

# 松弛时间对热弹性扩散板中 环形峰波的影响\*

R·库玛, T·坎赛

(库卢谢特拉大学 数学系,库卢谢特拉-136 119, 印度)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 在不同热弹性扩散理论的框架中,无应力作用、恒温/绝热、化学势条件下,研究了均匀、横观各向同性无穷板中热弹性扩散环形峰波的传播.得到了热弹性扩散 Lamb 型波的色散方程.同时推演出色散方程的一些特例.

**关键词:** 波传播; 横观各向同性; 峰波; 广义热弹性扩散; 相速度; 衰减系数; 幅值

**中图分类号:** O343.6      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.009

## 引 言

经典热弹性理论是基于 Fourier 方程的热传导. Fourier 热传导理论假定热扰动是以无穷大的速度传播的,从物理学的观点看来,这是不切实际的.两种不同的经典广义热弹性理论都预测,热场和位移场都将只以一个有限速度传播.第一种经典广义热弹性理论是由 Lord 和 Shulman<sup>[1]</sup>提出的,他们将一项通量率并入到 Fourier 热传导定律,形成容许热信号传播速度有限的广义理论.第二种经典广义热弹性理论由 Green 和 Lindsay<sup>[2]</sup>提出的,他们通过在所构成的变量之中引入温度率,发展了一种与温度率相关的热弹性理论,它并不违背 Fourier 热传导定律.考虑到物理试验证明热传播速度是有限的,在解决涉及热通量很大/时间间隔很短的实际问题,如在激光单元或能量通道中,广义热弹性理论比传统理论更为真实.

近年来石油公司对热扩散过程感兴趣,以期从石油沉积物中更有效地提炼石油.颗粒从高浓度区域自动地向低浓度区域的运动定义为扩散,扩散是对浓度梯度的“响应”,颗粒位置的变化是由于浓度的变化所引起的.弹性固体中的热扩散,除了与环境进行热和质量交换之外,归结为温度场、质量扩散场和应变场的耦合.

圆柱形板框,常常被作为结构构件,其振动特征对实际设计是重要的. Sharma 等<sup>[3-4]</sup>就非

\* 收稿日期: 2009-02-02; 修订日期: 2009-12-12

基金项目: 印度科学和工业研究委员会(CSIR)资助项目

作者简介: Rajneesh Kumar, 教授, 博士(联系人. Tel: +91-1744-292644;  
E-mail: rajneesh\_kuk@rediffmail.com);

Tarun Kansal (E-mail: tarun1\_kansal@yahoo.co.in).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

粘性流体中的均匀各向同性板和各向异性板,研究了热弹性环形峰波的传播. Sharma 等<sup>[5]</sup>在广义压电热弹性板中,讨论了直形和环形峰波的 Lamb 波. Kumar 等<sup>[6]</sup>讨论了微拉伸弹性板中的环形峰波.

本文旨在研究厚度有限的,均匀、横观各向同性无穷板中,热弹性扩散环形峰波的传播. 计算了特征方程. 图示了相速度、衰减系数、损耗比以及位移分量、温度改变、浓度的幅值的数值解.

## 1 基本方程

根据 Aouadi<sup>[7]</sup>和 Kumar 等<sup>[8]</sup>的研究,不计体力、热扩散源和质量扩散源时,均匀、各向异性的广义热弹性扩散的基本方程如下:

(i) 本构关系

$$\sigma_{ij} = c_{ijk} e_{km} + a_{ij}(T + \tau_1 \dot{T}) + b_{ij}(C + \tau^1 \dot{C}), \quad (1)$$

$$\rho T_0 S = k + \rho C_E(T + \alpha \dot{T}) - a_{ij} T_0 e_{ij} + a T_0(C + \beta \dot{C}), \quad (2)$$

$$P = b_{ij} e_{ij} + b(C + \tau^1 \dot{C}) - a(T + \tau_1 \dot{T}); \quad (3)$$

(ii) 运动方程

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i; \quad (4)$$

(iii) 热传导方程

$$\rho C_E(\dot{T} + \tau_0 \ddot{T}) - a_{ij} T_0(\dot{e}_{ij} + \varepsilon \tau_0 \ddot{e}_{ij}) + a T_0(\dot{C} + \gamma \ddot{C}) = K_{ij} T_{,ij}; \quad (5)$$

(iv) 质量扩散方程

$$\frac{\partial(\alpha_{ij}^* P_{,j})}{\partial x_i} = \dot{C} + \varepsilon \tau^0 \ddot{C}; \quad (6)$$

其中,各符号所代表的含义与 Kumar 等在文献[8]的含义相类似. 这里,对于耦合热弹性(CT)模型,  $\alpha = \beta = \varepsilon = \gamma = k = \tau_0 = \tau^0 = \tau_1 = \tau^1 = 0$ ; 对于 Lord-Shulman(L-S)模型,  $\alpha = \beta = k = \tau_1 = \tau^1 = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\gamma = \tau_0$ ; 对于 Green-Lindsay(G-L)模型,  $\alpha = \tau_0$ ,  $\beta = \tau^0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\gamma = \tau^0$ .

