文章编号:1000-0887(2010)04-0379-10

二维 Newton-Boussinesq 方程周期初值问题经典解的整体存在性*

房少梅[1], 金玲玉[1], 郭柏灵[2]

(1. 华南农业大学 数学系,广州 510642;
2. 北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 研究一类二维 Newton-Boussinesq 方程的周期初值问题,将方程转化为积分方程,用不动点原理得到解的局部存在性,用能量估计的方法证明经典解的整体存在性.

关 键 词: 非线性二维 Newton-Boussinesq 方程; 经典解; 先验估计

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.001

1 引言及预备知识

Newton-Boussinesq 方程出现在许多物理问题中,详见文献[1]. 对于二维 Newton-Boussinesq 方程的周期初值问题,其整体弱解的存在性和唯一性,以及在无界区域上弱解的整体吸引子的存在性也有研究结果,详见文献[2]及所引参考文献.

本文考虑如下二维 Newton-Boussinesq 方程:

$$\partial_t \xi + u\partial_x \xi + v\partial_y \xi = \Delta\xi - \frac{Ra}{Pr}\partial_x \theta, \tag{1}$$

$$\partial_t \theta + u\partial_x \theta + v\partial_y \theta = \frac{1}{Pr}\Delta\theta, \tag{2}$$

$$\Delta\psi = \xi,\ u = \psi_y,\ v = -\psi_x, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{u} = (u, v)$ 是速度向量函数,θ 是温度,ψ 是流函数,ξ 是涡度函数,Pr 是 Prandtl 常数,且 Ra 是 Rayleigh 数.

文献[3-4]讨论了方程(1) ~ (3)周期初值问题,用 Galerkin 方法和谱方法研究了二维 Newton-Boussinesq 方程一类弱解的存在唯一性,并证明了近似解的收敛性. 在文献[5]中,Fucci 等证明了二维 Newton-Boussinesq 方程一类弱解的整体吸引子的存在性.

---

* **收稿日期:** 2009-06-16; **修订日期:** 2010-02-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871075;10926101);广东省自然科学基金资助项目(9451064201003736;9151064201000040)

作者简介: 房少梅(1964—),女,新疆伊犁人,教授(E-mail: dz90@scau.edu.cn);
金玲玉(1979—),女,湖北公安人,博士(E-mail: jinlingyu@scau.edu.cn);
郭柏灵,中国科学院院士,研究员,博导(联系人. E-mail: gbl@mail.iapcm.ac.cn).

但迄今为止,尚未见到文献讨论其经典解的适定性.事实上,因为 Newton-Boussinesq 方程是抛物-椭圆方程组,并且有着特殊的结构,其对于一般初值问题的经典解的整体存在性是一个困难的问题.本文作为一个尝试,首先考虑的是周期初值问题.

我们讨论方程(1)~(3)的周期初值问题经典解的整体存在性,其初值为

$$u|_{t=0}=u_0(x,y),\ \theta|_{t=0}=\theta_0(x,y),\ \nabla\psi|_{t=0}=\nabla\psi_0(x,y),\tag{4}$$

且对给定正常数 D, 满足下面周期性条件:

$$\theta_0(x+2D,y)=\theta_0(x,y),\ \theta_0(x,y+2D)=\theta_0(x,y),$$
$$\nabla\psi_0(x+2D,y)=\nabla\psi_0(x,y),\ \nabla\psi_0(x,y+2D)=\nabla\psi_0(x,y).$$

对于方程(1)~(3)作如下等价变形:

$$\partial_t\xi-\Delta\xi=-(u\partial_x\xi+v\partial_y\xi)-\frac{Ra}{Pr}\partial_x\theta,$$

$$\partial_t\theta-\frac{1}{Pr}\Delta\theta=-(u\partial_x\theta+v\partial_y\theta).$$

为简单起见,设 $Pr=1$, $J(a,b)=a_xb_y-a_yb_x$, 则上式改写为

$$\partial_t\xi-\Delta\xi=J(\psi,\xi)-Ra\partial_x\theta,$$
$$\partial_t\theta-\Delta\theta=J(\psi,\theta).\tag{5}$$

