文章编号:1000-0887(2010)03-0360-09

具有非局部时滞的扩散 Nicholson 苍蝇方程的波前解*

张存华，　颜向平

(兰州交通大学 数学系,兰州 730070)

(郭兴明推荐)

摘要： 研究了具有非局部时滞的扩散 Nicholson 苍蝇方程,其中时滞由一个定义在所有过去时间和整个一维空间区域上的积分卷积表示.当时滞核是强生成核时, 根据线性链式技巧和几何奇异扰动理论,获得了小时滞时波前解的存在性.

关　键　词： 扩散 Nicholson 苍蝇方程；　非局部时滞；　强生成核；　波前解

中图分类号： O175.26　　　**文献标志码：** A

DOI： 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.011

引　　言

为了解释 Nicholson[1] 在澳大利亚羊蝇(铜绿蝇)中观察到的振动现象,Gurney,Blythe 和 Nisbet [2] 提出了下面著名的 Nicholson 苍蝇方程

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-\delta u(t)+pu(t-\tau)\mathrm{e}^{-au(t-\tau)},\tag{1}$$

其中 p 是每个个体每天的最大产卵率,$1/a$ 表示具有最大繁殖率的苍蝇种群数量,δ 是每个个体每天的死亡率,τ 是该种群的成熟时间.模型(1)已经被许多学者广泛研究,同时也得到了许多有趣的结论[3-5].

模型(1)是在假设苍蝇种群的相遇与其平均密度成正比的基础上提出来的.实际上,正如 Law, Murrell 和 Dieckmann[6] 所指出的,空间结构使得生物个体的相遇与其平均密度成正比变得不大可能.因此,上述模型中个体随机相遇的假设并不能表示生物间的实际相互作用.于是,在 Nicholson 苍蝇的种群动力学模型中,考虑空间结构会使所得到的模型更加符合实际情况.基于这一考虑,Yang 和 So[7] 把模型(1)推广到下面的扩散形式:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\Delta u(x,t)-\delta u(x,t)+pu(x,t-\tau)e^{-au(x,t-\tau)},\tag{2}$$

其中 Δ 表示 Laplace 算子.当空间区域为有界区域或无界区域时, 扩散 Nicholson 苍蝇方程(2)

* **收稿日期：** 2009-09-09；**修订日期：** 2009-12-16
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10961017)
作者简介： 张存华(1972—),女,甘肃人,讲师(联系人. E-mail:chzhang72@163.com);
颜向平(1972—),男,甘肃人,副教授(E-mail:xpyan72@163.com).

已被许多学者做了广泛的研究[7-10]. 比如,当空间区域是 R^n 中具有光滑边界的有界区域时, Yang 和 So[7] 考虑了在齐次 Neumann 边界条件下,模型(2)正稳态解的全局吸引性和解的振动性. So 和 Yang[10] 研究了在齐次 Dirichlet 边界条件下,模型(2)正稳态解的全局吸引性. 此外, So, Wu 和 Yang[8] 也给出了在齐次 Dirichlet 边界条件下,模型(2)的数值和 Hopf 分支分析. 当空间区域为整个实直线 R 时, So 和 Zou[9] 获得了方程(2)波前解的存在性.

近来,通过考虑种群在空间中的迁徙,张建明和彭亚红[11] 把模型(2)推广到下面具有非局部时滞的扩散形式:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\delta u(x,t)+p(g*u)(x,t)\mathrm{e}^{-a(g*u)(x,t)},\quad t>0,\ x\in R, \tag{3}$$

其中

$$(g*u)(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-y,t-s)u(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

且卷积核 $g(y,s)$ 是满足规范化条件

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s=1 \tag{4}$$

的非负可积函数. 在假设(4)和条件 $\beta:=p/\delta>1$ 下,模型(3) 有两个生态学相关的常数稳定态 $u=0$ 和 $u=u^*:=(\ln\beta)/a$.

弱生成核

$$g(x,t)=\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4t)},\qquad \tau>0 \tag{5}$$

和强生成核

$$g(x,t)=\frac{t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4t)},\qquad \tau>0 \tag{6}$$

已被普遍使用,而且具有这些卷积核的模型(3)已被广泛研究[11-13]. 比如,当 $1<\beta\leqslant \mathrm{e}$ 时,通过使用 Wang, Li 和 Ruan[14] 建立的具有非局部时滞反应扩散系统波前解的存在性结果, Li, Ruan 和 Wang[12] 研究了具有弱生成核(5)时模型(3)波前解的存在性,他们发现,对任意的 $\tau>0$,模型(3) 总有连接常数稳定态 $u=0$ 和 $u=u^*$ 的单调增加的波前解.