引入如下转换:

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad y' = -x \sin \phi + y \cos \phi, \quad z' = z, \quad (7)$$

其中  $\phi$  为  $x$ - $y$  平面内的旋转角,并在方程(4) ~ (6)中利用关系式  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  和  $z = z$ , 得到在柱面坐标下,均匀、横观各向同性广义热扩散弹性固体的基本方程如下:

$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \ddot{u}, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = \rho \ddot{v}, \\ \sigma_{rz,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z,\theta} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \ddot{w}, \end{cases} \quad (8)$$

$$K_1 \nabla^2 T + K_3 T_{,zz} - \rho C_E(\dot{T} + \tau_0 \ddot{T}) = T_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_1(e_{rr} + e_{\theta\theta}) + a_3 e_{zz}) + a T_0(\dot{C} + \gamma \ddot{C}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1^* [b_1 \nabla^2(e_{rr} + e_{\theta\theta}) + b_3 \nabla^2 e_{zz}] + \alpha_3^* [b_1(e_{rr,zz} + e_{\theta\theta,zz}) + b_3 e_{zz,zz}] + \\ & \alpha_1^* a \left[ \left( 1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 T \right] + \alpha_3^* a \left[ \left( 1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{,zz} \right] - \\ & \alpha_1^* b \left[ \left( 1 + \tau^1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 C \right] - \alpha_3^* b \left[ \left( 1 + \tau^1 \frac{\partial}{\partial t} \right) C_{,zz} \right] + (\dot{C} + \varepsilon \tau^0 \ddot{C}) = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = c_{11}e_{rr} + c_{12}e_{\theta\theta} + c_{13}e_{zz} - a_1(T + \tau_1\dot{T}) - b_1(C + \tau^1\dot{C}), & \sigma_{r\theta} = c_{66}e_{r\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} = c_{12}e_{rr} + c_{11}e_{\theta\theta} + c_{13}e_{zz} - a_1(T + \tau_1\dot{T}) - b_1(C + \tau^1\dot{C}), & \sigma_{\theta z} = c_{44}e_{\theta z}, \\ \sigma_{zz} = c_{13}e_{rr} + c_{13}e_{\theta\theta} + c_{33}e_{zz} - a_3(T + \tau_1\dot{T}) - b_3(C + \tau^1\dot{C}), & \sigma_{rz} = c_{44}e_{rz}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} e_{rr} = u_{,r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(v_{,\theta} + u), e_{zz} = w_{,z}, e_{r\theta} = \frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,r} - \frac{v}{r}, e_{rz} = u_{,z} + w_{,r}, \\ e_{\theta z} = v_{,z} + \frac{1}{r}w_{,\theta}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} a_{ij} = -a_i\delta_{ij}, b_{ij} = -b_i\delta_{ij}, \alpha_{ij}^* = \alpha_i^*\delta_{ij}, K_{ij} = K_i\delta_{ij}, \\ a_1 = (c_{11} + c_{12})\alpha_1 + c_{13}\alpha_3, a_3 = 2c_{13}\alpha_1 + c_{33}\alpha_3, \\ b_1 = (c_{11} + c_{12})\alpha_{1c} + c_{13}\alpha_{3c}, b_3 = 2c_{13}\alpha_{1c} + c_{33}\alpha_{3c}, \end{cases} \quad (13)$$

这里,  $\alpha_1$  和  $\alpha_3$  为线热膨胀系数,  $\alpha_{1c}$  和  $\alpha_{3c}$  为扩散膨胀系数. 在方程(11) ~ (13)中,我们使用了下标的缩减:11→1,22→2,33→3, 23→4, 13→5, 12→6, 将  $c_{ijkm}$  用  $c_{ln}(i, j, k, m = 1, 2, 3; l, n = 1, 2, \dots, 6)$  表示.

## 2 问题的表示及其求解

在初始恒温  $T_0$  下,考虑一厚度为  $2H$  的均匀、横观各向同性的热弹性扩散无穷平板. 该平板是轴对称的,其对称轴为  $z$  轴. 取平板中面的任一点为坐标系  $(r, \theta, z)$  的原点,  $z$  轴沿厚度方向并与板相垂直(图1). 表面  $z = \pm H$  对应着不同的边界条件. 取  $r-z$  平面为入射平面.

定义如下无量纲量:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{w_1^* r}{v_1}, z' = \frac{w_1^* z}{v_1}, u' = \frac{w_1^* u}{v_1}, \\ w' &= \frac{w_1^* w}{v_1}, \sigma'_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{a_1 T_0}, \sigma'_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{a_1 T_0}. \end{aligned}$$

其余的无量纲量由 Kumar 等<sup>[8]</sup>给出. 这里,  $w_1^*$  为该介质的特征频率,  $v_1$  为该介质中的纵波速度.