通过热传导方程的基本解(即 Gauss 核),可以将方程(5)转化为如下的积分方程:

$$\begin{cases}\xi=G*\xi_0+\int_0^t(G(t-s)*(J(\psi,\xi)-Ra\partial_x\theta))\mathrm{d}s,\\ \theta=G*\theta_0+\int_0^t G(t-s)*(J(\psi,\theta))\mathrm{d}s.\end{cases}\tag{6}$$

定义映射

$$\mathcal{T}:(\xi,\theta)\to(\tilde{\xi},\tilde{\theta}),$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\xi}=G*\xi_0+\int_0^t(G(t-s)*(J(\psi,\xi)-Ra\partial_x\theta))\mathrm{d}s,\\ \tilde{\theta}=G*\theta_0+\int_0^t G(t-s)*(J(\psi,\theta))\mathrm{d}s.\end{cases}\tag{*}$$

构造一个线性赋范空间:

$$W_k(T)=\{(\xi,\theta)\in H_P^k(\Omega):\forall\alpha,|\alpha|\le k,t\le T,\|\partial^\alpha\xi(\cdot,t)\|_{L^2}\le C_*,$$
$$\|\partial^\alpha\theta(\cdot,t)\|_{L^2}\le C_*\},$$

这里, $\Omega=[-D,D]\times[-D,D]$, $D>0$, $H_P^k(\Omega)=\{u\in H^k(\Omega)\mid u$ 为以 $2D$ 为周期的函数$\}$, $k\ge 4$,

$$C_*=2\max\{\|\xi_0\|_{H_P^k},\|\theta_0\|_{H_P^k},\|\nabla\psi_0\|_{L^2}\}.$$

由于 $(G*\xi_0,G*\theta_0)\in W_k$,故 W_k 非空.

本文结构如下:第 2 节中我们对于流函数 ψ 进行估计 .通过这些估计,在第 3 节中得到了解的局部存在性.最后,在第 4 节中我们得到经典解的整体存在性.

下面给出一些预备引理.

引理 1　对于 $u,v\in H_P^2(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega J(u,v)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_\Omega J(u,\Delta u)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_\Omega J(u,\nabla u)\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通过简单的分部积分,引理 1 可得证.

引理 2（Poincare 不等式） 设 $u\in H^1(\Omega)$,且$\int_\Omega u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 那么有

$$\|u\|_{L^2}\leqslant C_0\|\nabla u\|_{L^2},$$

其中 C_0 是满足以上不等式的最佳常数.

2 流函数的估计

我们把式(3)代入到式(1)中,得到

$$\partial_t(\Delta\psi)-\Delta^2\psi=J(\psi,\Delta\psi)-Ra\partial_x\theta. \tag{7}$$

为研究方便起见,定义 $\tilde\psi$满足下式:

$$\partial_t(\Delta\tilde\psi)-\Delta^2\tilde\psi=J(\psi,\Delta\psi)-Ra\partial_x\theta, \tag{8}$$

其中 $\psi=\Delta^{-1}\xi$.

下面,对 $\|\nabla\psi\|_{L^2}$ 进行估计.

引理 3 1）设 ψ 满足式(7),那么

$$\|\nabla\psi\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta\psi\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+C\int_0^t\|\theta\|_{L^2}^2\mathrm{d}s;$$

2）若 $\|\theta\|_{L^2}\leqslant C_*$,那么存在常数 $T_0>0$,当 $t<T_0$ 时, $\|\nabla\psi\|_{L^2}<C_*$.

证明 对式(7)乘以 ψ, 并积分,有

$$\int_\Omega\partial_t(\Delta\psi)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\Delta^2\psi\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_\Omega J(\psi,\Delta\psi)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y-Ra\int_\Omega\partial_x\theta\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\int_\Omega\partial_t(\Delta\psi)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2,$$

$$-\int_\Omega\Delta^2\psi\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_\Omega\Delta\psi\Delta\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\|\Delta\psi\|_{L^2}^2,$$

$$\left|Ra\int_\Omega\partial_x\theta\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant C\|\theta\|_{L^2}\|\nabla\psi\|_{L^2}\leqslant\varepsilon\|\nabla\psi\|_{L^2}^2+C_\varepsilon\|\theta\|_{L^2}^2.$$

由引理 1 可得

$$\int_\Omega J(\psi,\Delta\psi)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由 Poincare 不等式,取 ε 适当小,有

$$\varepsilon\|\nabla\psi\|_{L^2}^2\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta\psi\|_{L^2}^2.$$

综上所述,整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2+\|\Delta\psi\|_{L^2}^2\leqslant C\|\theta\|_{L^2}^2.$$

对上式关于 t 积分,可得 1）成立. 取 $T_0=3/(4C)$ 时,由 1）可知 2）成立. 故引理 3 得证.

