

粘弹性流体流经竖直表面时的瞬时自然对流*

H·M·杜威瑞¹, R·A·丹赛²,
A·J·千姆克哈³, M·S·艾伯德尔-亚博⁴

- (1. 约旦大学 工程技术学院 机械工程系, 安曼 11942, 约旦;
- 2. 基地拜勒加应用大学 基地胡森学院 机械工程系, 伊尔比德 21510, 约旦;
- 3. 应用教育与培训公共管理局 制造工程系, 舒韦赫 70654, 科威特;
- 4. 约旦大学 工程技术学院 土木工程系, 安曼 11942, 约旦)

(周哲玮推荐)

摘要: 静止流体中, 在一个竖直的、不可渗透的等温表面附近, 研究粘弹性边界层的流动及其热传导。得到其控制方程, 并利用 MackCormak 技术对其进行数值求解。与先前发表的关于该问题特例的结果相比较, 有着很好的一致性。对于不同的粘弹性参数值, 图示了速度和温度分布、边界层厚度、Nusselt 数、局部摩擦因数等典型结果。一般而言, 粘弹性流体与 Newton 流体相比较, 由于拉应力的促进作用, 流体动力边界层里的速度是增加的, 热边界层里的温度是下降的。粘弹性参数值越高, 摩擦因数和传热系数越高。

关键词: 粘弹性流动; 瞬时; 自然对流传热

中图分类号: O357.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.05.003

符 号 说 明

A_1, A_2	前两个 Rivlin-Ericksen 张量	Nu_x	局部 Nusselt 数
C_f	局部摩擦因数	P_1	球面应力
c_p	流体定压热容	Pr	Prandtl 数, ν/α
g	重力加速度	τ	无量纲时间
Gr	Grashof 数, $g\beta(T_w - T_\infty)L^3/\nu^2$	T	温度
h	传热系数	T_w	壁面温度
k	导热率	T_∞	周围的流体温度
k_0	弹性参数	u, v	分别为 x, y 方向的速度分量
L	板的特征长度	x, y	无量纲坐标
k_1^*	无量纲粘弹性参数, $(k_0/L^2)Gr^{1/2}$		
希腊字母			
α	热扩散系数	μ	流体的动力学黏度

* 收稿日期: 2009-07-08; 修订日期: 2010-01-21

作者简介: H. M. Duwairi, 副教授, 博士 (联系人. E-mail: duwairi@ju.edu.jo).

本文原文为英文, 黄雅意 译, 张禄坤 校.

α_1, α_2	材料模量	ν	流体的运动学粘滞系数
β	热膨胀系数	ρ	流体密度
θ	无量纲温度	$\boldsymbol{\Gamma}$	Cauchy 应力张量
脚 标			
w	壁面条件	∞	自然流条件
上 标			
-	无量纲变量		

引 言

粘弹性流体在很多制造工艺过程中有着广泛的应用,它重新唤起了很多研究者的兴趣,如 Rajagopal 等^[1-2], Dandapat 和 Gupta^[3], Rollins 和 Vajravelu^[4], Anderson^[5], Lawrence 和 Rao^[6], Char^[7] 和 Rao^[8] 等,研究了粘弹性边界层流经受拉伸的塑性平面.这类研究在物理学上的应用,包括薄板聚合体的挤出、玻璃纤维和纸张的生产、塑料薄膜的牵引等. Bird 等^[9]所用的粘弹性流体模型,是所谓二级流体的简化模型. Sakiadis^[10] 在作边界层近似时,使用了 Schlichting^[11] 提出的简化的控制方程. 由于没有足够的边界条件,最终的四阶非线性常微分方程形式,无法解析地或者数值地求解. 很多学者^[3-8] 应用 Van Dyke^[12] 提出的摄动技术,提出不同的简化方程来描述粘弹性流体的特性.

