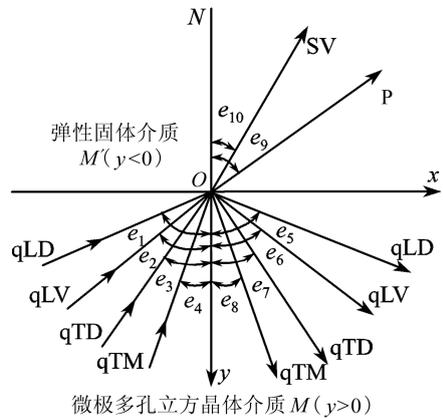


图1 界面上的反射和透射

$$\left\{ \begin{aligned}
 &L_j = F_j^* K_j, M_j = F_j^{**} K_j, N_j = F_j^{***} K_j, \\
 &F_j^* = -\Delta_j^* / \Delta_j, F_j^{**} = \Delta_j^{**} / \Delta_j, F_j^{***} = -\Delta_j^{***} / \Delta_j, \quad j = 1, \dots, 8, \\
 &F_j = -(U_j^* - c_j^2 \delta_1^2) / (p_1 p_2 (1 - \delta_2^2)), \quad j = 9, 10, \\
 &\Delta_j = -WW'c_j^6 + \{(1 + p_2^2 V^*)W + (1 + p_1^2 U^*)W' + U_j' WW'\}c_j^4 - \\
 &\quad \{U_j'(W + W') + 1 + p_1^2 U^* + p_2^2 V^*\}c_j^2 + U_j', \\
 &\Delta_j^* = \{V_j WW' + p_1 p_2 (V^* W - U^* W')\}c_j^4 + \\
 &\quad \{-V_j(W + W') + p_1 p_2 (U^* - V^*)\}c^2 + V_j, \\
 &\Delta_j^{**} = \frac{ia_5 c_j}{\omega a_6} \{p_2 W' c_j^4 - \{p_1 V_j W' + p_2 (1 + U_j' W' + V^*)\}c_j^2 + \\
 &\quad p_1 V_j + p_2 U_j'\}, \\
 &\Delta_j^{***} = -\frac{ia_8 c_j}{\omega} \{p_1 W c_j^4 + \{p_1 (U^* - U_j' W - 1) + p_2 V_j W\}c_j^2 + \\
 &\quad p_1 U_j' - p_2 V_j\}, \quad j = 1, \dots, 8.
 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

其中表达式 U_j, U_j', V_j 和 U_j^* , 可将公式(8) 表达式 U, U', V 和 U_1^* 中的 p_1 和 p_2 替换后给出, 这里

$$p_1, p_2 = \begin{cases} \text{sine}_j, -\text{cose}_j, & \text{当 } j = 1, 2, 3, 4, 9, 10, \\ \text{sine}_j, \text{cose}_j, & \text{当 } j = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \quad (12)$$

即 $U_1 = \sin^2 e_1 + a_1 \cos^2 e_1, U_1' = a_1 \sin^2 e_1 + \cos^2 e_1$ 和 $V_1 = -a_2 \sin e_1 \cos e_1$ 等等. 我们按照 Murti 的文献[12]中给出的模型, 假设弹性固体半空间和微极多孔立方晶体半空间之间合层的模型. 设该层的厚度为 D , 粘性系数为 η . 当 $D \rightarrow 0$, 层厚为无限小时, 因此作适当的推测, 界面上的剪应力应为

$$t_{21} = \eta \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (13)$$

其中, u_1 为沿界面的位移分量, 其偏导数垂直于界面. 我们重写方程(13)为

$$t_{21} = \frac{\eta}{D} (\dot{u}_1 - \dot{u}_1^e). \quad (14)$$

这里, 位移分量差 $u_1 - u_1^e$ 平行于界面, 表示相对滑移. 松散结合界面 $y = 0$ 上的边界条件可以合理地定义为

$$t_{22} = t_{22}^e, t_{21} = t_{21}^e, u_2 = u_2^e, m_{23} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

剪力和界面上的相对滑移成比例(在式(14)中引入由式(4)定义的无量纲量, 注意, 脉冲是以时间的谐和函数传播, 以后抑制冲击), 即

$$t_{21} = \zeta ik \frac{c_0}{\text{sine}_0} (u_1 - u_1^e), \quad (16)$$

其中 $\zeta = \eta c_1^* / (C_{11} D), e_0 = \arcsin(kc_0/\omega)$ 为入射角, c_0 为入射波速度. 用 (c_j, e_j) 替换 (c_0, e_0) , j 取值 1 到 4, 分别对应于 4 类入射波. 为方便计, 引入变量 $\psi, 0 \leq \psi \leq 1$, 使 $\zeta = \psi / (1 - \psi)$. 将区域 $0 \leq \zeta \leq \infty$, 映射到区域 $0 \leq \psi \leq 1$ 中. 这样, $\psi = 0$ 对应于完全光滑界面, $\psi = 1$ 对应于“焊接”界面, 而其他任意的中间值, 对应于两个半空间之间的界面是松散地结合. ψ 可以看成粘结常数. 因此, 最终的边界条件形式为

$$t_{21} = ik \frac{c_0}{\sin e_0} \frac{\psi}{1 - \psi} (u_1 - u_1^e). \quad (17)$$

