

不规则界面对扭转表面波在初应力各向异性 多孔弹性层中传播的影响*

S·古普塔, A·查托帕答雅, D·K·马吉

(印度矿业学院 应用数学系, 丹巴德 826004, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了扭转表面波在一个半无限非均匀半空间中的传播, 半空间上覆盖着具有初始应力的各向异性多孔弹性层, 弹性层的刚度和密度线性地变化, 造成了界面的不规则性. 半空间中界面的不规则性, 用一个矩形形式表示, 可以发现, 扭转表面波在这样假定的介质中传播, 得到了没有不规则性时的扭转表面波的速度方程. 还可以发现, 对于均匀半空间覆盖的层状介质, 扭转表面波的速度与 Love 波的速度相一致.

关键词: 非规则性; 扭转表面波; 各向异性; 初应力

中图分类号: O347.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.008

符号说明

H	层状介质的厚度	ω	圆频率
μ	介质的刚度	k	波数
ρ	介质的密度	f	层状介质的孔隙率
a, b	带长度倒数数量纲的常数	c	扭转表面波的相速度
s'_{ij}	应力分量的增量	R	无量纲量
e_{ij}	应变分量	s'	流体中的应力
c_1	弹性介质无初应力时的剪切波速度	u'_r, v'_θ, w'_z	分别为固体中径向、环向、轴向的位移分量
U'_r, V'_θ, W'_z	分别为流体中径向、环向、轴向的位移分量	$\omega'_r, \omega'_\theta, \omega'_z$	分别为旋转矢量 ω' 在径向、环向、轴向的分量
A, B, D_1	任意常数		

引 言

地球表层是由特性不同的材料所组成的, 它们覆盖在不同种类的岩石、地下水、石油和天然气的半空间上. 因此, 地震波传播的研究引起了地震学家的极大兴趣. 这样的研究给他们带

* 收稿日期: 2009-06-11; 修订日期: 2009-12-04

作者简介: S. Gupta(联系人. E-mail: shishir_ism@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

来的不仅有关于地质构造的知识,而且还有关于地球岩石结构的知识。关于地震波的知识,有助于对石油、地下水、地下气等沉积物的开发研究。近年来,有不少利用地震方法的研究成果,表现为碳氢化合物储存的查找、储存库生产的监测以及石油回收工艺的提高。

层状介质中波的传播,是理论地震学家们重要的研究课题。众所周知,表面波通过均匀的和非均匀的弹性半空间表面,有波理论的显著特色。在相关的文献(Achenbach 的文献[1], Ewing 等的文献[2], Bath 的文献[3])中,已经详细地记录了关于表面波传播的研究。假定地球内部的和表层的地质结构,由充满液体的多孔层状结构组成,其密度和弹性模量不连续变化。Biot^[4](1956年)建立了弹性波在充满粘性液体的多孔弹性固体中的传播理论。基于这一理论,Dey 等^[5,6]讨论了波在多孔介质中的传播问题。虽然已有大量关于表面波,如 Rayleigh 波, Love 波和 Stonely 波传播的文献,但是关于扭转表面波传播的研究还很少。Rayleigh^[7]开始了关于表面波在均匀半空间中传播的研究,并指出,在各向同性均匀的弹性半空间中,不允许扭转表面波的传播。随后 Meissner 在文献[8]中指出,一个剪切模量呈二次方变化的、密度随深度线性变化的非均匀弹性半空间中,存在着扭转表面波。最近 Vardoulakis^[9]研究表明,剪切模量随深度线性变化,而密度在恒定的 Gibson 半空间中,也可以传播扭转表面波。Verttos^[10-11]的两篇研究文章,洞察了由线荷载产生的扭转表面波在非均匀材料中的传播。Dey 等^[5]进行了扭转表面波在多孔弹性半空间介质中传播的研究,Georgiadis 等^[12]论证了扭转表面波能够存在于梯度弹性半空间中。Selim^[13]研究了扭转表面波,在自由表面不规则的不同种类半空间中的传播。

本文在一个非均匀的弹性半空间上,覆盖着具有初应力的各向异性多孔弹性介质层,界面的不规则性用一个矩形表示时,讨论了扭转表面波存在的可能性。通过假定剪切模量以及密度来表示半空间的不均匀性。

研究表明,非均匀半空间上,覆盖充满液体的多孔层状介质时,扭转表面波是存在的。随着多孔性参数的减小,半空间介质逐渐演变为少孔隙的弹性固体,扭转表面波速度也逐渐减小,直到介质变弹性固体,扭转表面波速度消失。

半空间介质中的初应力,对波的传播速度也有影响。初始压应力导致传播速度的减少。上部介质的各向异性也导致传播速度的减少。可以预期,在极端情况下,若多孔介质层变为流体层,扭转表面波将不复存在。有趣的是,均匀半空间覆盖着多孔的弹性介质时,扭转波模型变成了 Love 波模型。层状介质中初始压应力的存在,导致扭转波速度的减少。各向异性和非均匀性这两个因素,在加强或是减小波速中,扮演着重要的角色。

