文章编号:1000-0887(2010)04-0472-09

Banach 空间中的广义 H-η- 增生算子及其在变分包含中的应用*

罗雪萍, 黄南京

(四川大学 数学学院,成都 610064)

(郭兴明推荐)

摘要: 在 Banach 空间中,引入和研究了新的广义 H-η- 增生算子,对广义 m- 增生算子与 H-η- 单调算子提供了一个统一的框架. 还定义了广义 H-η- 增生算子相应的预解算子,并且证明了其 Lipschitz 连续性. 作为应用,考虑了涉及广义 H-η- 增生算子的一类变分包含问题的可解性. 利用预解算子方法,构造了一个求解变分包含的迭代算法. 在适当假设下,证明了变分包含解的存在性和由算法生成的迭代序列的收敛性.

关 键 词: 广义 H-η- 增生算子; 预解算子; 变分包含; 迭代算法; 收敛性

中图分类号: O177.91;O177.99 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.010

引 言

近些年,作为变分不等式的推广,变分包含得到了广泛的研究. 发展有效且可行的迭代算法是变分包含理论中最有趣且重要的问题之一. 在 Hilbert 空间或 Banach 空间中,利用各种不同的迭代算法来求解变分包含问题. 其中,预解算子方法被很多作者广泛地使用. 更多的相关内容,参见文献[1-33]及其参考文献.

众所周知,在变分包含理论中,映射的单调性起着必不可少的作用. 目前,Ding 和 Luo[1], Huang 和 Fang[2], Fang 和 Huang[3], Fang 和 Huang[4], Verma[5-6], Verma[7], Zhang[8], Sun 等[9] 在 Hilbert 空间中分别引入了 η- 次微分算子、极大 η- 单调算子、H- 单调算子、(H,η)- 单调算子、A- 单调算子、(A,η)- 单调算子、G-η- 单调算子和 M- 单调算子. 2001 年,Huang 和 Fang[34] 率先引入了广义 m- 增生算子,推广了极大 η- 单调算子的概念到 Banach 空间中. Fang 和 Huang[10-11], Lan 等[12-13] 和 Zou 和 Huang[14-15] 在 Banach 空间中分别研究了很多增生算子,诸如 H- 增生算子、(H,η)- 增生算子、(A,η)- 增生算子和 $H(\cdot,\cdot)$- 增生算子,推广了 Hilbert 空间中的 H- 单调算子、(H,η)- 单调算子、(A,η)- 单调算子和 M- 单调算子的概念. 他们还定义了相应的预解算子,利用预解算子方法,构造了近似收敛于变分包含解的迭代算法.

* **收稿日期:** 2009-06-11; **修订日期:** 2010-02-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671135);国家自然科学基金重点资助项目(70831005);教育部高等学校博士点基金资助项目(20060610005)

作者简介: 罗雪萍(1983—),女,四川达州人,博士生;
黄南京(1962—),男,江西石城人,教授(联系人. E-mail: nanjinghuang@hotmail.com).

另一方面,Xia 和 Huang[16],Ding 和 Feng[17],Feng 和 Ding[18],Lou 等[19],Ding 和 Wang[20],Luo 和 Huang[21]在 Banach 空间中分别引入了广义 H- 单调算子、A- 单调算子、H-η- 单调算子、B- 单调算子,推广了以上提及的单调算子相应的概念. 而且,在 Banach 空间中, H-η- 单调算子不同于广义 m- 增生算子.

由此领域研究结果的激发和启发,本文在 Banach 空间中,引入了新的广义 H-η- 增生算子,对广义 m- 增生算子与 H-η- 单调算子提供了一个统一的框架. 而且,我们还定义了广义 H-η- 增生算子相应的预解算子,证明了其 Lipschitz 连续性. 作为应用,我们考虑了涉及广义 H-η- 增生算子的一类变分包含问题的可解性. 利用预解算子方法,我们构造了一个求解变分包含的迭代算法. 在适当假设下,证明了变分包含解的存在性和由算法生成的迭代序列的收敛性. 我们的结论改进和推广了已有文献的重要结果.

1 预 备 知 识

设 X 是一具有对偶空间 X^* 的实 Banach 空间, $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 X 的范数和 X 与 X^* 之间的对偶对. 2^X 表示 X 中的所有子集族.