由 Snell 定律给出

$$\frac{\sin e_1}{c_1} = \frac{\sin e_2}{c_2} = \dots = \frac{\sin e_9}{c_9} = \frac{\sin e_{10}}{c_{10}} = \frac{1}{c}, \quad (18)$$

其中

$$k_1 c_1 = k_2 c_2 = \dots = k_{10} c_{10} = \omega.$$

利用方程(1)、(3),并将式(4)、(9)、(18)代入边界条件(15)和(17),得到

$$\sum_{j=1}^{10} A_{ij} A_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{1j} &= -a_{11} S_j \pm F_j^* C_j + a_4 F_j^{***}, \quad A_{2j} = \pm a_1 C_j - a_6 F_j^* S_j + a_3 F_j^{**}, \\ A_{3j} &= \pm F_j^{**} C_j, \quad A_{4j} = \pm F_j^{***} C_j, \quad A_{5j} = F_j^*, \\ A_{6j} &= \{ \pm a_1 C_j - a_6 F_j^* S_j + a_3 F_j^{**} \} (1 - \psi) \sin e_0 - ikc_0 \psi, \end{aligned}$$

其中, $j = 1, \dots, 8$, 并且在有双脚标时, 前一个对应于 $j = 1, \dots, 4$ 后一个对应于 $j = 5, \dots, 8$, 且

$$\begin{cases} A_{1j} = -\frac{\lambda_e}{C_{11}} S_j + \frac{\lambda_e + 2\mu_e}{C_{11}} F_j C_j, \quad A_{2j} = \frac{\mu_e}{C_{11}} \{ -F_j S_j + C_j \}, \\ A_{3j} = A_{4j} = 0, \quad A_{5j} = -F_j^*, \quad A_{6j} = ikc_0 \psi, \quad j = 9, 10, \\ S_j = i\omega \frac{\sin e_j}{c_j}, \quad C_j = i\omega \frac{\cos e_j}{c_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \quad (20)$$

入射波为 qLD 时, $A_2 = A_3 = A_4 = 0$. 通过 A_1 , 将方程(19)分组, 我们得到包含有 6 个未知数的 6 个非齐次方程组, 可以用 Cramer 定律求解, 得

$$Z_i = A_{i+4}/A_1 = \Delta_i^1/\Delta, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (21)$$

同样地, 对入射波 qLV, 有

$$A_1 = A_3 = A_4 = 0, \quad Z_i = A_{i+4}/A_2 = \Delta_i^2/\Delta;$$

对入射波 qTD, 有

$$A_1 = A_2 = A_4 = 0, \quad Z_i = A_{i+4}/A_3 = \Delta_i^3/\Delta;$$

对入射波 qTM, 有

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad Z_i = A_{i+4}/A_4 = \Delta_i^4/\Delta;$$

其中, $\Delta = |A_{ii+4}|_{6 \times 6}$, $\Delta_i^p (i = 1, 2, \dots, 6; p = 1, \dots, 4)$ 可以用 $[-A_{1p}, -A_{2p}, -A_{3p}, -A_{4p}, -A_{5p}, -A_{6p}]^T$ 分别替换 Δ 中的第 1 列, 第 2 列, \dots , 第 6 列得到.

2 特殊情况

(i) 略去多孔效应, 即 H_1, D_1, a 和 χ 等于 0, 我们就得到, 射向拥有立方对称微极半空间平面波的表达式.

(ii) 取 $C_{11} = C_{12} = \lambda + 2\mu + K, C_{44} = \mu + K, C_{45} = \mu, \Gamma_{44} = \gamma, D_1 = \alpha^*, H_1 = \beta^*, a = \zeta^*$, 我们就得到, 射向微极多孔各向同性固体半空间平面波的表达式.

3 数值结果与讨论

数值计算中, 微极多孔立方晶体相应的参数取值如下:

$$C_{11} = 2.6 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, C_{12} = 1.8 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, C_{44} = 6.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$C_{45} = 5.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \Gamma_{44} = 9.8 \times 10^{-10} \text{ N}, H_1 = 2.41 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$D_1 = 2.3 \times 10^{-9} \text{ N}, a = 2.185 \times 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

但对于微极多孔各向同性固体,按照 Eringen 的文献[13],我们取类似材料镁晶体,其材料参数为

$$\rho = 1.74 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \lambda = 9.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \mu = 4.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$\gamma = 7.79 \times 10^{-10} \text{ N}, J = 2.0 \times 10^{-20} \text{ m}^2.$$

孔隙参数为

$$\alpha^* = 1.44 \times 10^{-9} \text{ N}, \beta^* = 2.18 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$\zeta^* = 1.103 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \chi = 9.95 \times 10^{-20} \text{ m}^2,$$

但各向同性弹性固体取

$$\lambda_e = 2.238 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \mu_e = 2.992 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \rho^e = 2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