1 公式表示

让我们考虑这样一个模型:Weiskopf 型各向异性多孔渗水饱和层 M_1 ,厚度为 H 、初始压应力 $P' = -s'_{rr}$ 沿径向作用,与半无限非均匀弹性半空间 M_2 之间的界面,用一个矩形表示其不规则性,通过密度和刚度的异质性来反映。我们假定界面的不规则性用一个长为 $2m$,深为 h 的矩形来表示。

假定柱坐标系的原点为不规则界面的中点, z -轴向下为正,刚度和密度依照下列规则变化:

(a) 对层状介质, $\mu = \mu_0, \rho = \rho_0$;

(b) 对半空间介质, $\mu = \mu_1(1 + az), \rho = \rho_1(1 + bz)$;

其中 μ 和 ρ 分别表示介质的刚度和密度, a, b 为带长度倒数量纲的常数。

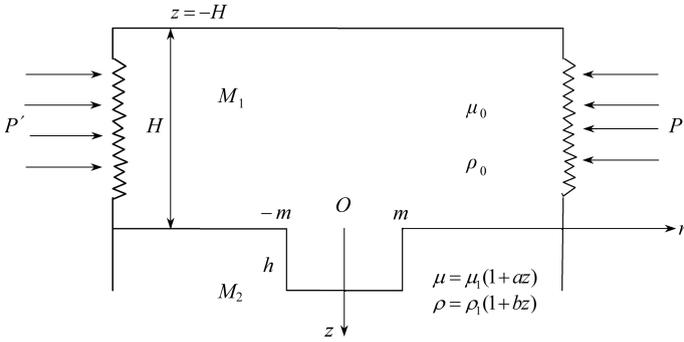


图1 几何示意图

不规则界面方程取

$$z = \varepsilon F(r),$$

其中

$$F(r) = \begin{cases} h, & |r| \leq m, \\ 0, & |r| > m, \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{h}{2m}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

2 问题的求解

2.1 多孔层介质的动力学特性

具有初应力的多孔弹性介质的动力学方程,是由 Weiskopf^[14]和 Biot^[4,15]给出,耦合的初应力多孔弹性介质的 Biot 动力学方程^[16]为

$$\frac{\partial s'_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial s'_{rz}}{\partial z} + \frac{s'_{rr} - s'_{\theta\theta}}{r} - P' \frac{\partial \omega'_\theta}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{rr} u'_r + \rho_{r\theta} U'_r), \quad (1)$$

$$\frac{\partial s'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial s'_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} s'_{r\theta} - P' \frac{\partial \omega'_z}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{rr} v'_\theta + \rho_{r\theta} V'_\theta), \quad (2)$$

$$\frac{\partial s'_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial s'_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} s'_{rz} - P' \frac{\partial \omega'_\theta}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{rr} w'_z + \rho_{r\theta} W'_z), \quad (3)$$

且

$$\frac{\partial s'_r}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{r\theta} u'_r + \rho_{\theta\theta} U'_r), \quad (4)$$

$$\frac{\partial s'_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{r\theta} v'_\theta + \rho_{\theta\theta} V'_\theta), \quad (5)$$

$$\frac{\partial s'_z}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{r\theta} w'_z + \rho_{\theta\theta} W'_z), \quad (6)$$

其中 s'_{ij} 为应力分量的增量, (u'_r, v'_θ, w'_z) 为固体中的位移矢量分量, (U'_r, V'_θ, W'_z) 为液体中的位移矢量分量, s' 为液体中的应力, 还有

$$\omega'_r = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial w'_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial v'_\theta}{\partial z} \right], \quad \omega'_\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u'_r}{\partial z} - \frac{\partial w'_z}{\partial r} \right], \quad \omega'_z = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial (rv'_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (7)$$

为扭转矢量 ω' 的分量。

在法向初始应力 P' 作用下,各向异性饱和水多孔层介质的应力-应变关系为

$$\begin{cases} s'_{rr} = (A + P')e_{rr} + (A - 2N + P')e_{\theta\theta} + (F + P')e_{zz} + Q_\varepsilon, \\ s'_{\theta\theta} = (A - 2N)e_{rr} + Ae_{\theta\theta} + Fe_{zz} + Q_\varepsilon, \\ s'_{zz} = Fe_{rr} + Fe_{\theta\theta} + Ce_{zz} + Q_\varepsilon, \\ s'_{r\theta} = 2Ne_{r\theta}, \quad s'_{\theta z} = 2Ge_{\theta z}, \quad s'_{rz} = 2Ge_{rz}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 A, F, C, N 和 G 为介质的弹性常数, 特别地, N 和 G 分别就是各向异性层的径向和 z 向的剪切模量.