记 $\psi_p=\Delta^{-1}\xi_p$, $\psi_q=\Delta^{-1}\xi_q$. 设 $\tilde\psi_p,\tilde\psi_q$ 满足

$$\partial_t(\Delta\tilde{\psi}_p) - \Delta^2\tilde{\psi}_p = J(\psi_p, \Delta\psi_p) - Ra\partial_x\theta_p, \tag{8a}$$

$$\partial_t(\Delta\tilde{\psi}_q) - \Delta^2\tilde{\psi}_q = J(\psi_q, \Delta\psi_q) - Ra\partial_x\theta_q, \tag{8b}$$

并且 $\nabla\tilde{\psi}_p|_{t=0} = \nabla\tilde{\psi}_q|_{t=0} = \nabla\tilde{\psi}_0$。

引理4 对任意 $(\theta_p, \xi_p), (\theta_q, \xi_q) \in W_k(T)$,

$$\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2 \leqslant C\int_0^t (\|\nabla(\psi_p - \psi_q)\|_{L^2}^2 + \|\xi_p - \xi_q\|_{L^2}^2 + \|\theta_p - \theta_q\|_{L^2}^2)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

证明 下面用能量方法估计 $\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|$ 将式(8a)与式(8b)两式相减,有

$$\partial_t(\Delta(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)) - \Delta^2(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q) = J(\psi_p, \Delta\psi_p) - J(\psi_q, \Delta\psi_q) + Ra\partial_x(\theta_p - \theta_q). \tag{10}$$

将式(10)两边同时乘以 $(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)$,并在 Ω 上积分,整理可得

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|^2 - \|\Delta(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|^2 = \int_\Omega (J(\psi_p, \Delta\psi_p) - J(\psi_q, \Delta\psi_q))(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega Ra\partial_x(\theta_p - \theta_q)(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}|I_1| &= \left|\int_\Omega (J(\psi_p, \Delta\psi_p) - J(\psi_q, \Delta\psi_q))(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \\ &\left| -\int_\Omega J(\psi_p, \nabla\psi_p)(\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega J(\psi_q, \nabla\psi_q)(\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \\ &\left|\int_\Omega (J(\psi_p - \psi_q, \nabla\psi_p) + J(\psi_q, \nabla(\psi_p - \psi_q))\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \\ &(\|\nabla(\psi_p - \psi_q)\|_{L^2}\|\Delta\psi_p\|_{L^\infty} + \|\nabla\psi_q\|_{L^\infty}\|\Delta(\psi_p - \psi_q)\|_{L^2})\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|_{L^2} \leqslant \\ &(\|\nabla(\psi_p - \psi_q)\|_{L^2}\|\Delta\xi_p\|_{L^2}^{1/2}\|\xi_p\|_{L^2}^{1/2} + \|\nabla\xi_q\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla\psi_q\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta(\psi_p - \psi_q)\|_{L^2})\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

由于 $(\theta_p, \xi_p), (\theta_q, \xi_q) \in W_k(T)$, 由引理3,有

$$|I_1| \leqslant \varepsilon\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon C_*(\|\nabla(\psi_p - \psi_q)\|_{L^2}^2 + \|\xi_p - \xi_q\|_{L^2}^2),$$

对 I_2, 有

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left|\int_\Omega Ra\partial_x(\theta_p - \theta_q)(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \\ &C\int_\Omega |\theta_p - \theta_q||\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \\ &\varepsilon\|\nabla(\tilde{\psi}_p - \tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon\|\theta_p - \theta_q\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

把 I_1, I_2 代入式(11)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla(\tilde{\psi}_p-\tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2+\|\Delta(\tilde{\psi}_p-\tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$\varepsilon\|\nabla(\tilde{\psi}_p-\tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(\|\nabla(\psi_p-\psi_q)\|_{L^2}^2+$$
$$\|\xi_p-\xi_q\|_{L^2}^2+\|\theta_p-\theta_q\|_{L^2}^2). \tag{12}$$

由 Poincare 不等式可知,取 ε 适当小就有

$$\varepsilon\|\nabla(\tilde{\psi}_p-\tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta(\tilde{\psi}_p-\tilde{\psi}_q)\|_{L^2}^2.$$

对式(12)关于 t 积分,则由 $\|\nabla(\tilde{\psi}_p-\tilde{\psi}_q)(0)\|=0$, 可得式(9)成立. 引理 4 证明完毕.