将无量纲量代入方程(8) ~ (10),并假设其解为

$$(u, w, T, C) = (J_1(\xi r), WJ_0(\xi r), SJ_0(\xi r), RJ_0(\xi r)) U e^{i\xi(mz - ct)}, \quad (14)$$

其中,  $c = \omega/\xi$  为无量纲相速度,  $\omega$  为频率,  $\xi$  为波数,  $J_0$  和  $J_1$  分别为 0 阶和 1 阶的 Bessel 函数, 略去撇号后,可以得到如下多项式的特征方程:

$$m^8 + A^* m^6 + B^* m^4 + C^* m^2 + D^* = 0, \quad (15)$$

其中,系数  $A^*, B^*, C^*, D^*$  由附录给出. 特征方程(15)是  $m^2$  的 4 次多项式,因此有 4 个根  $m_p^2 (p = 1, 2, 3, 4)$ . 从而,得到  $u, w, T, C$  如下形式的表达式:

$$u = \sum_{p=1}^4 (A_p \cos(\xi m_p z) + B_p \sin(\xi m_p z)) J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

$$(w, T, C) = \sum_{p=1}^4 (n_{1p}, n_{2p}, n_{3p}) (A_p \cos(\xi m_p z) + B_p \sin(\xi m_p z)) J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

其中  $A_p, B_p (p = 1, 2, 3, 4)$  为任意常数,耦合常数  $n_{1p}, n_{2p}, n_{3p} (p = 1, 2, 3, 4)$  由附录给出.

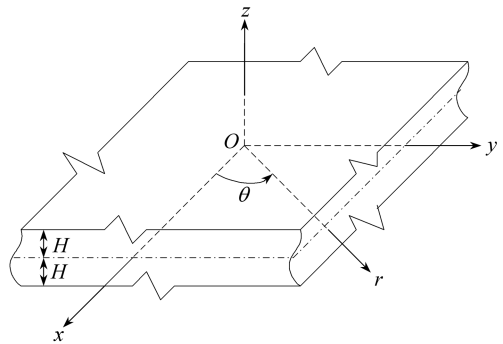


图1 问题的几何图形

### 3 特征方程的推导

将方程(16)和(17)中  $u$ ,  $w$ ,  $T$  和  $C$  的值代入如下边界条件:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = P = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} + hT = 0,$$

其中  $h$  为表面热传导系数,  $h \rightarrow 0$  对应于绝热边界,  $h \rightarrow \infty$  对应于恒温边界, 在表面  $z = \pm H$  上, 得到了 8 个联立的方程组及其非平凡解, 其系数行列式为 0. 经过冗长的代数简化, 得到无应力的绝热/恒温边界条件的特征方程.

对于平板表面无应力的绝热边界 ( $h \rightarrow 0$ ):

$$R_1^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\pm 1} + R_2^* + R_3^* \left[ \frac{T_4}{T_3} \right]^{\pm 1} + R_4^* \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\pm 1} + R_5^* \left[ \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right]^{\pm 1} + R_6^* \left[ \frac{T_4}{T_1} \right]^{\pm 1} = 0, \quad (18)$$

对于平板表面无应力的恒温边界 ( $h \rightarrow \infty$ ):

$$P_1^* \left[ \frac{T_2}{T_3} \right]^{\mp 1} + P_2^* + P_3^* \left[ \frac{T_4}{T_3} \right]^{\mp 1} + P_4^* \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\mp 1} + P_5^* \left[ \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right]^{\mp 1} + P_6^* \left[ \frac{T_4}{T_1} \right]^{\mp 1} = 0, \quad (19)$$

其中

$$T_p = \tan \xi m_p H \quad (p = 1, 2, 3, 4),$$

且

$$R_1^* = m_1 m_2 [ (n_{11} n_{22} - n_{21} n_{12}) (P_3 n_{14} - P_4 n_{13}) ],$$

$$R_2^* = m_1 m_3 [ (n_{11} n_{23} - n_{21} n_{13}) (P_4 n_{12} - P_2 n_{14}) ],$$

$$R_3^* = m_1 m_4 [ (n_{11} n_{24} - n_{21} n_{14}) (P_2 n_{13} - P_3 n_{12}) ],$$

$$R_4^* = m_2 m_3 [ (n_{12} n_{23} - n_{22} n_{13}) (P_1 n_{14} - P_4 n_{11}) ],$$

$$R_5^* = m_2 m_4 [ (n_{22} n_{14} - n_{12} n_{24}) (P_1 n_{13} - P_3 n_{11}) ],$$

$$R_6^* = m_3 m_4 [ (n_{13} n_{24} - n_{23} n_{14}) (P_1 n_{12} - P_2 n_{11}) ],$$

$$P_1^* = m_1 m_2 [ (n_{12} - n_{11}) (P_3 n_{24} - P_4 n_{23}) ],$$

$$P_2^* = m_1 m_3 [ (n_{11} - n_{13}) (P_2 n_{24} - P_4 n_{22}) ],$$

$$P_3^* = m_1 m_4 [ (n_{14} - n_{11}) (P_2 n_{23} - P_3 n_{22}) ],$$

$$P_4^* = m_2 m_3 [ (n_{13} - n_{12}) (P_1 n_{24} - P_4 n_{21}) ],$$

$$P_5^* = m_2 m_4 [ (n_{12} - n_{14}) (P_1 n_{23} - P_3 n_{21}) ],$$

$$P_6^* = m_3 m_4 [ (n_{14} - n_{13}) (P_1 n_{22} - P_2 n_{21}) ],$$

$$P_p = \xi (\delta_2 - \delta_1) - p_1 \tau_1^{11} n_{2p} - p_2 \tau_c^{11} n_{3p}, \quad p = 1, 2, 3, 4,$$