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial u'_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w'_z}{\partial z}, \\ e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_\theta}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r} \right], \quad e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v'_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'_z}{\partial \theta} \right], \\ e_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w'_z}{\partial r} + \frac{\partial u'_r}{\partial z} \right]. \end{cases} \quad (9)$$

进一步地, Q_ε 权衡固体和液体体积变化之间的耦合程度, 是一个正值, s' 为液体中引起的应力矢量. 应力矢量 s' 与液体压力相关, 关系式为

$$-s' = fP, \quad (10)$$

其中 f 为层状介质的孔隙率.

质量系数 $\rho_{rr}, \rho_{r\theta}$ 和 $\rho_{\theta\theta}$ 与层状介质、固体和水的密度 ρ, ρ_s, ρ_w 相关, 分别为

$$\rho_{rr} + \rho_{r\theta} = (1 - f)\rho_s, \quad \rho_{r\theta} + \rho_{\theta\theta} = f\rho_w, \quad (11)$$

因此, 材料的总密度为

$$\rho' = \rho_s + f(\rho_w - \rho_s). \quad (12)$$

上述关系表明, 低密度 (ρ_w) 液体充满固体基 (密度 ρ_s) 时, 总密度 (ρ') 将小于固体密度 (ρ_s), 如果是高密度液体, 如水银、熔化的金属等, 充满固体基时, 则总密度将大于固体密度. 该关系式还表明, 当孔隙率 f 从 1 减小到 0, 即孔隙的容积逐渐减少, 总密度逼近于固体密度. Biot 的研究表明, 质量系数满足下列不等式:

$$\rho_{rr} > 0, \quad \rho_{\theta\theta} > 0, \quad \rho_{r\theta} < 0, \quad \rho_{rr}\rho_{\theta\theta} - \rho_{r\theta}^2 > 0. \quad (13)$$

当扭转的表面波沿着径向传播时, 微粒位移沿 θ 方向, 为

$$\begin{cases} u'_r = 0, \quad w'_z = 0, \quad v'_\theta = v'(r, z, t), \\ U'_r = 0, \quad W'_z = 0, \quad V'_\theta = V'(r, z, t). \end{cases} \quad (14)$$

由上述位移, 得到应变分量 $e_{\theta z}, e_{r\theta}$, 其它应变分量为 0. 因此, 应力-应变关系为

$$s'_{\theta z} = 2Ge_{\theta z}, \quad s'_{r\theta} = 2Ne_{r\theta}. \quad (15)$$

对于运动方程(1) ~ (6), 利用式(15), 无法自动满足的方程仅为

$$\frac{\partial s'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial s'_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r}s'_{r\theta} - P' \frac{\partial \omega'_z}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{rr}v'_\theta + \rho_{r\theta}V'_\theta) \quad (16)$$

和

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{r\theta}v'_\theta + \rho_{\theta\theta}V'_\theta) = 0. \quad (17)$$

利用应力-应变关系(8), 式(16)可以写为

$$\left(N - \frac{P'}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial r^2} - \frac{v'_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial r}\right) + G \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{rr}v'_\theta + \rho_{r\theta}V'_\theta), \quad (18)$$

式(17)可以写为

$$\rho_{r\theta}v'_\theta + \rho_{\theta\theta}V'_\theta = d'' \text{ (比方说),}$$

所以

$$V'_\theta = \frac{d'' - \rho_{r\theta}v'_\theta}{\rho_{\theta\theta}}.$$

立刻得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{rr}v'_\theta + \rho_{r\theta}V'_\theta) = d' \frac{\partial^2(v'_\theta)}{\partial t^2}, \quad (19)$$

其中

$$d' = \rho_{rr} - \frac{\rho_{r\theta}^2}{\rho_{\theta\theta}}.$$

在式(18)中,利用式(19),得到

$$\left(N - \frac{P'}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial r^2} - \frac{v'_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_\theta}{\partial r}\right) + G \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial z^2} = d' \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial t^2}. \quad (20)$$

方程(20)清楚表明,沿 r 向的剪切波速度为 $[(N - P'/2)/d']^{1/2}$, 沿 z 向的剪切波速度为 $(G/d')^{1/2}$.

现在,多孔介质中沿径向的剪切波速度 β' 可以表示为 $\beta' = [c_\beta^2(1 - \zeta)/d]^{1/2}$, 其中, $c_\beta = \sqrt{N/\rho'}$ 为相应于无初应力作用时,无孔隙各向异性弹性介质沿径向的剪切波速度. $\zeta = P'/(2N)$ 为由初始应力 P' 产生的无量纲参数,密度比 d 为

$$d = \frac{d'}{\rho'} = \frac{1}{\rho'} \left(\rho_{rr} - \frac{\rho_{r\theta}^2}{\rho_{\theta\theta}} \right) = \gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{22}},$$

其中

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{rr}}{\rho'}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{r\theta}}{\rho'}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{\theta\theta}}{\rho'}$$