3 局部解存在性定理

下面,我们用不动点定理来证明问题(1)~(3)经典解的局部存在性和唯一性.

定理 1 假设 $(\xi_0,\theta_0)\in H_P^k(\Omega)$, $\nabla\psi_0\in L^2(\Omega)$,那么存在常数 T,当 $t<T$ 时,问题(1)~(3)存在唯一经典解

$$(\xi,\theta)\in L^\infty([0,t],H_P^k(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,t],H_P^{k-2}(\Omega)),$$

其中 $k\geqslant 2$.

证明 第 1 步. 首先证明映射 $\mho$ 将 $W_k(T)$ 映到 $W_k(T)$,由 Gauss 核的性质,显然存在常数 C_* 使得

$$(G*\xi_0,G*\theta_0)\in L^\infty([0,T],H_P^k(\Omega)),$$

且

$$\|G*\xi_0\|_{H_P^k}\leqslant\frac{C_*}{2},\ \|G*\theta_0\|_{H_P^k}\leqslant\frac{C_*}{2}.$$

对任意的 $(\xi,\theta)\in W_k(T)$, 有

$$\|\tilde{\xi}\|_{L^2}=\left(\int_\Omega\left(G*\xi_0+\int_0^t G*(J(\psi,\xi)-Ra\partial_x\theta)\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\frac{C_*}{2}+C\int_0^t(\|G\|_{L^2}\|J(\psi,\xi)\|_{L^1}+\|G\|_{L^1}\|Ra\partial_x\theta\|_{L^2})\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{C_*}{2}+Ct(\|G\|_{L^2}\|\nabla\psi\|_{L^2}\|\nabla\xi\|_{L^2}+\|G\|_{L^1}\|\nabla\theta\|_{L^2})\leqslant$$
$$\frac{C_*}{2}+Ct(\|\nabla\psi\|_{L^2}\|\nabla\xi\|_{L^2}+\|\nabla\theta\|_{L^2}).$$

由引理 3 可知 $\|\nabla\psi\|_{L^2}\leqslant C_*$, 故

$$\|\tilde{\xi}\|_{L^2}\leqslant\frac{C_*}{2}+2tCC_*(C_*+1)\leqslant C_*\qquad(4C(C_*+1)t\leqslant 1),$$

其中 C 仅与 Ra 以及 Gauss 核有关.

同理可得

$$\|\tilde{\theta}\|_{L^2}=\left(\int_\Omega\left(G*\theta_0+\int_0^t G*(J(\psi,\theta))\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\frac{C_*}{2}+\int_0^t(\|G\|_{L^2}\|J(\psi,\theta)\|_{L^1})\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{C_*}{2}+Ct(\|G\|_{L^2}\|\nabla\psi\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^2})\leqslant$$

$$\frac{C_*}{2}+Ct(\|\nabla\psi\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2)\leqslant$$

$$\frac{C_*}{2}+2tCC_*^2\leqslant C_*\qquad(4CC_*t\leqslant 1),$$

其中 C 仅与 Ra 以及 Gauss 核有关. 若 $|\alpha|<k$, 类似可得

$$\|\partial^\alpha\tilde{\xi}\|_{L^2}\leqslant C_*,\ \|\partial^\alpha\tilde{\theta}\|_{L^2}\leqslant C_*.$$

实际上

$$\|\partial^\alpha\tilde{\xi}\|_{L^2}=\left(\int_\Omega\left(\partial^\alpha G*\xi_0+\int_0^t\partial^\alpha G*(J(\psi,\xi)-Ra\partial_x\theta)\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\frac{C_*}{2}+2tCC_*(C_*+1)\leqslant C_*\qquad(4C(C_*+1)t\leqslant 1)$$

以及

$$\|\partial^\alpha\tilde{\theta}\|_{L^2}=\left(\int_\Omega\left(\partial^\alpha G*\theta_0+\int_0^t\partial^\alpha G*(J(\psi,\theta))\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\frac{C_*}{2}+2tCC_*^2\leqslant C_*\qquad(4CC_*t\leqslant 1),$$

其中 C 仅与 Ra 以及 G 有关.