正规对偶映射 $J: X\to 2^{X^*}$ 由下式定义:

$$J(x)=\{f\in X^*: \langle f,x\rangle=\|f\|\,\|x\|,\ \|f\|=\|x\|\},\qquad \forall x\in X.$$

定义 1.1 设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的 Banach 空间. 设 $A: X\to Y$ 和 $\eta: X\times X\to Y^*$ 是单值映射. 称 A 是

(i) 广义 η- 增生的,如果 $\langle A(x)-A(y),\eta(x,y)\rangle\geqslant 0$, $\forall x,y\in X$;

(ii) 广义严格 η- 增生的,如果 $\langle A(x)-A(y),\eta(x,y)\rangle\geqslant 0$, $\forall x,y\in X$,且等号成立当且仅当 $x=y$;

(iii) 广义 γ-η- 强增生的,如果存在常数 $\gamma>0$ 使得

$$\langle A(x)-A(y),\eta(x,y)\rangle\geqslant\gamma\|x-y\|^2,\qquad\forall x,y\in X;$$

(iv) 广义 δ-η- 松弛增生的,如果存在常数 $\delta>0$ 使得

$$\langle A(x)-A(y),\eta(x,y)\rangle\geqslant-\delta\|x-y\|^2,\qquad\forall x,y\in X;$$

(V) s-Lipschitz 连续的,如果存在常数 $s>0$ 使得

$$\|A(x)-A(y)\|\leqslant s\|x-y\|,\qquad\forall x,y\in X.$$

定义 1.2 设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的 Banach 空间. 设 $M: X\to 2^Y$ 是多值映射, $\eta: X\times X\to Y^*$ 是单值映射. 称 M 是

(i) 广义 η- 增生的,如果 $\langle u-v,\eta(x,y)\rangle\geqslant 0$, $\forall x,y\in X$, $u\in Mx$, $v\in My$;

(ii) 广义严格 η- 增生的,如果 $\langle u-v,\eta(x,y)\rangle\geqslant 0$, $\forall x,y\in X,u\in Mx,v\in My$,且等号成立当且仅当 $x=y$;

(iii) 广义 r-η- 强增生的,如果存在常数 $r>0$ 使得

$$\langle u-v,\eta(x,y)\rangle\geqslant r\|x-y\|^2,\qquad\forall x,y\in X,u\in Mx,v\in My;$$

(iv) 广义 m-η- 松弛增生的,如果存在常数 $m>0$ 使得

$$\langle u-v,\eta(x,y)\rangle\geqslant -m\|x-y\|^2,\qquad\forall x,y\in X,u\in Mx,v\in My.$$

注 1.1 明显地,在 Banach 空间中,广义 η- 增生映射的概念对 η- 增生映射与 η- 单调映射提供了一个统一的框架.

(i) 如果 $Y=X$,则 $M: X\to 2^X$, $\eta: X\times X\to X^*$,因此定义 1.2 中的 (i) ~ (iv) 分别退化成文献[24,36]中引入的 η- 增生映射,严格 η- 增生映射,η- 强增生映射和 η- 松弛增生映射的定义.

(ii) 如果 $Y=X^*$,则 $M: X\to 2^{X^*}$,$\eta: X\times X\to X^{**}$,因此定义 1.2 中的(i) ~ (iv)分别退化成文献[19-20]中引入的 η_1- 单调映射、严格 η_1- 单调映射、η_1- 强单调映射和 η_1- 松弛单调映射的定义,其中 $\eta_1: X\times X\to X$ 是单值映射. 事实上,设 $\eta_1: X\times X\to X$ 和一个自然嵌入映射 $\phi: X\to X^{**}$ 使得对任意的 $x,y\in X$,有 $\eta(x,y)=(\phi\circ\eta_1)(x,y)$. 由定义 1.2 中的(i)和自然嵌入映射 ϕ 的性质,对任意的 $x,y\in X,u\in Mx$ 和 $v\in My$,有

$$\langle u-v,\eta_1(x,y)\rangle=\langle u-v,(\phi\circ\eta_1)(x,y)\rangle=\langle u-v,\eta(x,y)\rangle\geqslant 0.$$

因此 M 是一个 η_1- 单调映射. 类似地,利用相同的证明方法,我们可以得到定义 1.2 中的(ii) ~ (iv)分别退化成严格 η_1- 单调映射、η_1- 强单调映射和 η_1- 松弛单调映射.

(iii) 如果 $X=Y=\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,则 $M: \mathcal{H}\to 2^{\mathcal{H}}$,$\eta: \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}$,因此定义 1.2 中的(i) ~ (iv)分别退化成文献[2-4,7-8]中引入的 η- 单调映射、严格 η- 单调映射、η- 强单调映射和 η- 松弛单调映射的定义.