为 Biot 得到的多孔层状材料的无量纲参数. 引入无量纲的半径和深度坐标, $R = r/L, \xi = \xi_0 + z/L$, 其中 ξ_0 为常数, $1/L$ 为波数, 且 $k = 1/L$, 方程(20)可写为

$$\frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v'_\theta}{\partial R} - \frac{v'_\theta}{R^2} + \frac{G}{N - (P'/2)} \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial \xi^2} = \frac{d'L^2}{N - (P'/2)} \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial t^2}. \quad (21)$$

假定方程(21)有一个形式为 $v'_\theta = v'_2(\xi)J_1(R)e^{i\omega t}$ 的解, 其中 $J_1(R)$ 为第一类 Bessel 函数, $v'_2(\xi)$ 为下列方程的解:

$$\frac{d^2 v'_2}{d\xi^2} + q^2 v'_2 = 0, \quad (22)$$

其中 $q^2 = (\omega^2 L^2 d' / (N - P'/2) - 1) / (G / (N - P'/2))$.

方程(22)的解可取

$$v'_2(\xi) = Ae^{iq\xi} + Be^{-iq\xi}.$$

因此,当扭转表面波沿径向传播时,可以得到方程(21)的解为

$$v'_\theta = J_1(R) (Ae^{iq\xi} + Be^{-iq\xi}) e^{i\omega t}, \quad (23)$$

其中

$$q^2 = dv \left(\frac{c^2}{c_\beta^2} - \frac{1 - \xi}{d} \right), \quad v = \frac{N}{G}, \quad c = \omega L$$

为扭转表面波的相速度.

2.2 非均匀弹性半空间介质的动力学方程

考虑下部介质为非均匀弹性半空间,其运动方程可以写为

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (24)$$

其中 $\sigma_{r\theta}$ 和 $\sigma_{z\theta}$ 为半空间中的应力分量, $v(r, \theta, z)$ 为半空间中的位移, ρ 为半空间体材料的密度.

介质的非均匀性由下式表示:

$$\mu = \mu_1(1 + az), \quad \rho = \rho_1(1 + bz), \quad (25)$$

其中, μ_1 和 ρ_1 分别为 μ 和 ρ 在 $z = 0$ 时的值, a, b 是带有长度倒数量纲的常数.

利用应力-应变关系

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right], \quad \sigma_{z\theta} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (26)$$

和式(25), 运动方程(24)可以写为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{a}{1 + az} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\rho_1(1 + bz)}{\mu_1(1 + az)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (27)$$

引入无量纲坐标

$$R = \frac{r}{L}, \quad \xi = \xi_0 + \frac{z}{L},$$

方程(27)成为下列形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{La}{1 + a(\xi - \xi_0)L} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \\ \frac{\rho_1 L^2}{\mu_1} \frac{1 + b(\xi - \xi_0)L}{1 + a(\xi - \xi_0)L} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

假定方程(28)有一个下列形式的解:

$$v = v_2(\xi) J_1(R) e^{i\omega t},$$

其中 v_2 为下列方程的解:

$$\frac{d^2 v_2}{d\xi^2} + \frac{aL}{1 + a(\xi - \xi_0)L} \frac{dv_2}{d\xi} + \left[\frac{c^2}{c_1^2} \frac{1 + b(\xi - \xi_0)L}{1 + a(\xi - \xi_0)L} - 1 \right] v_2 = 0. \quad (29)$$

以上式子中, $c = \omega L$ 为扭转表面波的相速度, $c_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ 为弹性介质无初始应力时的剪切波速度, $J_1(R)$ 为第一类 Bessel 函数.

在方程(29)中, 代人

$$v_2(\xi) = \frac{L^{-1/2} \phi(\xi)}{[1/L + a(\xi - \xi_0)]^{1/2}},$$

消去 $dv_2/d\xi$ 项, 得到

$$\phi''(\xi) + \left[\frac{a^2}{4 \{1/L + a(\xi - \xi_0)\}^2} + \frac{c^2}{c_1^2} \frac{1/L + b(\xi - \xi_0)}{1/L + a(\xi - \xi_0)} - 1 \right] \phi(\xi) = 0. \quad (30)$$

在式(30)中,利用 $\phi(\xi) = \psi(\eta)$, 其中

$$\eta = \frac{2p}{a} \left[\frac{1}{L} + a(\xi - \xi_0) \right],$$

可以得到

$$\psi''(\eta) + \left[\frac{1}{4\eta^2} + \frac{s}{\eta} - \frac{1}{4} \right] \psi(\eta) = 0, \quad (31)$$

其中

$$s = \frac{c^2(a-b)L}{2c_1^2 p a^2 L^2}, \quad p^2 = 1 - \frac{b}{a} \frac{c^2}{c_1^2},$$