这里, 上标“+1”和“-1”分别表示波传播的反对称型和对称型. 当应变达到最大时, 将一个试件在一个应力循环中所损耗的能量 ( $\Delta W$ ) 与试件里的弹性能 ( $W$ ) 之比, 定义为损耗比. 损耗比是定义材料内耗最直接的方法. 对于小幅值的正弦平面波来说, 正如 Kolsky 在文献[9]中指出的, 损耗比  $\Delta W/W$  等于  $4\pi \times (\xi(F)$  的虚部  $/\xi(E)$  的实部的绝对值), 即

$$\frac{\Delta W}{W} = 4\pi \left| \frac{\text{Im}(\xi)}{\text{Re}(\xi)} \right| = 4\pi \left| \frac{\nu F}{\omega} \right| = 4\pi \left| \frac{F}{E} \right|. \quad (20)$$

Kumar 等在文献[10]中给出了对称型和反对称型, 位移、温度改变和密度的幅值:

$$((u)_{\text{sym}}, (u)_{\text{asym}}) = \sum_{p=1}^4 (A_p \cos(\xi m_p z), B_p \sin(\xi m_p z)) J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (21)$$

$$((w)_{\text{sym}}, (w)_{\text{asym}}) = \sum_{p=1}^4 n_{1p} (B_p \sin(\xi m_p z), A_p \cos(\xi m_p z)) J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \tag{22}$$

$$((T, C)_{\text{sym}}, (T, C)_{\text{asym}}) = \sum_{p=1}^4 (n_{2p}, n_{3p}) (A_p \cos(\xi m_p z), B_p \sin(\xi m_p z)) J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \tag{23}$$

其中,幅值  $A_p, B_p (p = 1, 2, 3, 4)$  .

**特例 1** 若在方程(18)和(19)中取

$$\begin{cases} c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, c_{12} = c_{13} = \lambda, c_{44} = \mu, a_1 = a_3 = \beta_1, \\ b_1 = b_3 = \beta_2, K_1 = K_3 = K, \alpha_1^* = \alpha_3^* = D, \end{cases} \tag{24}$$

则可以得到各向同性的广义热弹性扩散板相对应的频率方程.

**特例 2** 不考虑扩散效应时 ( $a = b = b_1 = b_3 = 0$ ), 可以得到横观各向同性的广义热弹性固体的频率方程, 它们与 Sharma 等<sup>[4]</sup> 所得到的方程(29)和(30)是相似的.

### 4 数值结果和讨论

为了进行数值计算, 材料选用横观各向同性的镁. 单晶镁的物理数据给出如下:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 5.974 \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2), c_{12} = 2.624 \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2), \\ c_{13} &= 2.17 \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2), c_{33} = 6.17 \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2), \\ c_{44} &= 3.278 \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2), T_0 = 0.298 \times 10^3 \text{ K}, \\ C_E &= 0.104 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}), \alpha_1 = 2.33 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \alpha_3 = 2.48 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \\ \alpha_{1c} &= 2.65 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}, \alpha_{3c} = 2.83 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}, a = 2.9 \times 10^4 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K}), \\ b &= 32 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^5 \cdot \text{s}^2), \alpha_1^* = 0.75 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^3, \alpha_3^* = 0.85 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^3, \\ \rho &= 1.74 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3, K_1 = 0.170 \times 10^3 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), K_3 = 0.170 \times 10^3 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \\ \tau_0 &= 0.02 \text{ s}, \tau_1 = 0.01 \text{ s}, \tau^0 = 0.03 \text{ s}, \tau^1 = 0.04 \text{ s}. \end{aligned}$$

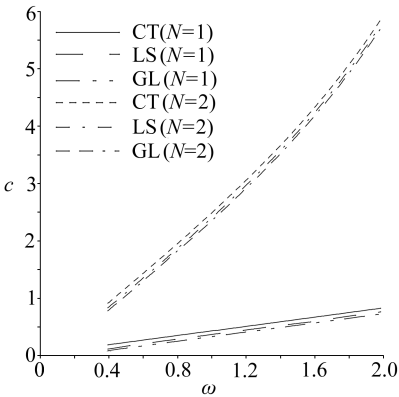


图 2 相速度  $c$  随频率  $\omega$  的变化(对称型)

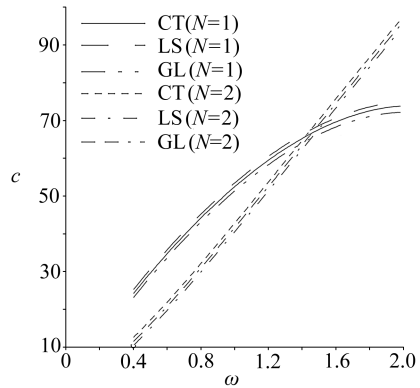


图 3 相速度  $c$  随频率  $\omega$  的变化(反对称型)

#### 4.1 相速度、衰减系数和损耗比

图 2 和图 3 分别给出了对称的和反对称的, 第 1、第 2 型相速度随频率的变化. 由图 2 可以看出, 在这 3 种理论中, 第 1、第 2 型的相速度呈缓慢而稳定的增长. CT 理论下的相速度比 LS 和 GL 理论下的相速度要高. 图 3 显示了反对称型, 开始时相速度的变化趋势相似, 接着第 1 型的相速度趋于常量. 对于对称型, 第 2 型相速度的增长幅度比第 1 型要大. 对于反对称型, 第 1 型相速度的增长幅度先是比第 2 型要大, 但是到最后趋势则相反.