最近 Shawaqfeh 等^[13] 数值研究了“二级”粘弹性流体时,选择了一个 Blasius 流动的强迫对流模型,并预测了强迫对流的热传导系数. 发现在流体动力边界层里,速度是减小的,而温度是增大的,是由于拉应力的推动作用,摩擦因数和传热率都将减小. Damseh 等^[14] 研究二级粘弹性流体,流经竖直表面的瞬时混合对流时发现,在边界层里面的速度是下降的,是由于粘弹性参数的增大,因而,局部 Nusselt 数减小. 这归因于粘弹性流体层中更高的拉应力,对层与层之间运动的减缓效应,因而,减小了混合对流传热问题的传热率.

考虑到工业应用中,本质上大多数流体是非 Newton 流体,特别是粘弹性流体;我们将自然对流传热的研究,拓展到粘弹性流体流动及其传热. 将得到的控制方程用一系列无量纲变量写成无量纲形式,并利用 MackCormak 技术进行数值求解. 给出了粘弹性参数影响下,速度分布、温度分布、局部摩擦因数和局部 Nusselt 数.

1 数学方程

Coleman 和 Noll^[15] 给出了满足二阶流体的本构方程:

$$\boldsymbol{\Gamma} = -\mathbf{P}_1 + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_3, \quad (1)$$

这里, $\boldsymbol{\Gamma}$ 为 Cauchy 应力张量, $-\mathbf{P}_1$ 为球面应力,是由流体动力学黏度系数 μ 的不可压缩性约束所引起的, α_1, α_2 为材料模量, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 为运动张量. 模型方程(1)是计及延迟参数的二阶近似^[15] 导出的. Fosdick 和 Rajagopal^[16] 通过对实验数据的整理简化,指出二阶流体存在以下关系:

$$\mu \geq 0, \alpha_1 \leq 0, \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0. \quad (2)$$

粘弹性流体流经等温的竖直平板,平板突然加热,考虑其自然对流边界层的流动. 为了描述该问题,在平板上建立直角坐标系,沿平板表面取为 x -轴,垂直平板为 y -轴,如图 1 所示. 假定当 $\bar{t} \leq 0$ 时,平板和粘弹性流体的温度保持为常温 T_∞ ; 当 $\bar{t} > 0$ 时,平板的温度突然升高到常温 T_w ,使得 $T_w > T_\infty$. 边界层的连续条件、动量方程和能量方程,及 Boussinesq 近似可以按 Cor-

tell^[17] 写为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \\ \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - k_0 \left(\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \\ g\beta(T - T_\infty), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}, \quad (5)$$

这里, \bar{u} 和 \bar{v} 分别为 x 和 y 方向的速度分量, ν 为运动学粘滞系数; $k_0 = -\alpha_1/\rho$ 为弹性参数, 对于二阶流体而言, k_0 取正值, 正如材料模量 α_1 一样, k_0 也可以看成材料模量; $\alpha = k/(\rho c_p)$ 为热扩散系数, g 为重力加速度, β 为热膨胀系数. 为了进一步求解, 在方程(4)的推导中, 除边界层近似外, 假定法应力的和剪应力的和同阶. 方程(5)为热边界层方程, 并且没有对热弹性行为作额外的修正, 这是因为忽略了粘性耗散影响的缘故.

Rajagopal 等^[1] 给出了边界条件以及解的存在性和唯一性的重要观点. 在现有关于边界层流动的大部分文献中, 粘弹性流体流经线性拉伸的平面时, 可供处理的速度边界条件为 3 个, 它比该问题唯一求解所需要的数目少了一个, Rollins 和 Vajravelu^[18] 导出了该问题的唯一解, 包含了相似变量的指数项. 基于上述边界条件的讨论, 给出该问题的物理初始-边界条件如下:

$$\begin{aligned} \bar{t} \leq 0, \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad T = T_\infty, \quad \text{对所有的 } \bar{x} \geq 0, \bar{y} \geq 0; \\ \bar{t} > 0, \quad \begin{cases} \bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad T = T_\infty, & \text{对 } \bar{x} = 0, \bar{y} \geq 0, \\ \bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad T = T_w, & \text{对 } \bar{y} = 0, \bar{x} \geq 0, \\ \bar{u} = 0, \quad \partial \bar{u} / \partial \bar{y} = 0, \quad T = T_\infty, & \text{对 } \bar{y} \rightarrow \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $(\partial \bar{u} / \partial \bar{y})_{\bar{y} \rightarrow \infty} = 0$ 用来定义边界层厚度的边界条件. 定义无量纲变量如下:

$$t = Gr^{1/2}(\nu/L^2)\bar{t}, \quad x = \bar{x}/L, \quad y = Gr^{1/4}(\bar{y}/L), \quad (7)$$

$$u = Gr^{-1/2}(L/\nu)\bar{u}, \quad v = Gr^{-1/4}(L/\nu)\bar{v}, \quad \Theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty), \quad (8)$$

其中, L 为平板的特征长度, $Gr = g\beta(T_w - T_\infty)L^3/\nu^2$ 为 Grashof 数. 将方程(7)和(8)代入方程(3)~(6), 得到如下无量纲方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k_1^* \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \Theta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad (11)$$

其中 $k_1^* = (k_0/L^2)Gr^{1/2}$ 为修正的粘弹性参数, $Pr = \mu c_p/k$ 为 Prandtl 数. 注意到特例 $k_1^* = 0$ 时的流体, 又回到 Newton 流体. 相应的无量纲初始-边界条件可写为

$$t \leq 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \Theta = 0, \quad \text{对所有的 } x \geq 0, y \geq 0;$$

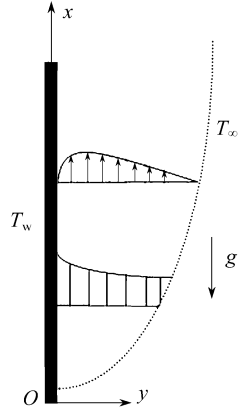


图1 粘弹性流体在竖直壁面附近的自然对流瞬时模型

$$t > 0, \quad \begin{cases} u = 0, v = 0, \Theta = 0, & \text{对 } x = 0, y \geq 0, \\ u = 0, v = 0, \Theta = 1, & \text{对 } y = 0, x \geq 0, \\ u = 0, \partial u / \partial y = 0, \Theta = 0, & \text{对 } y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (12)$$

无量纲摩擦因数 C_f 和局部 Nusselt 数 Nu_x , 对于该类型流体和传热来说, 是重要的物理参数^[19-20]. 它们用如下无量纲形式定义:

$$C_f Gr^{3/4} = (\partial u / \partial y)_{(x,0,t)} - 2k_1^* (\partial u / \partial y)_{(x,0,t)} (\partial v / \partial y)_{(x,0,t)}, \quad (13)$$

$$Nu_x Gr^{-1/4} = - (\partial \Theta / \partial y)_{(x,0,t)}. \quad (14)$$

2 结果和讨论

利用 McCormack 方法, 一种在空间和时间上达到二阶精度的、显式的有限差分法, 在初始-边界条件(12)下, 求解由方程(9) ~ (11) 表达的瞬时边界层方程. Anderson 在文献[21]中对该解法的细节作了清楚的说明. 数值解使用时间域向前差分的方法, 利用流线上游的已知值, 求出下游的速度和温度分布. 本文根据时间 t 时, 流场变量在网格结点 (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$ 和 $(i, j + 1)$ 上的已知值, 显式求出在时间 $t + \Delta t$ 时, 流场变量在结点 (i, j) 处的值. 同样的方法, 求得 $t + \Delta t$ 时, 流场变量在网格其它各结点处的值. 一旦得到了给定时刻的速度场和温度场, 则可由方程(13)和(14), 计算出局部摩擦因数和局部 Nusselt 数. 最近, Duwairi 和 Chamkha^[22], Duwairi 等^[23]对竖直表面的微极流场和水的自然对流场, 没有使用 Boussinesq 近似, 而利用上述数值方法, 求解它们的热传导问题. 在 y 方向上, 从时间和边界层厚度方向双双迭代逼近, 该解中使用的步长为 $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.05$. 在控制方程中, 通过迭代直至收敛, 空间和时间导数的收敛精度为 10^{-5} , 从而得到了速度分量和温度. 在某个时间单元上, 让增量 Δy 收敛, 之后让 Δt 收敛. 本解法不因步长 $\Delta x = 0.05$ 和 $\Delta y = 0.05$ 的改变而改变. 为了验证该方法的准确性, 对比所得结果与 Oosthuizen 和 Naylor^[24]所得的类似解: Newton 流体流经等温的、不可渗透的竖直平面时的稳定层流的自然对流, 表 1 给出了它们的比较结果. 由表 1 可以清楚地看出, 两者表现出很好的一致性.