方程(31)为 Whittaker 方程。

有趣的是,方程(31)有界,且当 $z \rightarrow \infty$ 时趋于 0,因此需要寻求,使 $z \rightarrow \infty$ 时, $v(z) \rightarrow 0$ 的方程解. 这与 $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \psi(\eta) \rightarrow 0$ 的条件等效. 因此,方程(31)满足上述条件的解,可以写为

$$v = \frac{D_1 W_{s,0}(\eta)}{L^{1/2} (a\eta/2p)^{1/2}} J_1(R) e^{i\omega t}. \quad (32)$$

3 边界条件和色散方程

边界条件如下:

- (a) $z = -H$ 时, $\mu_0(\partial v'_\theta / \partial z) = 0$;
- (b) $z = \varepsilon F(r)$ 时, $v'_\theta = v$;
- (c) $z = \varepsilon F(r)$ 时, $(\sigma_{r\theta})_0 = (\sigma_{r\theta})_1$;

其中

$$(\sigma_{r\theta})_0 = l\mu_0 \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} + n\mu_0 \frac{\partial v'_\theta}{\partial z}, \quad (\sigma_{r\theta})_1 = l\mu_1 \frac{\partial v}{\partial \theta} + n\mu_1 \frac{\partial v}{\partial z},$$

$(l, 0, n)$ 为单位法线(垂直于 $z = 0$ 界面)矢量的分量: $z = -H$ 时, $l = 0, n = 1$; $z = \varepsilon F(r)$ 时,

$$l = -\frac{\varepsilon F'}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}},$$

其中 $F' = dF/dr$.

边界条件(c)可以写成: $z = \varepsilon F(r)$ 时,

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\frac{\partial v'_\theta}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r} \right) \left(-\frac{\varepsilon F'}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}} \mu_0 \frac{\partial v'_\theta}{\partial z} = \\ \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \left(-\frac{\varepsilon F'}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}} \mu_1 \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}$$

现在,分别利用边界条件(a)~(c),得到

$$Ae^{iq(\xi_0 - H/L)} - Be^{-iq(\xi_0 - H/L)} = 0, \quad (33)$$

$$Ae^{iq\xi} + Be^{-iq\xi} = \frac{D_1 W_{s,0}(\eta)}{(1 + a\varepsilon F(r))^{1/2}}, \quad (34)$$

$$Ae^{iq\xi} - Be^{-iq\xi} = D_1 K_1, \quad (35)$$

其中

$$K_1 = \mu_1 \frac{L}{\mu_0 i q} \left(\frac{2p}{aL} \right)^s e^{-p(1+a\varepsilon F(r))/aL} (1 + a\varepsilon F(r))^{s-1/2} \times$$

$$\left[-\frac{a^2 L}{32p} \frac{(s-0.5)^2 (2s+5)(2s-3)}{(1+a\varepsilon F(r))^2} - \frac{a^3 L^2}{8p^2} \frac{(s-0.5)^2 (s-1.5)^2 (2.5-s)}{(1+a\varepsilon F(r))^3} + \frac{a(s-0.5)(s+1.5)}{2(1+a\varepsilon F(r))} - \frac{p}{L} \right]. \quad (36)$$

从方程(33)~(35)中消去 A, B 和 D_1 , 得到

$$\begin{vmatrix} e^{iq(\xi_0-H/L)} & -e^{-iq(\xi_0-H/L)} & 0 \\ e^{iq\xi} & e^{-iq\xi} & -\frac{W_{s,0}(\eta)}{(1+a\varepsilon F(r))^{1/2}} \\ e^{iq\xi} & -e^{-iq\xi} & -K_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (37)$$

将 Whittaker 函数 $W_{s,0}(\eta)$ 展开, 保留 η 线性项, 方程(37)变为

$$\tan[kq(\varepsilon F(r) + H)] = \frac{\mu_1 L}{\mu_0 q} \left[\frac{p}{L} + \frac{a^2 L}{32p} \frac{(s-0.5)^2 (2s+5)(2s-3)}{(1+a\varepsilon F(r))^2} + \frac{a^3 L^2}{8p^2} \frac{(s-0.5)^2 (s-1.5)^2 (2.5-s)}{(1+a\varepsilon F(r))^3} - \frac{a(s-0.5)(s+1.5)}{2(1+a\varepsilon F(r))} \right] /$$

$$\left\{ 1 - \frac{aL}{2p} \frac{(s-0.5)^2}{(1+a\varepsilon F(r))} + \frac{a^2 L^2}{8p^2} \frac{(s-0.5)^2 (s-1.5)^2}{(1+a\varepsilon F(r))^2} \right\}. \quad (38)$$

4 特 例

如果为无孔隙介质, 即 $f \rightarrow 0$ 和 $\rho_s \rightarrow \rho'$, 则使得 $\gamma_{11} + \gamma_{12} \rightarrow 1$ 和 $\gamma_{12} + \gamma_{22} \rightarrow 0$, 因此当 $d \rightarrow 1$ 时,

$$\left(\gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{22}} \right) \rightarrow 1.$$

另外, 假设 $f \rightarrow 1$, 则 $\rho_w \rightarrow \rho'$, 介质变为液体. 这种情况下, 当

$$d = \left(\gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{22}} \right) \rightarrow 0$$

时, 介质中剪切波速度不再存在.