当4种波,即 qLD, qLV, qTD 和 qTM 波射入界面时,结果分两种情况来比较:一种情况,波射入微极多孔立方晶体(MPCC);另一种情况,波射入微极多孔各向同性固体(MPIS),用图形给出界面上4种反射波以及透射的P波和SV波的振幅比的变化.图2~7给出了入射 qLD 波时,振幅比 $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$, $|Z_4|$, $|Z_5|$ 和 $|Z_6|$ 的变化.图8~13,图14~19,图20~25分别给出了入射 qLV 波、qTD 波和 qTM 波时,它们振幅比的变化.这里 $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$, $|Z_4|$ 分别是入射波 qLD, qLV, qTD, qTM 的振幅比, $|Z_5|$ 和 $|Z_6|$ 分别是透射波 P 和 SV 的振幅比.在这些图形中,在 MPIS 情况下,带圈的实线表示 $\psi = 1$,带菱形的实线表示 $\psi = 0.4$,不带符号的实线表示 $\psi = 0$;而在 MPCC 情况下,这3种情况,将实线换成了虚线表示.

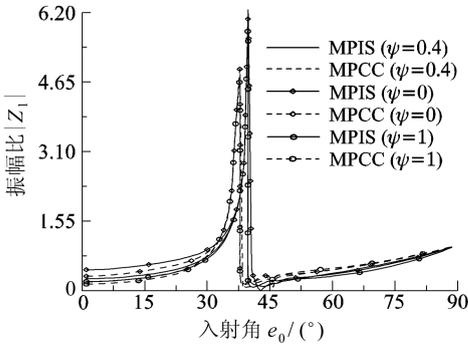


图2 入射 qLD 波时振幅比 $|Z_1|$ 的变化

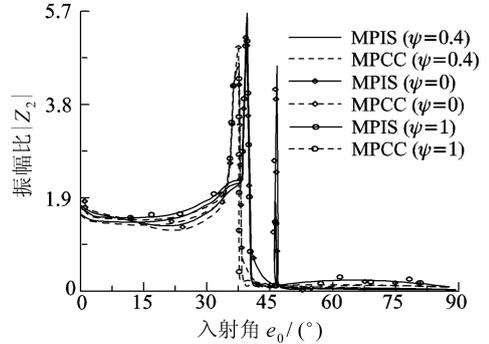


图3 入射 qLD 波时振幅比 $|Z_2|$ 的变化

3.1 入射 qLD 波

从图2可以看到,反射波 qLD 的振幅比 $|Z_1|$ 开始急剧增大,对 MPIS 来说, $e_0 = 40^\circ$ 时达到峰值;对 MPCC 来说, $e_0 = 30^\circ$ 时达到峰值,然后急剧减小,并最终都随这3种结合参数值 ψ 缓慢地增大.图3表明,在区域 $0^\circ < e_0 < 47^\circ$, $|Z_2|$ 出现某些最大值和最小值,然后在超过该区域处,减少到难以觉察的小数值.图4表明,振幅比 $|Z_3|$ 的值,开始随入射角线性地减小,然后在区域 $35^\circ < e_0 < 48^\circ$ 中突然增大.在 $0^\circ < e_0 < 35^\circ$ 范围内, $\psi = 1$ 时的 $|Z_3|$ 值高于 $\psi = 0.4$ 时的 $|Z_3|$ 值, $\psi = 0.4$ 时的 $|Z_3|$ 值,又更高于 $\psi = 0$ 时的 $|Z_3|$ 值.注意图5中 $|Z_4|$ 的变化,在 $e_0 = 0^\circ$ 时达到最大值,而在 $e_0 = 90^\circ$ 时达到最小值.入射角较小时 $|Z_4|$ 值就急剧减小,然后直到 $e_0 = 30^\circ$, $|Z_4|$ 值又逐渐增大,超出该区域后又逐渐减少到0.图6表明, $|Z_5|$ 值从0开始平稳地增大,在入射角中间值时达到最大值,然后又经过同样数值的入射角平稳地减