表 1 沿流线方向稳态的热传导系数 $h(x, 0, \infty)$ 值

x	$h(x, 0, \infty) (k_1^* = 0, Pr = 7, t = \infty)$	
	本文结果	Oosthuizen 和 Naylor ^[24] 的结果
0.1	10.048 21	10.040 88
0.2	8.446 53	8.443 34
0.4	7.100 78	7.099 97
0.6	6.458 97	6.415 55
0.8	6.000 24	5.970 34
1.0	5.700 231	5.646 40

发现了粘弹性流体对本问题的影响, 与无量纲的粘弹性参数成比例. 无量纲粘弹性参数 $k_1^* = (k_0/L^2) Gr^{1/2}$ 与流体的弹性和 Grashof 数成正比, 粘弹性参数影响的增加, 是因为 Grashof 数和浮力效应(考虑到瞬时自然对流传热问题)的增加. 图 2 给出了对于不同修正的粘弹性参数 $k_1^* = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 以及 $Pr = 7, x = 0.5$ 时, 稳态速度 $u(x, y, t)$ 随边界层厚度 y 的变化. 由图 2 可以看出, 随着修正的粘弹性参数的增加, 边界层内的速度也是增加的, 这是因为流体中产生的弹性应力, 本质上为拉伸应力, 同时因为在流动方向, 流体有加速运动的趋势, 它