因此, 对于无孔隙介质, $d = 1$; 对于液体介质, $d = 0$; 对于充满液体的多孔介质, $0 < d < 1$.

情况 1 如果 $\varepsilon \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, 即半空间中没有不规则边界时, 式(38)变为

$$\tan(kqH) = \frac{\mu_1 p}{\mu_0 q} \left\{ \left[1 - \frac{aL}{2p} (s-0.5)(s+1.5) + \frac{a^2 L^2}{8p^2} (s-0.5)^2 (s+2.5)(s-1.5) - \frac{a^3 L^3}{8p^3} (s-0.5)^2 (s-1.5)^2 (s-2.5) \right] / \left[1 - \frac{aL}{2p} (s-0.5)^2 + \frac{a^2 L^2}{8p^2} (s-0.5)^2 (s-1.5)^2 \right] \right\},$$

与 Dey 和 Sarkar^[6] 得到具有初应力的、不同种类的、各向异性多孔弹性介质中的传播速度方程相一致.

情况 2 如果 $\varepsilon \rightarrow 0, a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$, 即半空间没有不规则边界, 半空间又为均匀时, 从 (38) 式可得到

$$\tan(kqH) = \frac{\mu_1 P}{\mu_0 q},$$

其中

$$p^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}, \quad q^2 = dv \left(\frac{c^2}{c_\beta^2} - \frac{1 - \zeta}{d} \right),$$

它是 Love 波在具有初始应力的多孔弹性介质中的色散方程。

情况 3 如果 $P' \neq 0, a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$, 即当有法向初应力作用, 半空间又为均匀时, 方程 (38) 简化为

$$\tan[kq(\varepsilon F(r) + H)] = \frac{\mu_1 P}{\mu_0 q},$$

其中

$$p^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}, \quad q^2 = dv \left(\frac{c^2}{c_\beta^2} - \frac{1 - \zeta}{d} \right),$$

它便是 Love 波的速度方程。

情况 4 如果 $P' = 0, a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$, 即当没有法向初应力作用, 半空间又为均匀时, 由方程 (38) 可得

$$\tan[kq(\varepsilon F(r) + H)] = \frac{\mu_1 P}{\mu_0 q},$$

其中

$$p^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}, \quad q^2 = dv \left(\frac{c^2}{c_\beta^2} - \frac{1}{d} \right).$$

情况 5 如果 $\varepsilon \rightarrow 0, a \rightarrow 0, b \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0, d \rightarrow 1, N = G$, 即各向同性无孔隙介质: 半空间是均匀的又没有不规则边界, 同时层状介质又没有初应力作用时, 方程 (38) 变为

$$\tan(kqH) = \frac{\mu_1 P}{\mu_0 q},$$

其中

$$p^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}, \quad q^2 = \frac{c^2}{c_\beta^2} - 1,$$

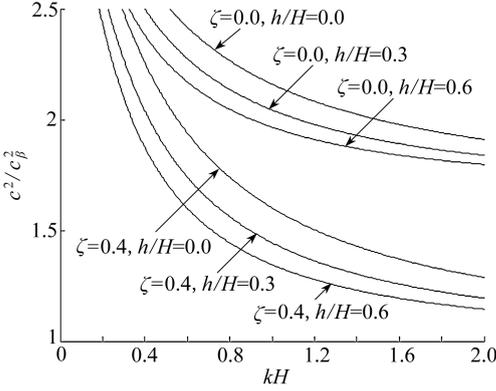
或

$$\tan \left[\left(\frac{c^2}{c_\beta^2} - 1 \right)^{1/2} kH \right] = \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{(1 - (c^2/c_1^2))^{1/2}}{(c^2/c_\beta^2 - 1)^{1/2}},$$

它正是大家熟知的 Love 波的经典结果。

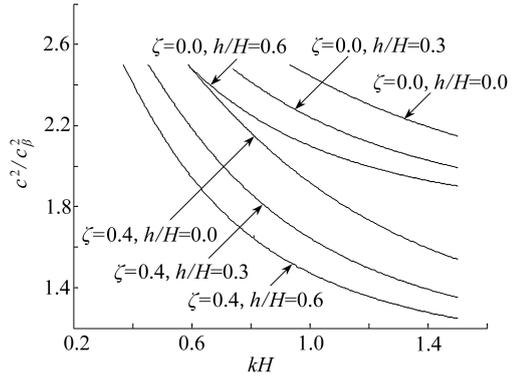
5 数值计算

为了研究孔隙率、不规则性、非均匀性和初应力对扭转表面波传播的综合影响, 在 $c_\beta^2/c_1^2 = 0.5, d, aL, bL, N/G, h/H, \mu_1/\mu_0, \varepsilon$ 取不同值时, 由方程 (38), 进行速度 c^2/c_β^2 的数值计算, 其结果给出在图 1 至图 6 中。