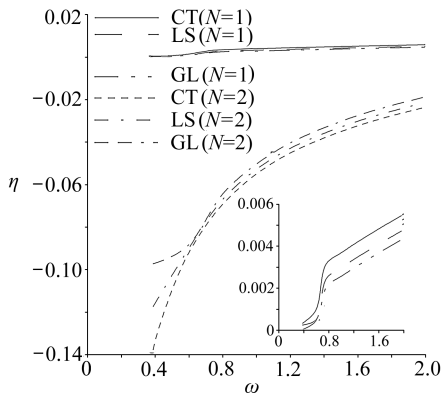


图4 衰减系数  $\eta$  随频率  $\omega$  的变化 (对称型)

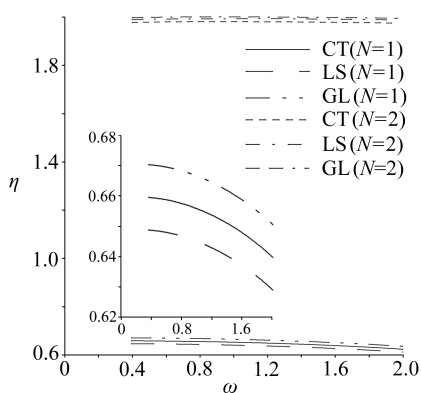


图5 衰减系数  $\eta$  随频率  $\omega$  的变化 (反对称型)

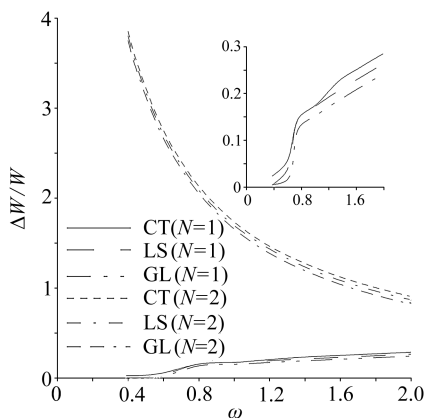


图6 损耗比  $\Delta W/W$  随频率  $\omega$  的变化 (对称型)

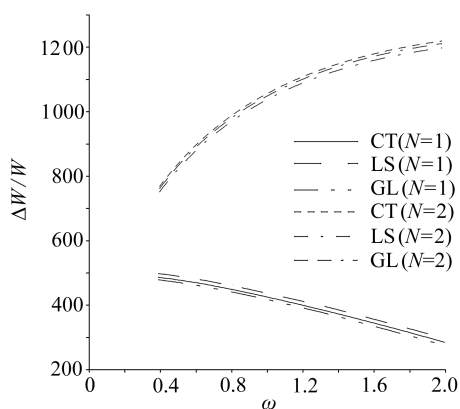


图7 损耗比  $\Delta W/W$  随频率  $\omega$  的变化 (反对称型)

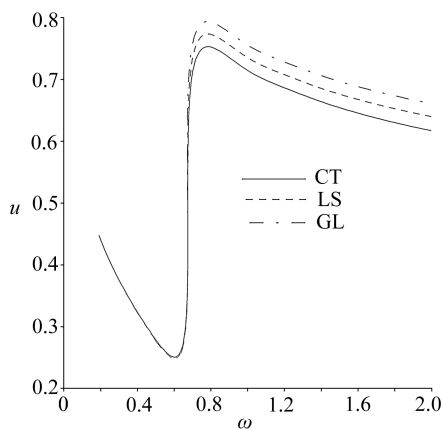


图8 水平位移分量  $u$  的幅值随频率  $\omega$  的变化 (对称型)

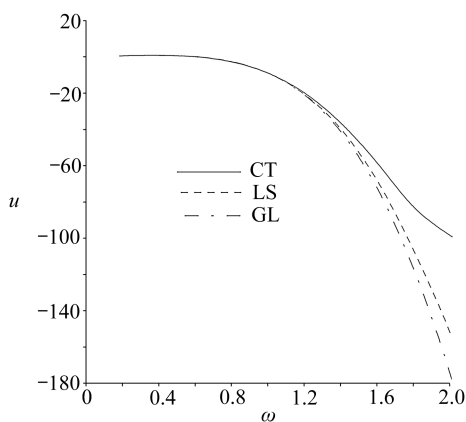


图9 水平位移分量  $u$  的幅值随频率  $\omega$  的变化 (反对称型)

图4和图5分别给出了对称型和反对称型下的衰减系数随频率的变化。由图4可知,衰减系数在这3个理论中都是增大的,而在图5中,这个趋势正相反。CT理论相应对称的第1型衰减系数值,比LS理论和GL理论增加得更快。CT理论相应反对称的第1型衰减系数值,介于