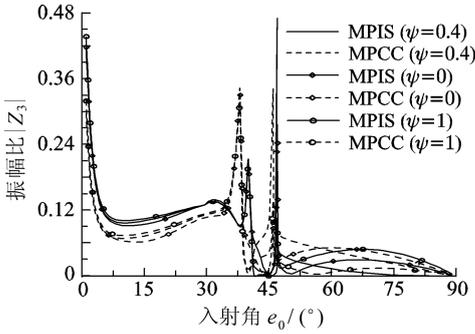


图4 入射 qLD 波时振幅比 $|Z_3|$ 的变化

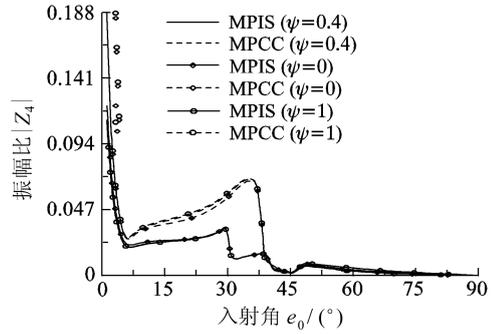


图5 入射 qLD 波时振幅比 $|Z_4|$ 的变化

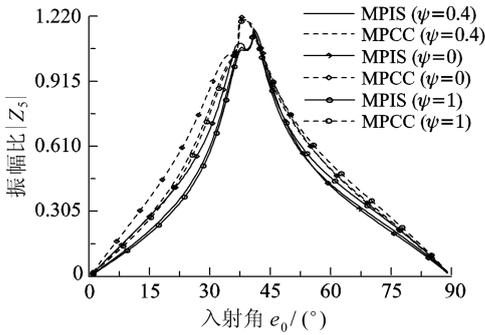


图6 入射 qLD 波时振幅比 $|Z_5|$ 的变化

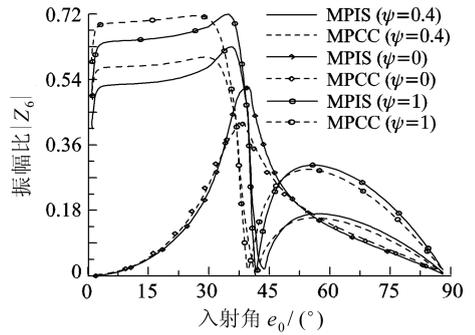


图7 入射 qLD 波时振幅比 $|Z_6|$ 的变化

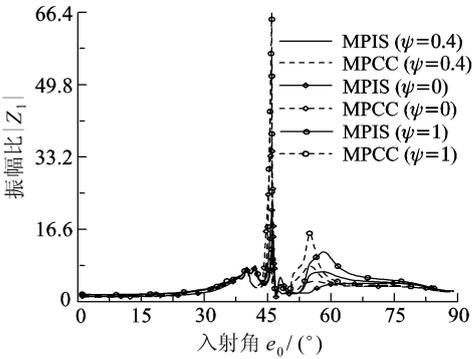


图8 入射 qLV 波时振幅比 $|Z_1|$ 的变化

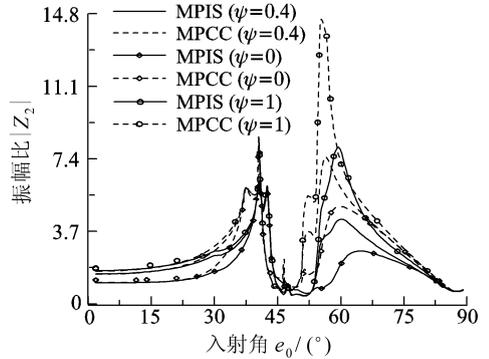


图9 入射 qLV 波时振幅比 $|Z_2|$ 的变化

小。图7给出 $|Z_6|$ 的变化，当 $\psi = 0.4$ 和 $\psi = 1$ 时，在 $0^\circ < e_0 \leq 30^\circ$ 范围内， $|Z_6|$ 值先是平稳地增大，然后陡然下降直到 $e_0 = 45^\circ$ 处，接着在随后的区域内呈抛物线变化。当 $\psi = 0$ 时， $|Z_6|$ 的值先是平稳地增大，在 $e_0 = 43^\circ$ 处达到最大值，然后减小到0。

3.2 入射 qLV 波

图8示出，在所有情况下，振幅比 $|Z_1|$ 值有限，在 $e_0 = 0^\circ$ 时非常接近于1.5，而在 $e_0 = 90^\circ$ 时接近于2.5。开始时 $|Z_1|$ 值随入射角缓慢地增大，在 $38^\circ < e_0 < 60^\circ$ 区间，出现振荡，然后减小到有限值。图9显示，将区域 $e_0 > 45^\circ$ 和区域 $e_0 < 30^\circ$ 加以比较，各向异性材料界面结合的松散性，对反射波 qLV 振幅比的影响更明显。在 $e_0 < 30^\circ$ 区域， $\psi = 1$ 时的 $|Z_2|$ 值大于 $\psi = 0.4$ 时 $|Z_2|$ 值， $\psi = 0.4$ 时 $|Z_2|$ 值又大于 $\psi = 0$ 时 $|Z_2|$ 值。 $|Z_2|$ 的所有曲线，出现两个高峰值，