定义 1.3 称单值映射 $\eta: X\times X\to Y^*$ 是 Lipschitz 连续的,如果存在常数 $\tau>0$ 使得

$$\|\eta(x,y)\|\leqslant\tau\|x-y\|,\qquad\forall x,y\in X.$$

引理 1.1[35] 设 X 是实 Banach 空间,$J: X\to 2^{X^*}$ 是正规对偶映射. 则对任意的 $x,y\in X$,有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\qquad\forall j(x+y)\in J(x+y).$$

2 广义 H-η- 增生算子

定义 2.1 设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的 Banach 空间. 设 $H: X\to Y$,$\eta: X\times X\to Y^*$ 是单值映射,$M: X\to 2^Y$ 是多值映射. 称 M 是广义 H-η- 增生的,如果 M 是广义 m-η- 松弛增生的且 $(H+\lambda M)(X)=Y$ 对一切 $\lambda>0$ 成立.

注 2.1 (i) 如果 $Y=X$,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=J_q(\eta_1(x,y))$,其中 J_q 是广义正规对偶映射和 $\eta_1: X\times X\to X$ 是单值映射,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Lan 等[12-13]引入的(A,η_1)- 增生算子;

(ii) 如果 $Y=X,m=0$,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=J_q(\eta_1(x,y))$,其中 J_q 是广义正规对偶映射和 $\eta_1: X\times X\to X$ 是单值映射,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Fang,Cho 和 Kim 引入的(H,η_1)- 增生算子;

(iii) 如果 $Y=X,m=0$,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=J_q(x-y)$,其中 J_q 是广义正规对偶映射,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Fang 和 Huang[10-11]引入的 H- 增生算子;

(iv) 如果 $Y=X,H=I$ 和 $m=0$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Huang 和 Fang[34,22]引入的广义 m- 增生算子;

(v) 如果 $Y=X^*$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Lou 等[19],Ding 和 Wang[20]引入的 H-η- 单调算子;

(vi) 如果 $Y=X^*$,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=x-y$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Feng 和 Ding[18]引入的 A- 单调算子;

(vii) 如果 $Y=X^*,m=0$,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=x-y$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Xia 和 Huang[16],Ding 和 Feng[17]引入的广义 H- 单调算子;

(viii) 如果 $X=Y=\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$m=0$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Fang 等[4]引入的(H,η)- 单调算子;

(ix) 如果 $X=Y=\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=x-y$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Verma[5-6]引入的 A- 单调算子;

(x) 如果 $X=Y=\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$m=0$,对任意的 $x,y\in X$,$\eta(x,y)=x-y$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Fang 和 Huang[3]引入的 H- 单调算子;

(xi) 如果 $X=Y=\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$H=I$ 和 $m=0$,则广义 H-η- 增生算子退化成由 Huang 和 Fang[2]引入的极大 η- 单调算子.

例 2.1 设 $X=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,$Y=R^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$. $M: \mathbf{R}\to R^2$ 和 $H_1: \mathbf{R}\to R^2$ 分别由下式定义:对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$M(x)=(\sin x,x)$ 和 $H_1(x)=(1,e^x)$. $\eta: \mathbf{R}$

$\times \mathbf{R} \to (R^2)^* = R^2$ 由下式定义：对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{\eta}(x,y) = (\sin y - \sin x, y - x)$。则

$$\langle M(x) - M(y), \boldsymbol{\eta}(x,y)\rangle = \langle (\sin x - \sin y, x - y), (\sin y - \sin x, y - x)\rangle \geqslant -2\|x - y\|^2.$$

容易得到 $(H_1 + M)(x) = (1 + \sin x, e^x + x)$。由 $1 + \sin x = (\sin(x/2) + \cos(x/2))^2 \geqslant 0$ 推得 $(H_1 + M)$ 不是满射。因此，M 不是广义 H_1-$\boldsymbol{\eta}$-增生算子。

然而，如果对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$H_2(x) = (x^3, x)$，则 M 是广义 H_2-$\boldsymbol{\eta}$-增生算子。事实上，我们有 $(H_2 + M)(x) = (x^3 + \sin x, 2x)$，因此，$(H_2 + M)$ 是满射。