综上,取 $T_1=1/(4C(C_*+1))$,当 $t<T_1$ 时,则

$$\tilde{\xi}\in W^k(T),\ \tilde{\theta}\in W^k(T).\tag{13}$$

第 2 步. 证明 $\daleth:(\xi,\theta)\to(\tilde{\xi},\tilde{\theta})$ 是压缩映射($\daleth$ 由($*$)式定义). 记 $U_p=(\xi_p,\theta_p,\nabla\psi_p)$, $U_q=(\xi_q,\theta_q,\nabla\psi_q)$,$(\xi_p,\theta_p)$,$(\xi_q,\theta_q)\in W_k(T)$, 定义

$$\rho(U_p,U_q)=\|\xi_p-\xi_q\|_{H_P^k}+\|\theta_p-\theta_q\|_{H_P^k}+\|\nabla\psi_p-\nabla\psi_q\|_{L^2}^2.$$

下面我们将证明

$$\rho(\daleth U_p,\daleth U_q)\leqslant\frac{1}{2}\rho(U_p,U_q).\tag{14}$$

由于

$$\|\partial^\alpha(\tilde{\xi}_p-\tilde{\xi}_q)\|_{L^2}\leqslant$$

$$\int_0^t\|\partial^\alpha G*(J(\psi_p,\xi_p)-J(\psi_q,\xi_q))\|_{L^2}\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\partial^\alpha G*\partial_x(\theta_p-\theta_q)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau,$$

且 J 是双线性泛函算子,可得

$$J(\psi_p,\xi_p)-J(\psi_q,\xi_q)=J(\psi_p,\xi_p-\xi_q)+J(\psi_p-\psi_q,\xi_q),$$

因此

$$\int_0^t\|\partial^\alpha G*(J(\psi_p,\xi_p)-J(\psi_q,\xi_q))\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$Ct(\|\partial^\alpha G\|_{L^2}(\|\nabla\psi_p\|_{L^2}\|\nabla(\xi_p-\xi_q)\|_{L^2}+$$

$$\|\nabla(\psi_p-\psi_q)\|_{L^2}\|\nabla\xi_q\|_{L^2}))\leqslant$$

$$CC_*t(\|\nabla(\xi_p-\xi_q)\|_{L^2}+\|\nabla(\psi_p-\psi_q)\|_{L^2}),\tag{15}$$

$$\int_0^t\|\partial^\alpha G*\partial_x(\theta_p-\theta_q)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$Ct(\|\partial^\alpha G\|_{L^2}\|\nabla(\theta_p-\theta_q)\|_{L^2}\leqslant Ct\|\nabla(\theta_p-\theta_q)\|_{L^2},\tag{16}$$

故

$$\|\partial^{\alpha}(\tilde{\xi}_p-\tilde{\xi}_q)\|_{L^2}\leqslant$$
$$Ct(\|\nabla(\xi_p-\xi_q)\|_{L^2}+\|\nabla(\psi_p-\psi_q)\|_{L^2}+\|\nabla(\theta_p-\theta_q)\|_{L^2}). \tag{17}$$

类似可得

$$\|\partial^{\alpha}(\tilde{\theta}_p-\tilde{\theta}_q)\|_{L^2}\leqslant Ct(\|\nabla(\psi_p-\psi_q)\|_{L^2}+\|\nabla(\theta_p-\theta_q)\|_{L^2}). \tag{18}$$

由式(17)、(18)和引理4,存在常数 T_2 使得当 $t<T_2$ 时,式(14)成立. 取 $T=\min\{T_0,T_1,T_2\}$ 并由第1步和第2步的讨论,可得 $\mho$ 是 $W_k(T)$ 的压缩映射,即当 $t\in[0,T]$ 时,(ξ,θ) 是式(1)~(3)的唯一解,显然

$$(\partial_t\xi,\partial_t\theta)\in L^{\infty}([0,T],H_P^{k-2}(\Omega)).$$

定理1证毕.

4 经典解的整体存在性定理

为证明整体解的存在性,我们需要做如下一系列的先验估计.