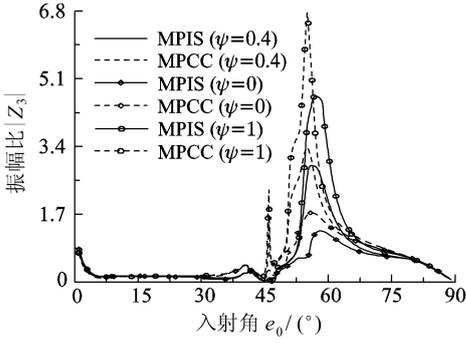


图 10 入射 qLV 波时振幅比 $|Z_3|$ 的变化

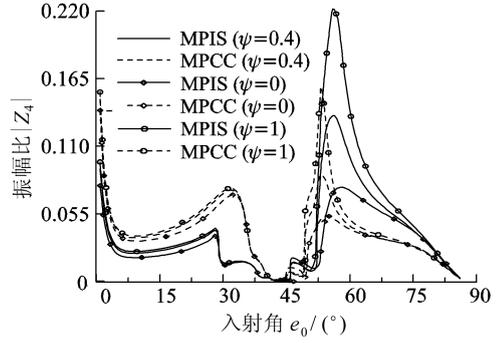


图 11 入射 qLV 波时振幅比 $|Z_4|$ 的变化

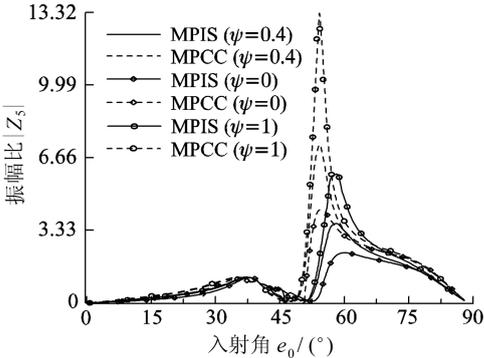


图 12 入射 qLV 波时振幅比 $|Z_5|$ 的变化

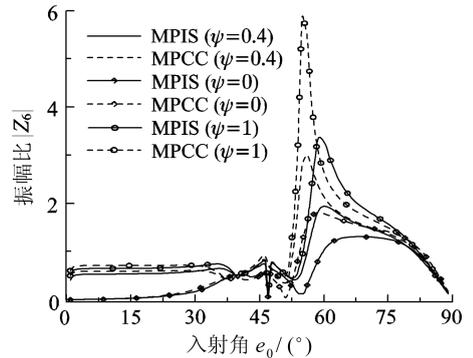


图 13 入射 qLV 波时振幅比 $|Z_6|$ 的变化

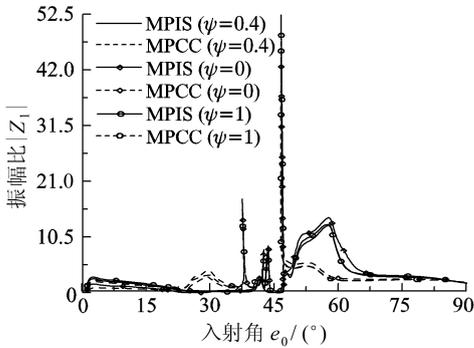


图 14 入射 qTD 波时振幅比 $|Z_1|$ 的变化

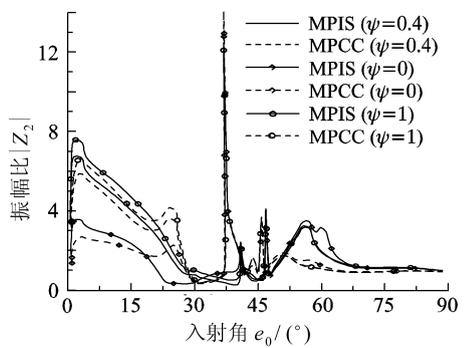


图 15 入射 qTD 波时振幅比 $|Z_2|$ 的变化

一个在 $36^\circ < e_0 < 43^\circ$ 区域内,另一个出现在 $54^\circ < e_0 < 65^\circ$ 区域内.图 10 给出了所有反射波 qLV 振幅比 $|Z_3|$ 的曲线,在区间 $0^\circ < e_0 < 45^\circ$ 中,所有曲线有着几乎相似的性质,在 $0^\circ < e_0 \leq 30^\circ$ 范围内,减小到某个常数值,但自该区域后,所有 $|Z_3|$ 曲线值又呈现增长,并在区间 $53^\circ < e_0 < 65^\circ$ 内,达到 $|Z_3|$ 值的最大值,并在该区域的远处,最终减小到 0.通过图 11,可以用来评价整个区域内界面结合的松散性,对各向异性体幅值比 $|Z_4|$ 的影响,将 MPCC 和 MPIS 相比较,在 $0^\circ < e_0 < 45^\circ$ 区域内,MPCC 在一个特殊的 ψ 值上, $|Z_4|$ 值达到高峰,经过该区域后,发生逆转,MPIS 出现高数值.图 12 给出 $|Z_5|$ 曲线的性质及其变化趋势,所有曲线的变化类似.仅在 $e_0 > 45^\circ$ 时,幅值有所不同.在所有情况下, $|Z_5|$ 的峰值出现在区间 $54^\circ < e_0 < 62^\circ$ 内.图 13 显示,在区间 $0^\circ < e_0 \leq 37^\circ$ 内,界面的松散性,对各向异性体的 $|Z_6|$ 值影响更大.除区间 $37^\circ < e_0 < 53^\circ$ 外, $|Z_6|$ 随着结合参数值而增大,但在区间 $37^\circ < e_0 < 53^\circ$ 内,曲线呈现混合