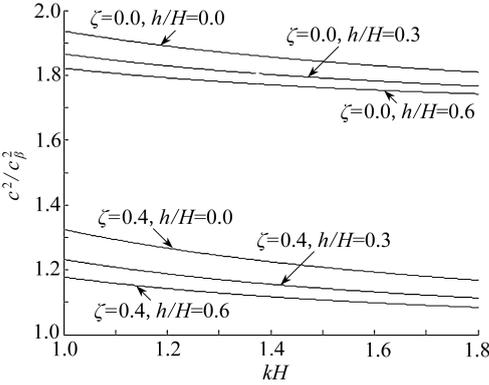
$\mu_1/\mu_0 = 0.4, N/G = 1, aL = 1,$
 $bL = 0.4, d = 0.6, \varepsilon = 0.01$

图2 不同初应力参数 ζ 和不同不规则尺寸 kH 时扭转波的色散曲线



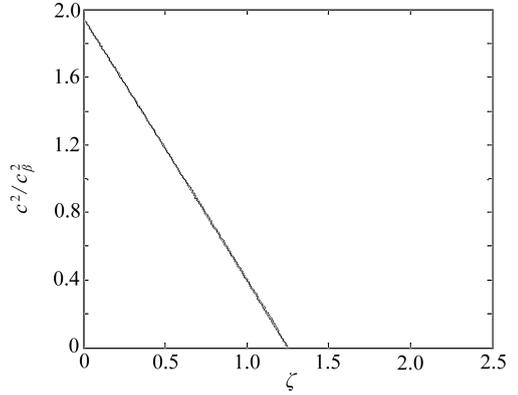
$\mu_1/\mu_0 = 2, N/G = 2, aL = 1,$
 $bL = 0.4, d = 0.6, \varepsilon = 0.01$

图3 当 $\mu_1/\mu_0 = 2$ 时,不同不规则尺寸 kH 下的色散曲线



$\mu_1/\mu_0 = 0.4, N/G = 2, aL = 1,$
 $bL = 0.4, d = 0.6, \varepsilon = 0.01$

图4 当 $\mu_1/\mu_0 = 0.4$ 时,不同不规则尺寸 kH 下的色散曲线(与图3的比较)



$kH = 0.72, d = 0.6, aL = 1,$
 $bL = 0.4, \mu_1/\mu_0 = 0.4,$
 $N/G = 2, h/H = 0.3, \varepsilon = 0.01$

图5 扭转波速度 c^2/c_β^2 随初始压应力参数 ζ 的变化

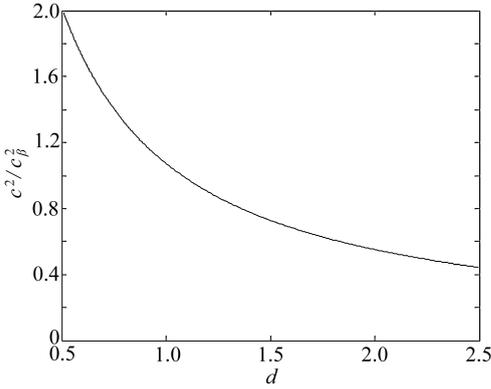
图2 给出了不规则性尺寸数值 kH 逐渐增大时的色散曲线,结果比较分介质中有初应力和无初应力两种.曲线1,2,3表示介质中没有初应力作用,曲线4,5,6表示介质中有 $\zeta = 0.4$ 的初应力作用.图2表明,不规则性和初应力对扭转表面波传播的影响十分显著.有初始压应力作用时,扭转表面波的传播速度减小.液体充满介质孔隙时,扭转表面波的传播速度也减小.

图3和图4的比较表明,上层材料刚度 G 的增大,很大程度上减小了波的传播速度.

比较图2和图4发现,随着上层材料的各向异性因数 (N/G) 的增大,波的传播速度就会减小.

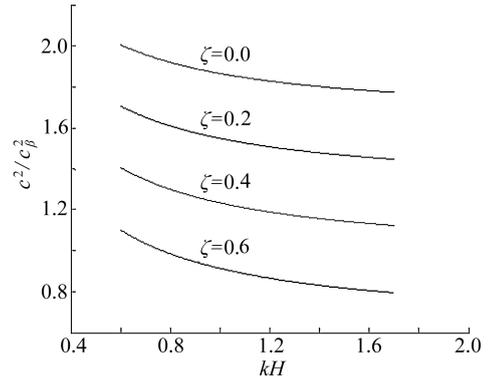
图5和图6分别给出了扭转表面波速度随初应力参数 ζ 和多孔性参数 d 的变化情况,两组曲线都表明,随着 ζ 和 d 的增大,波的传播速度减小.