引理5

$$\|\theta(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C\|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{19}$$

证明 式(2)两边同乘以 θ, 结合式(3),有

$$(\partial_t\theta+\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y,\theta)=(\Delta\theta,\theta), \tag{20}$$

其中

$$(\partial_t\theta,\theta)=\frac{1}{2}\partial_t\|\theta\|_{L^2}^2,\ (\Delta\theta,\theta)=-\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.$$

由引理1知

$$\int_{\Omega}(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y)\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2=0.$$

由上式可得式(19)成立,引理5证毕.

引理6

$$\|\xi(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla\xi\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C(\|\xi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2). \tag{21}$$

证明 式(1)两边同乘以 ξ, 结合式(3),有

$$(\partial_t\xi+\psi_y\xi_x-\psi_x\xi_y,\xi)=(\Delta\xi-Ra\theta_x,\xi), \tag{22}$$

其中

$$(\partial_t\xi,\xi)=\frac{1}{2}\partial_t\|\xi\|_{L^2}^2,\ (\Delta\xi,\xi)=-\|\nabla\xi\|_{L^2}^2,$$

$$|-(Ra\theta_x,\xi)|\leqslant\varepsilon\|\xi\|_{L^2}^2+C_{\varepsilon}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.$$

由 Poincare 不等式,取 ε 适当小,有

$$\varepsilon\|\xi\|_{L^2}^2\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla\xi\|_{L^2}^2.$$

由引理1可得

$$(\psi_y\xi_x-\psi_x\xi_y,\xi)=0,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|_{L^2}^2+\|\nabla\xi\|_{L^2}^2\leqslant C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.$$

对上式两边对 t 积分,有

$$\|\xi(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla\xi\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C\left(\|\xi_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\right).$$

故由引理 5 可得式(21)成立. 引理 6 证毕.

引理 7

$$\|\nabla\theta(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta\theta\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C\|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2+C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2)\|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{23}$$

证明 由式(2)和式(3),可得

$$(\nabla(\partial_t\theta)+\nabla(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y),\nabla\theta)=(\nabla(\Delta\theta),\nabla\theta), \tag{24}$$

其中

$$\left|\int_\Omega\nabla(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y)\nabla\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\left|\int_\Omega(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y)\Delta\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\|\Delta\theta\|_{L^2}^2+C(\|\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y\|_{L^2}^2)\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta\theta\|_{L^2}^2+C\|\nabla\psi\|_\infty^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2,$$

$$(\nabla(\Delta\theta),\nabla\theta)=-\|\Delta\theta\|_{L^2}^2,\ (\nabla(\partial_t\theta),\nabla\theta)=\frac{1}{2}\partial_t\|\nabla\theta\|_{L^2}^2,$$

整理可得

$$\partial_t\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+\|\Delta\theta\|_{L^2}^2\leqslant C\|\nabla\psi\|_\infty^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.$$

由 Sobolev 嵌入定理及 $\Delta\psi=\xi$, 可知

$$\|\nabla\psi\|_{L^\infty}^2\leqslant\|\nabla\psi\|_{L^2}^2\|\Delta\nabla\psi\|_{L^2}^2=\|\nabla\psi\|_{L^2}^2\|\nabla\xi\|_{L^2}^2.$$

由于

$$\|\nabla\psi\|_{L^2}^2\leqslant\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2,$$

故

$$\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\leqslant C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2),$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+\|\Delta\theta\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$C\|\nabla\psi\|_\infty^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\leqslant C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2)\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.$$

对上式两边积分,有

$$\|\nabla\theta(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta\theta\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C\|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2+C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2)\int_0^t\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\mathrm{d}s. \tag{25}$$

由式(19)和式(25)可得式(23)成立,引理 7 证毕.