例 2.2　设 $X = l^1$，$Y = l^2$。l^2 中的内积由下式定义：对任意的 $x, y \in l^2$，$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$。设 $M: l^1 \to l^2$ 和 $H_1: l^1 \to l^2$ 分别由下式定义：对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^1$，$M(x) = e_n - 2x$ 和 $H_1(x) = x^2 + 2x$，其中 $e_n = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots) \in l^2$。设 $\boldsymbol{\eta}: l^1 \times l^1 \to (l^2)^* = l^2$ 由下式定义：对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^1$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in l^1$，$\boldsymbol{\eta}(x,y) = x - y$。则

$$\langle M(x) - M(y), \boldsymbol{\eta}(x,y)\rangle = \langle -2x + 2y, x - y\rangle = -2\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2 \geqslant -2\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i - y_i|\right)^2 \geqslant -2\|x - y\|_1^2,$$

容易得到

$$\|(H_1 + M)(x)\|_2^2 = \|x^2 + 2x + e_n - 2x\|_2^2 = \|e_n + x^2\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(e_{n_i} + x_i^2)^2 \geqslant 1,$$

这样，$0 \notin (H_1 + M)(l^1)$。因此，M 不是广义 H_1-$\boldsymbol{\eta}$-增生算子。

然而，如果对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^1$，$H_2(x) = x - e_n$，则 M 是广义 H_2-$\boldsymbol{\eta}$-增生算子。事实上，我们有 $(H_2 + M)(x) = e_n - 2x + x - e_n = -x$，因此，$(H_2 + M)$ 是满射。

定理 2.1　设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的 Banach 空间。设 $\boldsymbol{\eta}: X \times X \to Y^*$ 是单值映射，$H: X \to Y$ 是广义 r-$\boldsymbol{\eta}$-强增生映射和 $M: X \to 2^Y$ 是广义 H-$\boldsymbol{\eta}$-增生算子。则 $(H + \lambda M)^{-1}$ 是单值映射，其中 $0 < \lambda < r/m$ 是一常数。

证明　对任意给定的 $x^* \in Y$，令 $x, y \in (H + \lambda M)^{-1}(x^*)$。因此推得 $(x^* - H(x))/\lambda \in M(x)$ 和 $(x^* - H(y))/\lambda \in M(y)$。因为 M 是广义 H-$\boldsymbol{\eta}$-增生的和 H 是广义 r-$\boldsymbol{\eta}$-强增生的，我们有

$$-m\|x - y\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda}\langle (x^* - H(x)) - (x^* - H(y)), \boldsymbol{\eta}(x,y)\rangle \leqslant -\frac{r}{\lambda}\|x - y\|^2,$$

上式蕴含 $x = y$。因此，$(H + \lambda M)^{-1}$ 是单值映射。证毕。

基于定理 2.1，我们给出以下广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 的定义。

定义 2.2　设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的自反 Banach 空间。设 $\boldsymbol{\eta}: X \times X \to Y^*$ 是单值映射，$H: X \to Y$ 是广义 r-$\boldsymbol{\eta}$-强增生映射和 $M: X \to 2^Y$ 是广义 H-$\boldsymbol{\eta}$-增生算子。广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}: Y \to X$ 由下式定义：

$$R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) = (H + \lambda M)^{-1}(x^*), \qquad \forall x^* \in Y,$$

其中 $\lambda > 0$ 是一常数。

注 2.2　(i) 如果 $Y = X$，对任意的 $x, y \in X$，$\boldsymbol{\eta}(x,y) = J_q(\boldsymbol{\eta}_1(x,y))$，其中 J_q 是广义正规对偶映射和 $\boldsymbol{\eta}_1$：

$X \times X \to X$ 是单值映射,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Lan 等[12-13] 引入的预解算子 $J_{\eta_1,M}^{\rho,A}$;

(ii) 如果 $Y = X, m = 0$,对任意的 $x, y \in X, \eta(x,y) = J_q(\eta_1(x,y))$,其中 J_q 是广义正规对偶映射和 $\eta_1: X \times X \to X$ 是单值映射,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Fang, Cho 和 Kim 引入的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta_1}$;

(iii) 如果 $Y = X, m = 0$,对任意的 $x, y \in X, \eta(x,y) = J_q(x-y)$,其中 J_q 是广义正规对偶映射,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Fang 和 Huang[10-11]引入的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H}$;

(iv) 如果 $Y = X, H = I$ 和 $m = 0$, 则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Huang 和 Fang[34,22]引入的预解算子 J_{λ}^{A};

(v) 如果 $Y = X^*$, 则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Lou 等[19], Ding 和 Wang[20]引入的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$;