图7给出了 ζ 取不同数值时的色散曲线.图7表明,随着 kH 的增大,波的传播速度将减小,



$kH = 0.58$, $aL = 1$, $bL = 0.4$, $\mu_1/\mu_0 = 0.4$,
 $N/G = 2$, $h/H = 0.3$, $\zeta = 0.2$, $\varepsilon = 0.01$

图6 扭转波速度 c^2/c_β^2 随多孔性参数 d 的变化



$aL = 1$, $bL = 0.4$, $\mu_1/\mu_0 = 0.4$,
 $N/G = 2$, $h/H = 0.3$, $d = 0.6$, $\varepsilon = 0.01$

图7 初应力 ζ 对扭转波速度 c^2/c_β^2 的影响

因此可以预期,当层状介质的厚度达到某个数值时,扭转表面波将不能在介质中传播。图7还说明了,随着初始应力的增大,波的传播速度就减小。

6 结 论

研究表明,在非均匀、界面为矩形不规则半空间之上,充满液体的多孔层中存在着扭转表面波。研究发现,不规则性和初应力对扭转表面波传播的影响十分显著。初始压应力的存在,将降低扭转表面波的传播速度。扭转表面波的传播速度也受到孔隙率的影响,当孔隙率增大时,波的传播速度减小。观察发现,在极端情况下,当多孔介质改成液体时,扭转表面波将不复存在。在均匀半空间上覆盖多孔弹性介质中,扭转表面波模型变为 Love 波模型。

致谢 作者对丹巴德印度矿业学院,对 Dinesh Kumar Majhi 先生提供的 JRF 和帮助表示诚挚感谢,同时感谢新德里 DST 研究项目“扭转表面波在非均匀层状地质中传播的研究”(SR/S4/ES-246/2006)的资助。

参考文献:

- [1] Achenbach J D. *Wave Propagation in Elastic Solids*[M]. New York: North Holland Publishing Comp, 1973.
- [2] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F. *Elastic Waves in Layered Media*[M]. New York: McGraw Hill, 1957.
- [3] Bath M. *Mathematical Aspects of Seismology*[M]. New York: Elsevier Publishing Comp, 1968.
- [4] Biot M A. Theory of deformation of a porous visco-elastic anisotropic solid [J]. *J Appl Phys*, 1956, **27**: 459-467.
- [5] Dey S, Gupta S, Gupta A K. Torsional surface waves in an elastic half-space with void pores [J]. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1993, **17**(3):197-204.
- [6] Dey S, Sarkar M G. Torsional surface waves in an initially stressed anisotropic porous medium [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, **128** (2): 184-189.
- [7] Rayleigh L. On waves propagating along the plane surface of an elastic solid[J]. *Proc London*

- Math Soc*, 1885, **17**(1):4-11.
- [8] Meissner E. Elastic oberflächenwellen mit dispersion in einem inhomogeneous medium[J]. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zurich*, 1921, **66**:181-195.
- [9] Vardoulakis I. Torsional surface waves in inhomogeneous elastic media[J]. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1984, **8**(3): 287-296.
- [10] Vrettos Ch. In-plane vibrations of soil deposits with variable shear modulus—II: line load [J]. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1990, **14**(9): 649-662.
- [11] Vrettos Ch. In-plane vibrations of soil deposits with variable shear modulus—I: surface waves[J]. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1990, **14**(3): 209-222.
- [12] Georgiadis H G, Vardoulakis I, Lykotrafitis G. Torsional surface waves in a gradient-elastic half space[J]. *Wave Motion*, 2000, **31**(4): 333-348.
- [13] Selim M M. Propagation of torsional surface waves in heterogeneous half-space with irregular free surface[J]. *Appl Math Sci*, 2007, **1**(29/32): 1429-1437.
- [14] Weiskopf W H. Stresses in soils under a foundation[J]. *J Franklin Inst*, 1945: **239**:445-465.
- [15] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid—I: low frequency range; II: higher frequency range[J]. *J Acoust Soc Am*, 1956, **28**(2):168-191.
- [16] Love A E H. *The Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
- [17] Biot M A. *Mechanics of Incremental Deformation*[M]. New York: John Willey and Sons, 1965.

Effect of Irregularity on the Propagation of Torsional Surface Waves in an Initially Stressed Anisotropic Poro-Elastic Layer

S. Gupta, A. Chattopadhyay, D. K. Majhi

(Department of Applied Mathematics, Indian School of Mines University,
Dhanbad-826 004, India)

Abstract: The torsional surface wave propagation in an initially stressed anisotropic poro-elastic layer over a semi-infinite heterogeneous half space with linearly varying rigidity and density due to irregularity at the interface was studied. The irregularity had been taken in the half-space in the form of a rectangle. It is observed that torsional surface waves propagate in this assumed medium. In the absence of irregularity the velocity equation of torsional surface wave has also been obtained. Further, it has been seen that for a layer over a homogeneous half space, the velocity of torsional surface waves coincides with that of Love waves.

Key words: irregularity; torsional surface waves; anisotropic; initial stress