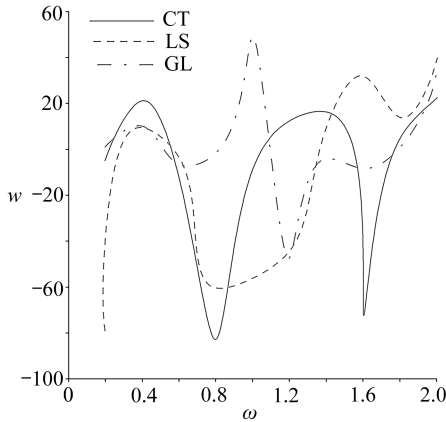


图 10 垂直位移分量  $w$  的幅值随频率  $\omega$  的变化(对称型)

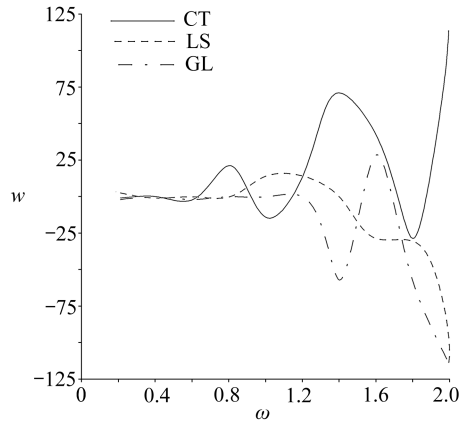


图 11 垂直位移分量  $w$  的幅值随频率  $\omega$  的变化(反对称型)

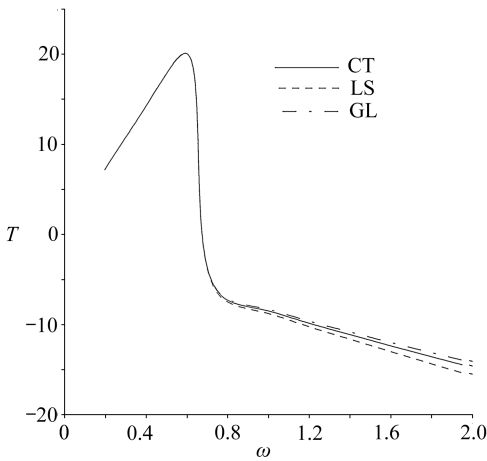


图 12 温度改变  $T$  的幅值随频率  $\omega$  的变化(对称型)

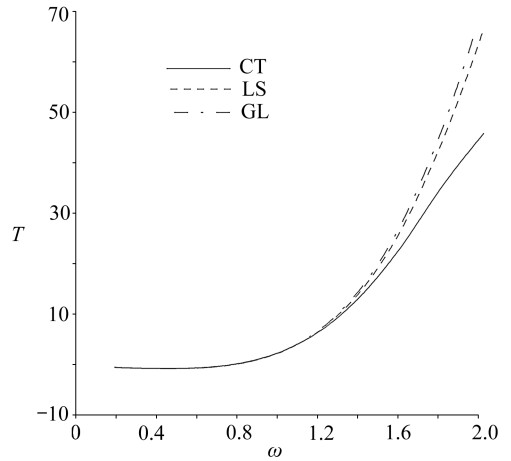


图 13 温度改变  $T$  的幅值随频率  $\omega$  的变化(反对称型)

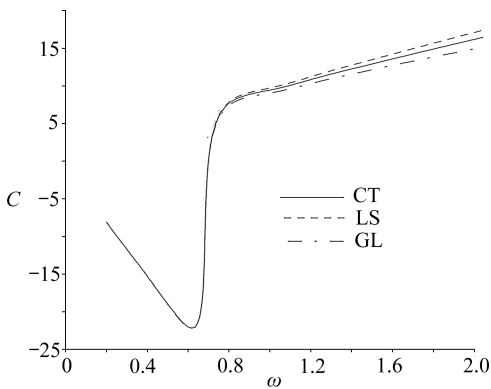


图 14 浓度  $C$  的幅值随频率  $\omega$  的变化(对称型)

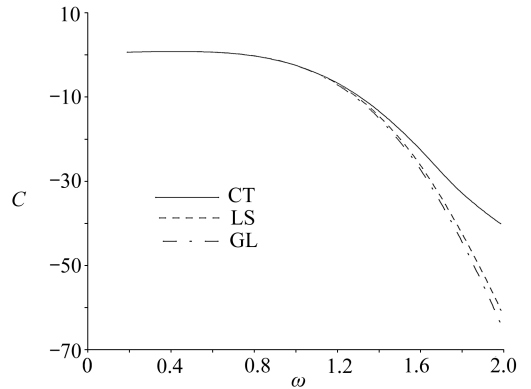


图 15 浓度  $C$  的幅值随频率  $\omega$  的变化(反对称型)

LS 理论和 GL 理论之间, GL 理论对称的和反对称的第 2 型衰减系数值,比 CT 理论和 LS 理论值高. 对称的第 1 型衰减系数值,比第 2 型更大;而反对称型,情况正相反.

图 6 和图 7 分别给出了对称的和反对称的损耗比随频率的变化. 从这两张图中我们发现, 第 1 型和第 2 型损耗比值, 变化趋势正相反. 将损耗比值乘以  $10^2$ , 描述松弛时间的影响.

图 4 ~ 图 6 中的小图给出了第 1 型下 3 种理论之间的差异.

#### 4.2 幅值

图 8 ~ 图 15 给出了对称的和反对称的, 位移 ( $u, w$ )、温度改变 ( $T$ )、浓度 ( $C$ ) 的幅值随频率的变化.