又清楚地表明,流体动力学边界层厚度是增加的,所选用的 Prandtl 数和粘弹性参数,都是粘弹性流体可接受的实验计算值。

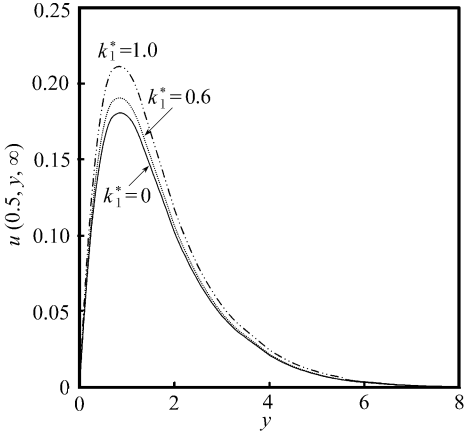


图2 对于不同的粘弹性参数及 $Pr = 7$, $x = 0.5$ (中点) 时, 稳态的速度分布

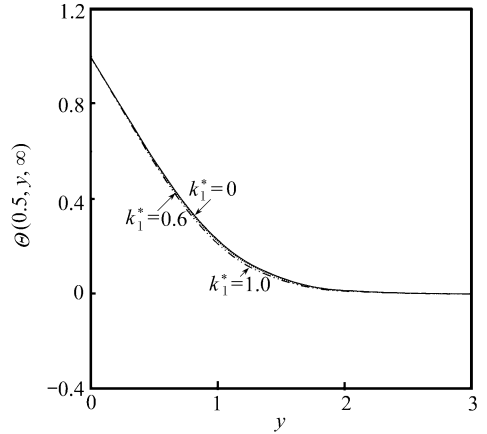


图3 对于不同的粘弹性参数及 $Pr = 7$, $x = 0.5$ (中点) 时, 稳态的温度分布

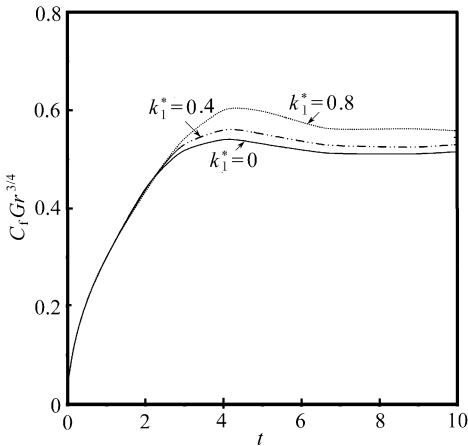


图4 对于不同的粘弹性参数及 $Pr = 7$, $x = 0.5$ (中点) 时, 摩擦因数随时间的变化

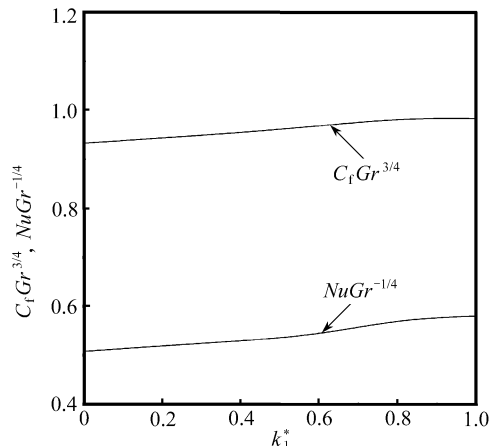


图5 当 $Pr = 7$, $x = 0.5$ (中点) 时, 稳态局部摩擦因数和 Nusselt 数随粘弹性参数的变化

图3 给出了不同的粘弹性参数 $k_1^* = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 及 $Pr = 7, x = 0.5$ 时, 稳态温度 $\theta(x, y, t)$ 随边界层厚度 y 变化. 随着粘弹性影响的增加, 边界层内的温度是下降的, 而竖直表面附近的温度梯度是增加的, 同时伴随着热交换的增强. 图4 给出了对于不同的粘弹性参数 $k_1^* = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 及 $Pr = 7, x = 0.5$ 时, 典型的瞬时摩擦因数 $C_f Gr^{3/4}$. 注意到 $k_1^* = 0$ 对应于 Newton 流体. 通过提高粘弹性参数, 可以增加局部摩擦因数, 这是因为速度的提高, 对流体边界层间的拉应力起着促进作用. 图5 给出了 $Pr = 7, x = 0.5$ 时, 稳态的局部摩擦因数和 Nusselt 数随粘弹性参数的变化. 粘弹性的提高, 导致局部摩擦因数和 Nusselt 数的提高, 粘弹性对速度分布稍有影响可以不考虑. 这是因为摩擦因数是表面附近轴向和竖向速度梯度以及粘弹性参数共同作用的结果.

3 结 论

研究了粘弹性流体流经竖直表面时,瞬时自然对流层流的热传导效应.将控制方程用一组变量写成无量纲形式,然后使用显式的有限差分法进行求解.我们发现,粘弹性参数的增加,可以提高边界层内的速度,从而导致摩擦因数的提高.同时还发现,粘弹性参数的增加,导致边界层内的温度下降,从而导致热传导系数的提高.

参考文献:

- [1] Rajagopal K R, Na T Y, Gupta A S. Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *Rheol Acta*, 1984, **23**: 213-215.
- [2] Rajagopal K R, Na T Y, Gupta A S. A non-similar boundary layer on a stretching sheet in a non-Newtonian fluid with uniform free stream[J]. *J Math Phys Sci*, 1987, **21**(2): 189-200.
- [3] Dandapat B S, Gupta A S. Flow and heat transfer in a viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1989, **24**(3): 215-219.
- [4] Rollins D, Vajravelu K. Heat transfer in a second-order fluid over a continuous stretching surface[J]. *Acta Mech*, 1991, **89**(1/4): 167-178.
- [5] Anderson H I. MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface[J]. *Acta Mech*, 1992, **95**: 227-230.
- [6] Lawrence P S, Rao B N. Heat transfer in the flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *Acta Mech*, 1992, **93**: 53-61.
- [7] Char M I. Heat and mass transfer in a hydromagnetic flow of viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *J Math Anal Appl*, 1994, **186**(3): 674-689.
- [8] Rao B N. Flow of a second grade fluid over stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1996, **31**(4): 547-550.
- [9] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids*[M]. Vol 1. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons Inc, 1987.
- [10] Sakiadis B. Boundary layer behavior on continuous solid surface: the boundary layer on a continuous flat surface[J]. *AIChE J*, 1961, **7**(1): 221-227.
- [11] Schlichting H. *Boundary Layer Theory*[M]. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [12] Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*[M]. New York: Academic Press, 1964.
- [13] Shawaqfeh M S, Damseh Rebhi A, Chamkha A J, et al. Forced convection of Blasius flow of "second-grade" visco-elastic fluid[J]. *Int J Heat and Technology*, 2007, **25**(1):145-151.
- [14] Damseh Rebhi A, Shatnawi Anis A, Chamkha A J, et al. Transient mixed convection flow of a second-grade visco-elastic fluid over vertical surfaces[J]. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, 2008, **13**(2): 169-179.
- [15] Coleman B D, Noll W. An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics[J]. *Arch Rat Mech Anal*, 1960, **6**(1): 355-370.
- [16] Fosdick R L, Rajagopal K R. Anomalous features in the model of second order fluids[J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1979, **70**(2): 145-152.
- [17] Cortell Rafael. Similarity solutions for flow and heat transfer of a viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1994, **29**(2): 155-161.
- [18] Rollins D, Vajravelu K. Heat transfer in a second grade fluid over a continuous stretching sur-

- face[J]. *Acta Mech*, 1991, **89**: 167-178.
- [19] Khan S K, Sanjayanad E. Viscoelastic boundary layer flow and heat transfer over an exponential stretching sheet[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, **48**(8): 1534-1542.
- [20] Sadeghy K, Sharfi M. Local similarity for the flow of a "second-grade" viscoelastic fluid above a moving plate[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2004, **39**(8): 1265-1273.
- [21] Anderson A D. *Computational Fluid Dynamics* [M]. Chap 6. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [22] Duwairi H M, Chamkha A J. Transient free convection flow of a micropolar fluid over a vertical surface[J]. *Int J Fluid Mechanics Research*, 2005, **32**(3): 255-268.
- [23] Duwairi H M, Damseh Rebhi A, Tashtoush Bourhan. Transient non-Boussinesq MHD-free convection flows over a vertical surface[J]. *Int J Fluid Mechanics Research*, 2006, **33**(2): 152-173.
- [24] Oosthuizen P H, Naylor D. *An Introduction to Convective Heat Transfer* [M]. New York: McGraw-Hill, 1999.

Transient Free Convection Flow of a Visco-Elastic Fluid Over a Vertical Surface

H. M. Duwairi¹, Rebhi. A. Damseh², A. J. Chamkha³,
Mu' tasim S. Abdel-Jaber⁴

(1. *Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering and Technology, University of Jordan, Amman 11942, Jordan;*

2. *Mechanical Department, Al-Husun University College, Albalqa Applied University, Irbid 21510, Jordan;*

3. *Manufacturing Engineering Department, The Public Authority for Applied Education and Training, Shuweikh 70654, Kuwait;*

4. *Civil Engineering Department, Faculty of Engineering and Technology, University of Jordan, Amman 11942, Jordan)*

Abstract: The viscoelastic boundary layer flow and heat transfer near a vertical isothermal impermeable surface and in a quiescent fluid were examined. The governing equations were formulated and solved numerically using the MackCormak's technique. A comparison with previously published results on special cases of the problem shows excellent agreement. Representative results for the velocity and temperature profiles, boundary layer thicknesses, Nusselt numbers and local skin friction coefficients are shown graphically for different values of viscoelastic parameter. In general, it is found that the velocities increase inside the hydrodynamic boundary layers and the temperatures decrease inside the thermal boundary layers for the viscoelastic fluid as compared to the Newtonian fluid due to favorable tensile stresses. Consequently the coefficient of friction and heat transfer are enhanced for higher viscoelastic parameter.

Key words: viscoelastic flows; transient; free convection heat transfer