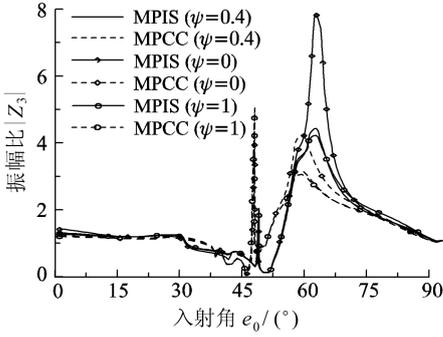


图 16 入射 qTD 波时振幅比 $|Z_3|$ 的变化

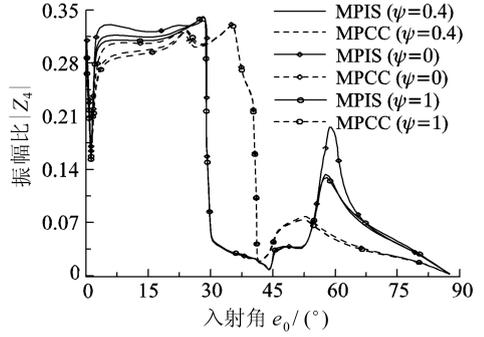


图 17 入射 qTD 波时振幅比 $|Z_4|$ 的变化

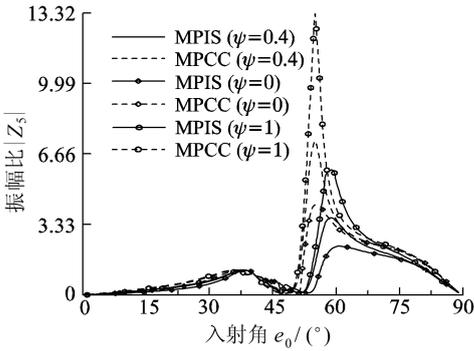


图 18 入射 qTD 波时振幅比 $|Z_5|$ 的变化

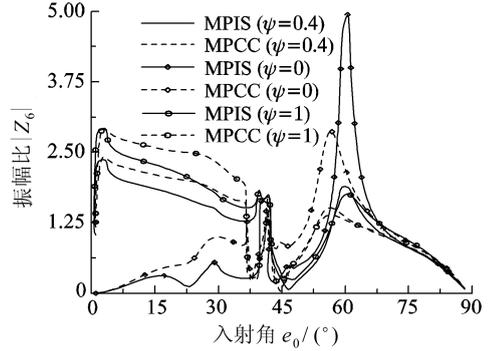


图 19 入射 qTD 波时振幅比 $|Z_6|$ 的变化

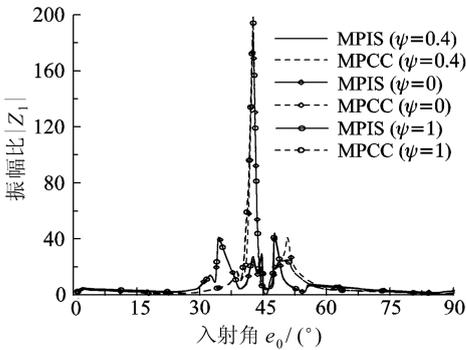


图 20 入射 qTM 波时振幅比 $|Z_1|$ 的变化

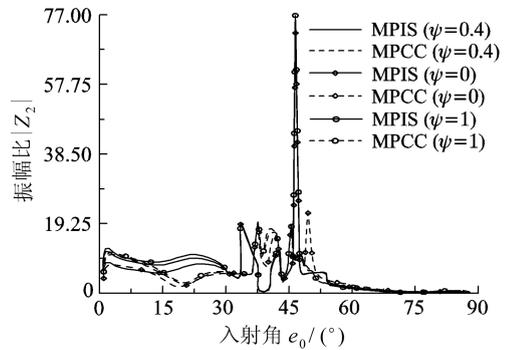


图 21 入射 qTM 波时振幅比 $|Z_2|$ 的变化

性。

3.3 入射 qTD 波

由图 14 看出,振幅比 $|Z_1|$ 在 $e_0 < 24^\circ$ 和 $e_0 > 60^\circ$ 区域,几乎是线性的,但在 $24^\circ < e_0 < 60^\circ$ 区域表现振荡性。将 MPCC 和 MPIS 相比较,在 $23^\circ < e_0 < 38^\circ$ 时,前者的 $|Z_1|$ 高于后者,而当 $e_0 > 50^\circ$ 时,两者的关系又颠倒过来了。图 15 给出反射波 qTD 的振幅比 $|Z_2|$,在区域 $0^\circ \leq e_0 \leq 30^\circ$,界面结合的松散性影响更明显, $|Z_2|$ 值随着结合参数 ψ 而增大。而在 $30^\circ < e_0 < 60^\circ$ 区间,曲线急剧振荡。在此区间以后, $|Z_2|$ 值又平稳地减小到一个常数值。图 16 表明, $|Z_3|$ 曲线的开始部分和末尾部分,有着差不多的数值。每条曲线都有两个峰值,一个 ψ 在 $43^\circ \leq e_0 \leq 48^\circ$,另一个 ψ 在 $56^\circ \leq e_0 \leq 60^\circ$,对那个特殊点 ψ 来说,MPIS 的峰值高于 MPCC 的峰值。从图