在更一般的条件 $\beta>1$ 下,张建明和彭亚红[11] 应用几何奇异扰动理论,研究了当 τ 充分小时,模型(3)和(5)行波解的存在性,得出了对充分小的时滞 τ, 具有零时滞的模型(3)的波前解能够持续存在. 对强生成核(6), Lin[13] 应用 Li, Ruan 和 Wang 在文献[12]中使用的方法,研究了模型(3)当 $1<\beta\leqslant \mathrm{e}$ 时波前解的存在性,得到了一个类似于文献[12]的存在性结果. 然而,这些文献都没有考虑当 $\beta>\mathrm{e}$ 时具有强生成核(6)的模型(3)行波解的存在性. 基于这一事实,本文通过应用 Fenichel[15] 建立的几何奇异扰动理论,来研究具有强生成核(6)的模型(3)当 $\beta>1$ 和时滞 τ 充分小时行波解的存在性. 我们发现当 τ 充分小时,具有强生成核(6) 的模型(3),对任意 $\beta>1$ 都有连接平凡平衡点 $u=0$ 和非平凡平衡点 $u=u^*$ 的单调波前解.

本文首先建立由方程(3)导出的非延迟方程波前解的存在性. 然后建立具有强生成核(6)的模型(3)行波解的存在性. 为了达到这一目的,我们首先根据线性链式技巧,把具有强生成核(6)的模型(3)转化为一个三维的偏微分方程系统. 这样,相应的行波方程就转化成一个六

维的一阶常微分方程系统. 对充分小的时滞 τ, 动力系统理论和几何奇异扰动理论表明,行波的发展其实发生在一个可以被显式计算的二维不变流形上. 这一流形中一个异宿连接的获得就蕴含着具有强生成核(6)的模型(3)波前解的存在性.

1　非延迟方程的波前解

为了应用几何奇异扰动理论获得充分小的时滞 τ 具有强生成核(6)的 Nicholson 苍蝇方程(3)波前解的存在性,我们需要知道非延迟的扩散 Nicholson 苍蝇方程波前解的存在性. 在强生成核(6)中令 $\tau \to 0$, 可得到如下非延迟的扩散 Nicholson 苍蝇方程:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \delta u(x,t) + pu(x,t)\mathrm{e}^{-au(x,t)}, \qquad t > 0, x \in R. \tag{7}$$

显然,当 $\beta > 1$ 时方程(7) 有两个一致的稳定态 $u = 0$ 和 $u = u^*$,而且在下面的讨论中我们总是假设 $\beta > 1$.

令 $u(x,t) = U(z)$,其中 $z = x - ct, c \geqslant 0$ 是波速,那么相应于方程(7)的行波方程为

$$U''(z) + cU'(z) - \delta U(z) + pU(z)\mathrm{e}^{-aU(z)} = 0. \tag{8}$$

用 V 表示 U', 则二阶常微分方程(8)可以改写为下面的一阶平面系统:

$$\begin{cases} U'(z) = V(z), \\ V'(z) = - cV(z) + \delta U(z) - pU(z)\mathrm{e}^{-aU(z)}. \end{cases} \tag{9}$$

显然,当 $\beta > 1$ 时,系统(9) 有两个平衡点(0,0) 和(u^*,0), 而且我们有如下的结论:

定理 1　如果 $c \geqslant 2\sqrt{p - \delta}$,那么系统(9) 在第四象限内有一条连接平衡点(0,0) 和(u^*, 0) 的异宿轨道. 因此,在这一情形,方程(7) 有一个连接一致稳定态 $u = u^*$ 和 $u = 0$ 的单调减少的波前解.