(vi) 如果 $Y = X^*$, 对任意的 $x, y \in X, \eta(x,y) = x - y$,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Feng 和 Ding[18]引入的预解算子 $R_{M}^{A,\lambda}$;

(vii) 如果 $Y = X^*, m = 0$, 对任意的 $x, y \in X, \eta(x,y) = x - y$, 则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Xia 和 Huang[16], Ding 和 Feng[17]引入的预解算子 R_{M}^{H};

(viii) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $m = 0$,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Fang 等[4],引入的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$;

(ix) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,对任意的 $x, y \in X, \eta(x,y) = x - y$,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Verma[5-6]引入的预解算子 $J_{A,M}^{\rho}$;

(x) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $m = 0$,对任意的 $x, y \in X, \eta(x,y) = x - y$,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Fang 和 Huang[3]引入的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H}$;

(xi) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $H = I$ 和 $m = 0$,则广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 退化成由 Huang 和 Fang[2]引入的极大 η- 单调映射的预解算子.

定理 2.2 设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的自反 Banach 空间. 设 $\eta: X \times X \to Y^*$ 是 τ-Lipschitz 连续映射, $H: X \to Y$ 是广义 r-η- 强增生映射和 $M: X \to 2^Y$ 是广义 H-η- 增生算子. 则对 $0 < \lambda < r/m$, 广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}: Y \to X$ 是 Lipschitz 连续的,其 Lipschitz 常数为 $\tau/(r - m\lambda)$, 即有

$$\| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) - R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) \| \leqslant \frac{\tau}{r - m\lambda} \| x^* - y^* \|, \qquad \forall x^*, y^* \in Y.$$

证明 令 $x^*, y^* \in Y$. 因此推得

$$R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) = (H + \lambda M)^{-1}(x^*) \text{ 和 } R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) = (H + \lambda M)^{-1}(y^*),$$

所以 $$(x^* - H(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*)))/\lambda \in M(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*))$$

和 $$(y^* - H(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)))/\lambda \in M(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)).$$

因为 M 是广义 m-η- 松弛增生的,我们有

$$\langle x^* - H(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*)) - (y^* - H(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*))), \eta(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*), R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)) \rangle / \lambda \geqslant \\ - m \| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) - R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) \|^2.$$

因为 H 是广义 r-η- 强增生映射,我们有

$$\begin{aligned}
&\tau \| x^* - y^* \| \, \| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) - R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) \| \geqslant \\
&\quad \| x^* - y^* \| \, \| \eta(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*), R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)) \| \geqslant \\
&\quad \langle x^* - y^*, \eta(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*), R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)) \rangle \geqslant \\
&\quad - \lambda m \| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) - R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) \|^2 + \langle H(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*)) - \\
&\quad H(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)), \eta(R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*), R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*)) \rangle \geqslant \\
&\quad (r - \lambda m) \| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) - R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) \|^2.
\end{aligned}$$

即是 $$\| R_{M,\lambda}^{H,\eta}(x^*) - R_{M,\lambda}^{H,\eta}(y^*) \| \leqslant \frac{\tau}{r - m\lambda} \| x^* - y^* \|.$$

证毕.

注 2.3 (i) 如果 $Y = X$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = J_q(\eta_1(x,y))$,其中 J_q 是广义正规对偶映射和 $\eta_1: X \times X \to X$ 是单值映射,则定理 2.2 退化成文献[13]中的命题 3.2;

(ii) 如果 $Y = X, m = 0$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = J_q(x-y)$,其中 J_q 是广义正规对偶映射和 $\eta_1: X \times X \to X$ 是单值映射,则定理 2.2 退化成文献[10]中的定理 2.3;

(iii) 如果 $Y = X, H = I$ 和 $m = 0$, 则定理 2.2 退化成文献[34]中的定理 2.3;

(iv) 如果 $Y = X^*$, 则定理 2.2 退化成文献[19]中的定理 2.1;

(v) 如果 $Y = X^*$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = x - y$, 则定理 2.2 退化成文献[18]中的定理 3.2;

(vi) 如果 $Y = X^*, m = 0$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = x - y$, 则定理 2.2 退化成文献[16]中的定理 3.2;

(vii) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $m = 0$, 则定理 2.2 退化成文献[4]中的引理 2.2;

(viii) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = x - y$, 则定理 2.2 退化成文献[5]中的引理 3;

(ix) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $m = 0$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = x - y$, 则定理 2.2 退化成文献[3]中的定理 2.2.