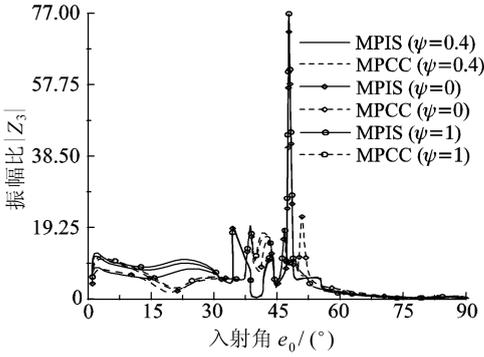


图 22 入射 qTM 波时振幅比 $|Z_3|$ 的变化

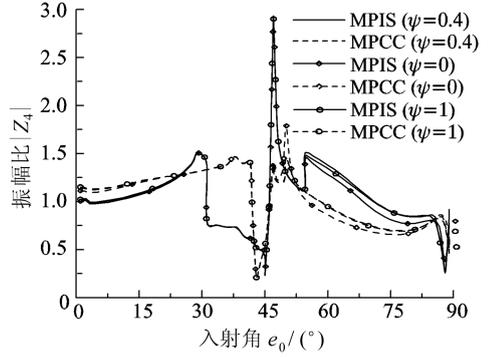


图 23 入射 qTM 波时振幅比 $|Z_4|$ 的变化

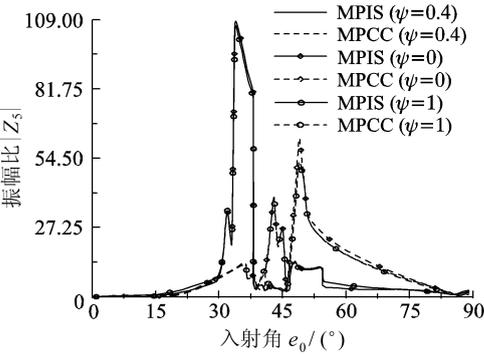


图 24 入射 qTM 波时振幅比 $|Z_5|$ 的变化

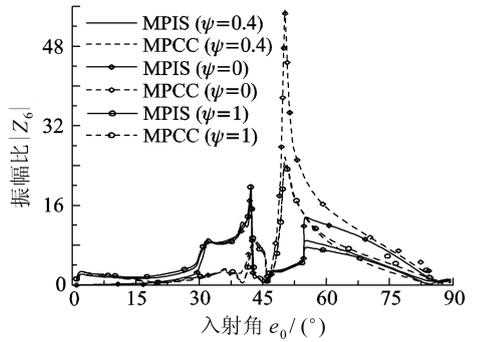


图 25 入射 qTM 波时振幅比 $|Z_6|$ 的变化

17 可以观察到,所有 $|Z_4|$ 曲线都在 $e_0 = 2^\circ$ 处急剧减小,然后增加达到最大值.以后,MPIS 在 $e_0 = 30^\circ$ 时,MPCC 在 $e_0 = 43^\circ$ 时,又开始急剧减小.在 $0^\circ \leq e_0 \leq 30^\circ$ 和 $e_0 > 52^\circ$ 范围内,显现了界面结合松散性的影响,在整个区间,对各向异性体出现重大的冲击作用.与不同的反射波相比较,透射波 $P(|Z_5|)$ 和 $SV(|Z_6|)$ 的振幅比变化更加振荡(见图 18、19).在 $|Z_5|$ 和 $|Z_6|$ 上,明显看到对各向异性体和界面结合松散度的冲击作用.当结合参数固定不变时,在区间 $0^\circ \leq e_0 \leq 35^\circ$,MPCC 的 $|Z_5|$ 和 $|Z_6|$ 值,比 MPIS 的 $|Z_5|$ 和 $|Z_6|$ 值更高.