证明　线性化方法可以容易地表明,当 $c \geqslant 2\sqrt{p - \delta}$ 时原点(0,0) 是系统(9) 的稳定结点,且由于$\beta > 1$,因此(u^*,0) 总是系统(9) 的鞍点. 容易看出,当$c \geqslant 2\sqrt{p - \delta}$ 时,一元二次方程 $\lambda^2 - c\lambda - \delta + p = 0$ 有两个正根 λ_1, λ_2 满足 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

现在假设 $c \geqslant 2\sqrt{p - \delta}$,而且对任意的 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ 定义集合 B_λ,

$$B_\lambda = \{(U,V): 0 \leqslant U \leqslant u^*, -\lambda U \leqslant V \leqslant 0\}.$$

用 $\boldsymbol{n}$ 表示区域 B_λ 的边界 ∂B_λ 的单位内法向量,且令 $\boldsymbol{f} = (V, -cV + \delta U - pU\mathrm{e}^{-aU})$,则当$(U,V) \in \{(U,V): 0 \leqslant U \leqslant u^*, V = 0\}$ 时,$\boldsymbol{n} = (0, -1)$,因此 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{f} = -\delta U + pU\mathrm{e}^{-aU} \geqslant 0$. 当$(U,V) \in \{(U,V): U = u^*, -\lambda u^* \leqslant V \leqslant 0\}$ 时,$\boldsymbol{n} = (-1, 0)$,于是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{f} = -V \geqslant 0$. 此外,当$(U,V) \in \{(U,V): 0 \leqslant U \leqslant u^*, V = -\lambda U\}$ 时,$\boldsymbol{n} = (\lambda, 1)$, 因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{f} &= \lambda V - cV + \delta U - pU\mathrm{e}^{-aU} = \\ &U(-\lambda^2 + c\lambda + \delta - p\mathrm{e}^{-aU}) \geqslant U(-\lambda^2 + c\lambda + \delta - p) \geqslant 0. \end{aligned}$$

这就表明,当 $c \geqslant 2\sqrt{p - \delta}$ 时,对 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$,上面定义的三角形区域 B_λ 是系统(9)的一个正不变集.

注意到系统(9)在平衡点 (u^*,0) 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a\delta u^* & -c \end{pmatrix}.$$

显然, $\boldsymbol{B}$ 有一个正的特征值和一个负的特征值,其中正的特征值为

$$\frac{-c+\sqrt{c^2+4a\delta u^*}}{2},$$

且相应的特征向量为

$$\left(1,\frac{c+\sqrt{c^2+4a\delta u^*}}{4a\delta u^*}\right)^{\mathrm{T}}.$$

因此,系统(9)在平衡点 $(u^*,0)$ 处的不稳定(负不变)流形和特征向量

$$\left(1,\frac{c+\sqrt{c^2+4a\delta u^*}}{4a\delta u^*}\right)^{\mathrm{T}}$$

相切,且由

$$\frac{c+\sqrt{c^2+4a\delta u^*}}{4a\delta u^*}>0$$

可知,系统(9)在平衡点 $(u^*,0)$ 处的不稳定流形的一支一定包含于区域 B_{λ_1} 中. 结合上面的讨论我们知道不稳定流形的这一支一定正向地趋于原点(0,0),这就蕴含着系统(9) 在平衡点(0,0) 和 $(u^*,0)$ 之间存在一个被限制在第四象限的异宿轨道. 因此,方程(7) 有一个连接常数稳定态 $u=u^*$ 和 $u=0$ 的单调减少的波前解. 证毕.

2 波前解的持续存在性

在这一节,通过应用线性链式技巧和 Fenichel[15] 建立的几何奇异扰动理论,我们研究当时滞 τ 充分小时,具有强生成核(6)的模型(3)波前解的持续存在性.

令 $$g(x,t)=\frac{t}{\tau^2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}$$

且定义

$$v(x,t)=(g*u)(x,t)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t-s}{\tau^2}\mathrm{e}^{-(t-s)/\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2/(4(t-s))}u(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

$$w(x,t)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-(t-s)/\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2/(4(t-s))}u(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

则由线性链式技巧,具有强生成核(6)的 Nicholson 方程(3)可以转化为下面的偏微分方程系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\delta u(x,t)+pv(x,t)\mathrm{e}^{-av(x,t)},\\[2mm] \tau\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}=\tau\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+w(x,t)-v(x,t),\\[2mm] \tau\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t}=\tau\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+u(x,t)-w(x,t).\end{cases}\tag{10}$$

令 $u(x,t)=U(z)$, $v(x,t)=W(z)$, $w(x,t)=Y(z)$,其中 $z=x-ct$ 且 $c\geqslant 0$, 则系统(10)可以改写为下面的二阶常微分方程系统:

$$\begin{cases}U''+cU'-\delta U+pW\mathrm{e}^{-aW}=0,\\ \tau W''+c\tau W'+Y-W=0,\\ \tau Y''+c\tau Y'+U-Y=0.\end{cases}\tag{11}$$