3 变分包含中的应用

作为应用,在本节中,我们将给出在 Banach 空间中,新的广义 H-η- 增生算子在适当假设下对求解变分包含问题起着重要的作用.

作为例子,我们考虑以下变分包含问题: 求 $x \in X$ 使得

$$0 \in A(x) + M(x), \tag{1}$$

其中 $A: X \to Y$ 是单值映射和 $M: X \to 2^Y$ 是多值映射. 众所周知,变分包含问题(1)包含了很多变分不等式和相补问题作为特例.

定理 3.1 设 $A: X \to Y, \eta: X \times X \to Y^*$ 是单值映射, $H: X \to Y$ 是广义 r-η- 强增生映射和 $M: X \to 2^Y$ 是广义 H-η- 增生算子. 则 $x \in X$ 是变分包含问题(1)的解当且仅当

$$x = R_{M,\lambda}^{H,\eta}[H(x) - \lambda A(x)],$$

其中 $R_{M,\lambda}^{H,\eta} = (H + \lambda M)^{-1}$ 和 $\lambda > 0$ 是一常数.

证明 结论直接从广义预解算子 $R_{M,\lambda}^{H,\eta}$ 的定义推得.

注 3.1 (i) 如果 $Y = X, m = 0$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = J_q(x-y)$,其中 J_q 是广义正规对偶映射,则定理 3.1 退化成文献[10]中的引理 3.1;

(ii) 如果 $X = Y = \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $m = 0$,对任意的 $x,y \in X,\eta(x,y) = x - y$, 则定理 3.1 退化成文献[3]中的引理 3.1.

基于定理 3.1,我们构造求解变分包含问题(1)的迭代算法如下:

算法 3.1 对给定的 $x_0 \in X$,迭代算法 $\{x_n\} \subset X$, 由下式定义:

$$x_{n+1} = R_{M,\lambda}^{H,\eta}[H(x_n) - \lambda A(x_n)], \qquad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

下面我们给出确保由算法 3.1 生成的迭代序列收敛性的充分条件.

定理 3.2 设 X 和 Y 分别是具有对偶空间 X^* 和 Y^* 的自反 Banach 空间. 设 $\eta: X \times X \to Y^*$ 是 τ-Lipschitz 连续映射, $A: X \to Y$ 是 α-Lipschtiz 连续映射, $H: X \to Y$ 是广义 r-η- 强增生和 δ-Lipschtiz 连续的映射, $M: X \to 2^Y$ 是广义 H-η- 增生算子,此外,以下条件满足:

$$0 < \frac{\tau}{r - m\lambda}\sqrt{\frac{\delta^2 + \lambda\alpha}{1 - \lambda\alpha}} < 1. \tag{3}$$

则由算法 3.1 生成的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于变分包含问题(1)的唯一解.

证明 由算法 3.1 和定理 2.2,我们有

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|R_{M,\lambda}^{H,\eta}[H(x_n)-\lambda A(x_n)] - R_{M,\lambda}^{H,\eta}[H(x_{n-1})-\lambda A(x_{n-1})]\| \leqslant \frac{\tau}{r-m\lambda}\|H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1})\|. \tag{4}$$

因为 A 是 α-Lipschtiz 连续的和 H 是 δ-Lipschtiz 连续的,由引理 1.1,我们有

$$\begin{aligned}
&\|H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1})\|^2 \leqslant \\
&\quad \|H(x_n)-H(x_{n-1})\|^2 - \\
&\quad 2\lambda\langle A(x_n)-A(x_{n-1}), j(H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1}))\rangle \leqslant \\
&\quad \|H(x_n)-H(x_{n-1})\|^2 + 2\lambda\|A(x_n)-A(x_{n-1})\| \times \\
&\quad \|H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1})\| \leqslant \\
&\quad \delta^2\|x_n-x_{n-1}\|^2 + 2\lambda\alpha\|x_n-x_{n-1}\| \times \\
&\quad \|H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1})\| \leqslant \\
&\quad \delta^2\|x_n-x_{n-1}\|^2 + \\
&\quad \lambda\alpha\{\|x_n-x_{n-1}\|^2 + \|H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1})\|^2\},
\end{aligned} \tag{5}$$

上式蕴含

$$\|H(x_n)-H(x_{n-1})-\lambda A(x_n)+\lambda A(x_{n-1})\|^2 \leqslant \frac{\delta^2+\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}\|x_n-x_{n-1}\|^2. \tag{6}$$