引理 8

$$\|\nabla\xi(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta\xi\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C\|\nabla\xi_0\|_{L^2}^2+C(\|\xi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2). \tag{26}$$

证明 由式(1)和式(3),可得

$$(\nabla(\partial_t\xi)+\nabla(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y),\nabla\xi)=(\nabla(\Delta\xi)-\nabla(Ra\theta_x),\nabla\xi),\tag{27}$$

其中

$$\left|\int_\Omega\nabla(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y)\nabla\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\left|\int_\Omega(\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y)\Delta\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant$$
$$\frac{1}{4}\|\Delta\xi\|_{L^2}^2+C(\|\psi_y\theta_x-\psi_x\theta_y\|_{L^2}^2)\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta\xi\|_{L^2}^2+C\|\nabla\psi\|_\infty^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2,$$

$$(\nabla(\Delta\xi),\nabla\xi)=-\|\Delta\xi\|_{L^2}^2,\ (\nabla(\partial_t\xi),\nabla\xi)=\frac{1}{2}\partial_t\|\nabla\xi\|_{L^2}^2,$$

$$\left|-Ra\int_\Omega\nabla\theta_x\nabla\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant Ra\|\theta_x\|_{L^2}\|\Delta\xi\|_{L^2}\leqslant C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\Delta\xi\|_{L^2}^2.$$

由 Poincare 不等式可得 $\|\nabla\xi\|_{L^2}^2\leqslant C\|\Delta\xi\|_{L^2}^2$，因此有

$$\partial_t\|\nabla\xi\|_{L^2}^2+\|\Delta\xi\|_{L^2}^2\leqslant C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2)\|\Delta\xi\|_{L^2}^2+C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2,$$

故

$$\partial_t\|\nabla\xi\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Delta\xi\|_{L^2}^2\leqslant C\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.$$

积分上式，并由引理 5 可得

$$\|\nabla\xi\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta\xi\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|\nabla\xi_0\|_{L^2}^2+C\int_0^t\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\leqslant C(\|\nabla\xi_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2).$$

由上式可得式(26)成立，引理 8 证完.

类似可得更高阶的导数的有界估计，当 $k\geqslant4$ 时，有下式成立：

$$\|\nabla\psi(t)\|_{L^2}^2+\|\theta(t)\|_{H_P^k}^2+\int_0^t\|\nabla\theta(s)\|_{H_P^k}^2\mathrm{d}s+$$
$$\|\xi(t)\|_{H_P^k}^2+\int_0^t\|\xi(s)\|_{H_P^{k+1}}^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2}^2+\|\xi_0\|_{H_P^k}^2+\|\theta_0\|_{H_P^k}^2).\tag{28}$$

综上所述，由局部存在性及式(28)，易得下面关于问题(1)~(4)整体解的存在性和唯一性定理.

定理 2 假设 $(\xi_0,\theta_0)\in H_P^k(\Omega)\times H_P^k(\Omega)$，$\nabla\psi_0\in L^2(\Omega)$，且 $\|\xi_0\|_{H_P^k}$，$\|\theta_0\|_{H_P^k}$适当小，那么当 $k\geqslant4$ 时，

$$(\xi,\theta)\in L^\infty([0,\infty),H_P^k(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,\infty),H_P^{k-2}(\Omega))$$

为方程(1)~(4)的经典解.

参考文献：

[1] 郭柏灵，黄海洋，蒋慕容. 金兹堡-朗道方程[M]. 北京：科学出版社，2002.

[2] 郭柏灵. 无穷维动力系统(上下册)[M]. 北京：国防工业出版社，2000.

[3] GUO Bo-ling. Spectral method for solving two dimensional Newton-Boussinesq equations[J]. *Acta Mathematicac Applicatae Sinica*，1989，**5**(3)：208-218.

[4] GUO Bo-ling. Nonlinear Galerkin methods for solving two dimensional Newton-Boussinesq equations[J]. *Chin Ann of Math*，*Ser B*，1995，**16**(3)：379-390.

[5] Fucci G，WANG Bi-xing，Singh P. Asymptotic behavior of the Newton-Boussinesq equation in a

two-dimensional channel[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, 2009, **70**(5):2000-2013.

[6] Temam R. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

Global Existence of Solutions of the Periodic Initial Value Problems for Two-Dimensional Newton-Boussinesq Equations

FANG Shao-mei[1], JIN Ling-yu[1], GUO Bo-ling[2]

(1. *Department of Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou* 510642, *P. R. China*;

2. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100088, *P. R. China*)

Abstract: A class of periodic initial value problems for two-dimensional Newton-Boussinesq equations was investigated. First the Newton-Boussinesq equations were turned into the equivalent integral equations, then by the iteration methods the local existence of the solutions was obtained. Finally using the method of a priori estimates, the global existence of the solutions was proved.

Key words: nonlinear two-dimensional Newton-Boussinesq equations; classical solution; a priori estimates