在 3 种不同的理论中, 图 8 给出了水平位移分量 ( $u$ ) 先是振荡, 最后急剧下降, 而在图 9 中,  $u$  值是持续下降的. GL 理论的  $u$  值, 比 CT 和 LS 理论更大 (图 8). 另一方面, 图 9 示出 CT 理论的  $u$  值, 比 LS 和 GL 理论更大. 在图 9 中, 将  $u$  值缩小  $10^2$ , 反映松弛时间的影响. 由图 10 和图 11 可以看出, 位移分量  $w$  值实际上是振荡的. 图 10 的对称型和图 11 的反对称型,  $w$  值被乘以  $10^{15}$ .

图 12 显示了对称型的  $T$  值是减小的. 图 13 中反对称型的  $T$  值正好相反. 图 12 表明了, CT 理论的  $T$  值介于 LS 理论和 GL 理论相应值之间, 而在图 13 中, 这 3 种理论的  $T$  值, 彼此非常接近. 图 14 显示了, 在 3 种理论中,  $C$  值都是增加的, 而从图 15 可以看出,  $C$  值都是减小的. 图 13 和图 15 中的  $T$  值和  $C$  值, 将其分别缩小  $10^5$ .

## 5 结 论

得到特征方程之后, 在一个无穷的均匀、横观各向同性板中, 研究了环形峰波的热弹性扩散波的传播. 运动解耦后的其它量, 其传播图形 (SH) 不受热和扩散震荡的影响. 同时还注意到, 松弛时间对相速度、衰减系数、损耗比以及位移、温度改变、浓度的幅值有着明显的影响.

**致谢** 本文作者 T·坎赛先生感谢印度科学和工业研究委员会 (CSIR) 对本文的资助.

### 附 录

$$\delta_1 = \frac{c_{44}}{c_{11}}, \delta_2 = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}}, \delta_3 = \frac{c_{33}}{c_{11}}, p_1 = \frac{a_3}{a_1}, p_2 = \frac{b_3}{b_1}, p_3 = \frac{K_3}{K_1}, \zeta_1 = \frac{aT_0 v_1^2 a_1}{w_1^* K_1 b_1},$$

$$\zeta_2 = \frac{a_1^2 T_0}{\rho K_1 w_1^*}, q_1^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b_1^2}{\rho v_1^4}, q_2^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b_3 b_1}{\rho v_1^4}, q_3^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b_1 a}{a_1 v_1^2}, q_4^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b_1 a}{a_1 v_1^2},$$

$$q_5^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b}{v_1^2}, q_6^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b}{v_1^2}, q_7^* = \frac{\alpha_3^* w_1^* b_1^2}{\rho v_1^4}, q_8^* = \frac{\alpha_1^* w_1^* b_3 b_1}{\rho v_1^4},$$

$$Z = i\omega, \tau_1^{11} = 1 - i\omega\tau_1, \tau_c^{11} = 1 - i\omega\tau^1, \tau_1^{10} = 1 - i\omega\tau_0,$$

$$\tau_c^{10} = 1 - i\omega\gamma, \tau_c^{10} = 1 - i\omega\varepsilon\tau_0, \tau_f^{10} = 1 - i\omega\varepsilon\tau^0.$$

$$f_1 = 1 - c^2, f_2 = \delta_1 - c^2, f_3 = \zeta_2 \tau_c^{10} c, f_4 = i\xi + c\tau_1^{10}, f_5 = c\zeta_1 \tau_c^{10},$$

$$f_6 = -q_5^* \tau_c^{11} + i\omega^{-1} c^2 \tau_f^{10}, f_7 = -q_6^* \tau_c^{11}, I_1 = f_7 \delta_3 + p_2 \tau_c^{11} q_2^*, I_2 = p_1 f_3 f_7 - f_5 q_2^*,$$

$$I_3 = f_4 f_7 + i\xi p_3 f_6 - f_5 q_4^* \tau_c^{11}, I_4 = p_1 f_3 \tau_c^{11} q_4^* - i\xi p_3 q_8^* - q_2^* f_4, I_5 = p_1 f_3 f_6 - f_5 q_8^*,$$

$$I_6 = p_1 f_3 \tau_c^{11} q_3^* - f_4 q_8^*, I_7 = f_4 f_6 - q_3^* \tau_c^{11} f_5, I_8 = \delta_2 f_7 + q_7^* \tau_c^{11} p_2, I_9 = p_1 f_7 - p_2 \tau_c^{11} q_4^*,$$

$$I_{10} = f_5 p_1 \tau_c^{11} - p_2 \tau_c^{11} f_4, I_{11} = p_1 f_6 - p_2 \tau_c^{11} q_3^*, I_{12} = \delta_3 f_5 + p_1 f_3 p_2 \tau_c^{11},$$

$$I_{13} = \delta_3 f_6 + f_2 f_7 + p_2 \tau_c^{11} q_2^*, I_{14} = q_1^* f_5 - f_3 f_6, I_{15} = q_7^* \delta_3 - p_3 q_2^* \delta_2, I_{16} = q_4^* \delta_3 + p_1 q_2^*,$$