由式(4)~(6)推得 $\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \mu\|x_n-x_{n-1}\|$, 其中

$$\mu = \frac{\tau}{r-m\lambda}\sqrt{\frac{\delta^2+\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}}.$$

由式(3),我们知道 $0<\mu<1$,所以 $\{x_n\}$ 是一 X 中的 cauchy 序列. 令当 $n\to\infty$ 时, $x_n\to x$. 由式(2)推得

$$x = R_{M,\lambda}^{H,\eta}[H(x)-\lambda A(x)]. \tag{7}$$

由定理 3.1 可知 x 是式(1) 的一解. 令 x^* 是式(1)的另一解,由定理 3.1 得到

$$x^* = R_{M,\lambda}^{H,\eta}[H(x^*)-\lambda A(x^*)]. \tag{8}$$

由式(7)、(8)和类似以上的证明方法,我们有 $\|x-x^*\| \leqslant \mu\|x-x^*\|$. 因为 $0<\mu<1$,我们知道 $x=x^*$,因此,x 是式(1)的唯一解. 证毕.

注 3.2 (i) 如果 $Y=X, m=0$,对任意的 $x,y\in X, \eta(x,y)=J_q(x-y)$,其中 J_q 是广义正规对偶映射,则定理 3.2 退化成文献[10]中的定理 3.1;

(ii) 如果 $X=Y=\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间,$m=0$,对任意的 $x,y\in X, \eta(x,y)=x-y$, 则定理 3.2 退化成文献[3]中的定理 3.1.

参考文献:

[1] Ding X P, Luo C L. Perturbed proximal point algorithm for generalized quasi-variational like inclusions[J]. *J Comput Appl Math*, 2000, **113**(1/2): 153-165.

[2] Huang N J, Fang Y P. A new class of general variational inclusions involving maximal η-monotone mappings[J]. *Publ Math Debrecen*, 2003, **62**(1/2): 83-98.

[3] Fang Y P, Huang N J. H-monotone operator and resolvent operator technique for variational inclusions[J]. *Appl Math Comput*, 2003, **145**(2/3): 795-803.

[4] Fang Y P, Huang N J, Thompson H B. A new system of variational inclusions with (H,η)-monotone operators in Hilbert spaces[J]. *Comput Math Appl*, 2005, **49**(2/3): 365-374.

[5] Verma R U. A-monotonicity and applications to nonlinear inclusion problems[J]. *J Appl Math Stochastic Anal*, 2004, **17**(2): 193-195.

[6] Verma R U. Generalized nonlinear variational inclusion problems involving A-monotone mappings[J]. *Appl Math Lett*, 2006, **19**(9): 960-963.

[7] Verma R U. Approximation sovability of a class of nonlinear set-valued inclusions involving (A,η)-monotone mappings[J]. *J Math Appl Anal*, 2008, **337**(2): 969-975.

[8] Zhang Q B. Generalized implicit variational-like inclusion problems involving G-η-monotone mappings[J]. *Appl Math Lett*, 2007, **20**(2): 216-221.

[9] Sun J H, Zhang L W, Xiao X T. An algorithm based on resolvent operators for solving variational inequalities in Hilbert spaces[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **69**(10): 3344-3357.

[10] Fang Y P, Huang N J. H-accretive operator and resolvent operator technique for solving variational inclusions in Banach spaces[J]. *Appl Math Lett*, 2004, **17**(6): 647-653.

[11] Fang Y P, Huang N J. Iterative algorithm for a system of variational inclusions involving H-accretive operators in Banach spaces[J]. *Acta Math Hungar*, 2005, **108**(3): 183-195.

[12] Lan H Y, Cho Y J, Verma R U. Nonlinear relaxed cocoercive variational inclusions involving (A,η)-accretive mappings in Banach spaces[J]. *Comput Math Appl*, 2006, **51**(9/10): 1529-1538.

[13] Lan H Y. (A,η)-accretive mappings and set-valued variational inclusions with relaxed cocoercive mappings in Banach spaces[J]. *Appl Math Lett*, 2007, **20**(5): 571-577.

[14] Zou Y Z, Huang N J. $H(\cdot,\cdot)$-accretive operator with an application for solving variational inclusions in Banach spaces[J]. *Appl Math Comput*, 2008, **204**(2): 809-816.

[15] Zou Y Z, Huang N J. A new system of variational inclusions involving $H(\cdot,\cdot)$-accretive operator in Banach spaces[J]. *Appl Math Comput*, 2009, **212**(1): 135-144.