3.4 入射 qTM 波

由图 20 和 21 可以看出, $|Z_1|$ 和 $|Z_2|$ 的值在区间 $0^\circ \leq e_0 \leq 30^\circ$ 和 $e_0 > 60^\circ$ 中非常平滑,但在区间 $30^\circ < e_0 < 60^\circ$ 中,出现振荡现象.对 MPCC 来说, $|Z_1|$ 的最大峰值出现在 $e_0 = 42^\circ$ 处,而对 MPIS 来说, $|Z_2|$ 的最大峰值出现在 $e_0 = 47^\circ$.界面结合松散效应, $|Z_2|$ 比 $|Z_1|$ 更大.图 22 示出了振幅比 $|Z_3|$ 的值,由一个小数值开始,增大到带有小振荡的最大值,最终又突然减少到小数值.在区间 $0^\circ \leq e_0 \leq 40^\circ$ 内,MPIS 时的 $|Z_3|$ 值,大于 MPCC 时的 $|Z_3|$ 值,但对于其后面的区间,对所有 3 种结合参数 ψ 值,两者的关系又反过来了.图 23 中 $|Z_4|$ 的变化表明,所有曲线在 $e_0 = 0^\circ$ 处非常接近于 1,对所有 3 种结合参数 ψ , $e_0 = 42^\circ$ 时 MPCC 达到最小值, $e_0 = 47^\circ$ 时 MPIS 达到最大值.当 $e_0 > 52^\circ$ 时, $\psi = 0.4$ 时的 $|Z_4|$ 值,大于 $\psi = 1$ 时的 $|Z_4|$ 值,接着又大于 $\psi = 0$ 时的 $|Z_4|$ 值.图 24 中 MPCC 和 MPIS 两种情况下,对 3 种结合参数 ψ 值, $|Z_5|$ 的变化特点和趋势总是类似的.对 MPIS 来说,首先在 $0^\circ < e_0 < 30^\circ$ 中,其值缓慢增大,而在 $e_0 = 32^\circ$ 时,急剧增大达到峰值,然后减小,趋近于小数值.对 MPCC 来说,在 $35^\circ < e_0 < 53^\circ$ 区间内,振荡变化, $e_0 = 52^\circ$ 时达到最大值.图 25 中 $|Z_6|$ 的变化表明,在整个区间

中,界面结合的松散性和材料的各向异性,出现重大的冲击作用.在整个区间 $|Z_6|$ 呈振荡的性质.在区间 $e_0 < 45^\circ$ 内,所有曲线呈现混合的特性,但在该区间之后,对 MPCC 来说, $\psi = 0$ 时的值高于 $\psi = 0.4$ 和 $\psi = 1$ 时的值;对 MPIS 来说, $\psi = 0$ 时的值高于 $\psi = 0.4$ 时的值,反而又高于 $\psi = 1$ 时的值.

4 结 论

对所有 4 种类型的入射波,振幅比 $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$ 的数值和 $|Z_4|$, $|Z_5|$, $|Z_6|$ 的数值比较表明,都在某个中间入射角处出现急剧振荡.对不同的反射波和透射波的振幅比,评估各向异性和界面结合松散性的影响,对入射波 qTM 来说,各向异性对振幅比的影响,比界面结合的松散性更大.入射波 qLD 时,透射波 P 的振幅比非常平滑,并且关于 $e_0 = 45^\circ$ 几乎对称,而在其他情况下,没有观察到这种现象.除透射波 SV 外,所有情况下,界面结合参数要影响振幅比的大小,同时改变了所有各种入射波的变化趋势.

致谢 作者之一 Meenakshi Panchal 小姐感谢印度国家科学和工业研究会(CSIR)对初级研究团体(JRF)的最终资助.

参考文献:

- [1] Nunziato J W, Cowin S C. A non-linear theory of elastic materials with voids[J]. *Archive Rational Mechanics and Analysis*, 1979, **72**(2): 175-201.
- [2] Cowin S C, Nunziato J W. Linear elastic materials with voids[J]. *Journal of Elasticity*, 1983, **13**(2): 125-147.
- [3] Suhubi E S, Eringen A C. Non-linear theory of simple microelastic solids II [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1964, **2**: 389-404.
- [4] Eringen A C. *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [5] Mindlin R D. Microstructure in linear elasticity[J]. *Archive Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1): 51-78.
- [6] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1966, **15**(6): 909-923.
- [7] Scarpetta E. On the fundamental solutions in micropolar elasticity with voids[J]. *Acta Mechanica*, 1990, **82**(3/4): 151-158.
- [8] Passarella F. Some results in micropolar thermoelasticity[J]. *Mechanics Research Communications*, 1996, **23**(4): 349-357.
- [9] Marin M. Some basic theorems in elastostatics of micropolar materials with voids[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1996, **70**(1): 115-126.
- [10] Minagawa S, Arakawa K, Yamada M. Dispersion curves for waves with reference to estimations of the material constant for diamond[J]. *Bulletin of JSME*, 1981, **24**(187): 22-28.
- [11] Atanackovic T M, Guran A. *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*[M]. Birkhauser, 2000.
- [12] Murti G S. Reflection, transmission and attenuation of elastic waves at a loosely-bonded interface of two half spaces[J]. *Geophys J R Astr Soc*, 1976, **44**(2): 389-404.
- [13] Eringen A C. Plane Waves in nonlocal micropolar elasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1984, **22**(8/10): 1113-1121.

Effect of Loose Bonding on Reflection and Transmission of Elastic Waves at Interface Between Elastic Solid and Micropolar Porous Cubic Crystal

Rajneesh Kumar, Meenakshi Panchal

(*Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshet-136 119, India*)

Abstract: The problem of reflection and transmission of plane periodic waves incident on the interface between loosely-bonded elastic solid and micropolar porous cubic crystal half spaces was investigated by assuming that the interface behaves like a dislocation which preserves the continuity of traction while allowing a finite amount of slip. Amplitude ratios of various reflected and transmitted waves were depicted graphically. Some special cases of interest also were deduced from the present investigation.

Key words: micropolar; porous; cubic crystal; reflection coefficients; transmission coefficients; bonding parameter