$$I_{17} = i\xi p_3 f_2 + \delta_3 f_4 + p_1^2 f_3 \tau_c^{11}, I_{18} = f_2 q_4^* + \delta_3 q_3^* + p_1 q_8^*, I_{19} = q_1^* f_4 - f_3 q_4^* \tau_c^{11}, d_1 = i\xi p_3 I_1,$$

$$d_2 = i\xi p_3 f_7 f_2 + p_1 \tau_c^{11} I_2 + \delta_3 I_3 - p_2 \tau_c^{11} I_4, d_3 = f_2 I_3 + p_1 \tau_c^{11} I_5 - p_2 \tau_c^{11} I_6 + \delta_3 I_7, d_4 = f_2 I_7,$$

$$d_5 = \xi p_3 I_8, d_6 = -i\delta_2 I_3 - i f_3 \tau_c^{11} I_9 + i q_7^* I_{10} + q_1^* \xi p_3 p_2 \tau_c^{11}, d_7 = -i\delta_2 I_7 - i f_3 \tau_c^{11} I_{11} + i q_1^* I_{10},$$

$$d_8 = \delta_2 I_2 - f_3 I_1 + q_7^* I_{12}, d_9 = \delta_2 I_5 - f_3 I_{13} + q_7^* f_2 f_5 + q_1^* I_{12}, d_{10} = f_2 I_{14}, d_{11} = i\xi p_3 I_{15},$$



$$\begin{aligned}
d_{12} &= \delta_2 I_4 - f_3 \tau_1^{11} I_{16} + q_7^* I_{17} + i \xi q_1^* p_3 \delta_3, \quad d_{13} = \delta_2 I_6 - f_3 \tau_1^{11} I_{18} + q_1^* I_{17} + q_7^* f_2 f_4, \quad d_{14} = f_2 I_{19}, \\
A^* &= \frac{f_1 d_1 + d_2 \delta_1 - i \delta_2 d_5 + \tau_c^{11} d_{11}}{\delta_1 d_1}, \quad B^* = \frac{f_1 d_2 + \delta_1 d_3 - i \delta_2 d_6 - \tau_1^{11} d_8 + \tau_c^{11} d_{12}}{\delta_1 d_1}, \\
C^* &= \frac{f_1 d_3 + \delta_1 d_4 - i \delta_2 d_7 - \tau_1^{11} d_9 + \tau_c^{11} d_{13}}{\delta_1 d_1}, \quad D^* = \frac{f_1 d_4 - \tau_1^{11} d_{10} + \tau_c^{11} d_{14}}{\delta_1 d_1}, \\
n_{1p} &= -\frac{d_5 m_p^5 + d_6 m_p^3 + d_7 m_p}{d_1 m_p^6 + d_2 m_p^4 + d_3 m_p^2 + d_4}, \quad n_{2p} = \frac{d_8 m_p^4 + d_9 m_p^2 + d_{10}}{d_1 m_p^6 + d_2 m_p^4 + d_3 m_p^2 + d_4}, \\
n_{3p} &= -\frac{d_{11} m_p^6 + d_{12} m_p^4 + d_{13} m_p^2 + d_{14}}{d_1 m_p^6 + d_2 m_p^4 + d_3 m_p^2 + d_4}, \quad p = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

## 参考文献:

- [1] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. *J Mech Phys Solid*, 1967, **15**(5):299-309.
- [2] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. *J Elasticity*, 1972, **2**(1):1-7.
- [3] Sharma J N, Singh D. Circular crested thermoelastic waves in homogeneous isotropic plates [J]. *J Thermal Stresses*, 2002, **25**(12):1179-1193.
- [4] Sharma J N, Pathania V, Gupta S K. Circular crested waves in anisotropic thermoelastic plates bordered with inviscid liquid[J]. *Int J Engg Sci*, 2004, **42**(2):99-121.
- [5] Sharma J N, Walia V. Straight and circular crested Lamb waves in generalized piezothermoelastic plates[J]. *J Thermal Stresses*, 2006, **29**(6):529-551.
- [6] Kumar R, Pratap G. Circular crested waves in a micropolar elastic plate[J]. *Sci Engg Comp Mat*, 2007, **14**(4):251-269.
- [7] Aouadi M. Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media[J]. *J Thermal Stresses*, 2008, **31**(3):270-285.
- [8] 库玛 R, 坎赛 T. 横观各向同性广义热弹性扩散 Rayleigh 波在自由表面上的传播[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(11):1314-1324.
- [9] Kolsky H. *Stress Waves in Solids*[M]. New York: Dover Publications, 1963.
- [10] Kumar R, Kansal T. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate[J]. *Int J Sol Stru*, 2008, **45**(22/23):5890-5913.

## Effect of Relaxation Times on Circular Crested Waves in Thermoelastic Diffusive Plate

Rajneesh Kumar, Tarun Kansal

(Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra-136 119, India)

**Abstract:** The propagation of circularly crested thermoelastic diffusive waves in an infinite homogeneous transversely isotropic plate subjected to stress free, isothermal/insulated and chemical potential conditions was investigated in the framework of different theories of thermoelastic diffusion. The dispersion equations of thermoelastic diffusive Lamb type waves were derived. Some special cases of dispersion equation were also deduced.

**Key words:** wave propagation; transversely isotropic; crested waves; generalized thermoelastic diffusion; phase velocity; attenuation coefficient; amplitudes