[16] Xia F Q, Huang N J. Variational inclusions with a general H-monotone operator in Banach spaces[J]. *Comput Math Appl*, 2007, **54**(1): 24-30.

[17] Ding X P, Feng H R. Algorithm for solving a new class of generalized nonlinear implicit qusivariational inclusions in Banach spaces[J]. *Appl Math Comput*, 2009, **208**(2): 547-555.

[18] Feng H R, Ding X P. A new system of generalized nonlinear quasi-variational-like inclusions with A-monotone operators in Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2009, **225**(2): 365-373.

[19] Lou J, He X F, He Z. Iterative methods for solving a system of variational inclusions involving H-η-monotone operators in Banach spaces[J]. *Comput Math Appl*, 2008, **55**(7): 1832-1841.

[20] 丁协平,王中宝. Banach 空间内涉及 H-η-单调算子的集值混合拟似变分包含组[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(1): 1-14.

[21] Luo X P, Huang N J. A new class of variational inclusions with B-monotone operators in Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2010, **233**(8): 1888-1896.

[22] Huang N J. Nonlinear implicit quasi-variational inclusions involving generalized m-accretive mappings[J]. *Arch Inequal Appl*, 2004, **2**(4): 413-426.

[23] Ahmad R, Usman F. System of generalized variational inclusions with H-accretive operators in uniformly smooth Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2009, **230**(2): 424-432.

[24] Ding X P, Feng H R. The P-step iterative algorithm for a system of generalized mixed quasi-variatonal inclusions with (A,η)-accretive operators in q-uniformly smooth Banach spaces

[J]. *J Comput Appl Math*, 2008, **220**(1/2): 163-174.

[25] Huang N J. Generalized nonlinear variational inclusions with noncompact valued mappings [J]. *Appl Math Lett*, 1996, **9**(3): 25-29.

[26] Huang N J. Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithms for generalized nonlinear implicit quasi-variational inclusions[J]. *Comput Math Appl*, 1998, **35**(10): 1-7.

[27] Jin M M, Liu Q K. Nonlinear quasi-variational inclusions involving generalized m-accretive mappings[J]. *Nonlinear Funct Anal Appl*, 2004, **9**(3): 485-494.

[28] Lan H Y, Kim J H, Cho Y J. On a new system of nonlinear A-monotone multivalued variational inclusions[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **327**(1): 481-493.

[29] Peng J W, Zhu D L. A system of variational inclusions with P-η-accretive operators[J]. *J Comput Appl Math*, 2008, **216**(1): 198-209.

[30] Verma R U. On the generalized proximal point algorithm with applications to inclusion problems[J]. *J Indust Manag Optim*, 2009, **5**(2): 381-390.

[31] Verma R U. Sensitivity analysis for generalized strongly monotone variational inclusions based on the (A, η)-resolvent operator technique[J]. *Appl Math Lett*, 2006, **19**(12): 1409-1413.

[32] Xia F Q, Huang N J. Algorithm for solving a new class of general mixed variational inequalities in Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2008, **220**(1/2): 632-642.

[33] Huang N J, Fang Y P. Fixed point theorem and a new system of multivalued generalized order complementarity problems[J]. *Positivity*, 2003, **7**(3): 257-265.

[34] Huang N J, Fang Y P. Generalized m-accretive mappings in Banach spaces[J]. *J Sichuan Univ*, 2001, **38**(4): 591-592.

[35] Petryshyn W V. A characterization of strictly convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings[J]. *J Funct Anal*, 1970, **6**(2): 282-291.

Generalized H-η-Accretive Operators in Banach Spaces With an Application to Variational Inclusions

LUO Xue-ping, HUANG Nan-jing

(*Department of Mathematics*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064, *P. R. China*)

Abstract: A new notion of generalized H-η-accretive operator which provided a unifying framework for the generalized m-accretive operator and the H-η-monotone operator in Banach spaces was introduced and studied. A resolvent operator associated with the generalized H-η-accretive operator was defined and its Lipschitz continuity was shown. As an application, the solvability for a class of variational inclusions involving the generalized H-η-accretive operators in Banach spaces was considered. By using the technique of resolvent mapping, an iterative algorithm for solving the variational inclusion in Banach space was constructed. Under some suitable conditions, the existence of solution for the variational inclusion and the convergence of iterative sequence generated by the algorithm were proved.

Key words: generalized H-η-accretive operator; resolvent operator; variational inclusion; iterative algorithm; convergence