进一步做变量代换 $U' = V, W' = X, Y' = Z$, 那么系统(11)可以转变为下面六维的一阶常微分方程系统:

$$\begin{cases} U' = V, \\ U' = cV + \delta U - pW\mathrm{e}^{-aW}, \\ W' = X, \\ \tau X' = -c\tau X + W - Y, \\ Y' = Z, \\ \tau Z' = -c\tau Z + Y - U. \end{cases} \tag{12}$$

如果 $\tau = 0$, 那么系统(12)还原为

$$\begin{cases} U' = V, \\ V' = -cV + \delta U - pU\mathrm{e}^{-aU}. \end{cases} \tag{13}$$

由定理 1 知,当 $c \geqslant 2\sqrt{p-\delta}$ 时,系统(13) 在平衡点$(u^*,0)$ 和$(0,0)$ 间有一个单调减少的异宿连接. 因此,非延迟的系统(10) 或等价的具有零时滞的方程(3) 有一个连接一致稳定态 $u = u^*$ 和 $u = 0$ 的单调减少的波前解. 注意到对 $\tau > 0$, 系统(12)有两个平衡点

$$\begin{cases} (U,V,W,X,Y,Z) = (0,0,0,0,0,0), \\ (U,V,W,X,Y,Z) = (u^*,0,u^*,0,u^*,0). \end{cases} \tag{14}$$

因此, 当 $\tau > 0$ 时 ,如果系统(12) 在上述两个平衡点之间有一个异宿连接, 那么具有强生成核(6) 的 Nicholson 方程(3) 对相应的时滞 τ, 就有一个连接一致稳定态 $u = u^*$ 和 $u = 0$ 的波前解.

对 $\tau > 0$,引入参数 ε,由 $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, 并且做变量代换

$$\bar{X} = \varepsilon X,\ \bar{Z} = \varepsilon Z.$$

仍然用 X 和 Z 表示 $\bar{X}$ 和 $\bar{Z}$, 那么系统(12)就变为下面所谓的慢系统:

$$\begin{cases} U' = V, \\ U' = -cV + \delta U - pW\mathrm{e}^{-aW}, \\ \varepsilon W' = X, \\ \varepsilon X' = -c\varepsilon X + W - Y, \\ \varepsilon Y' = Z, \\ \varepsilon Z' = -c\varepsilon Z + Y - U. \end{cases} \tag{15}$$

注意到,当 $\varepsilon = 0$ 时,系统(15) 退化成二维系统(13) ,因此当 $\varepsilon = 0$ 时,系统(15) 并不能定义一个在 R^6 中的动力系统. 于是几何奇异扰动理论并不能直接用来确定系统(15) 当 $\varepsilon > 0$ 时异宿连接的存在性. 为了克服这一困难,做变量代换 $z = \varepsilon \bar{z}$,并且仍然用 z 表示 $\bar{z}$, 那么系统(15)就可以转变为下面的等价系统:

$$\begin{cases} U' = \varepsilon V, \\ U' = \varepsilon(-cV + \delta U - pW\mathrm{e}^{-aW}), \\ W' = X, \\ X' = -c\varepsilon X + W - Y, \\ Y' = Z, \\ Z' = -c\varepsilon Z + Y - U, \end{cases} \tag{16}$$

系统(16)叫做快系统,而且当 $\varepsilon > 0$ 时等价于慢系统(15).

在系统(16)中令 $\varepsilon = 0$, 可得系统(16)的一个二维不变流形为

$$M_0 := \{(U,V,W,X,Y,Z) \in R^6 : X = 0, W = Y, z = 0, Y = U\}.$$

如果 M_0 是系统(16)的规范双曲流形,那么从 Fenichel[15] 建立的几何奇异扰动理论可知对 $\varepsilon > 0$,系统(16) 有一个二维的不变流形 M_ε 并且系统(16) 在 M_ε 上的限制也是一个二维系统. 这一限制系统异宿轨道的存在性蕴含着具有强生成核(6)的 Nicholson 方程(3)波前解的存在性.

为了检验 M_0 的确是系统(16) 的规范双曲流形,根据文献[15],只需要检验系统(16) 在 M_0 上的限制系统的线性化系统恰好有 $\dim M_0$ 个零实部的特征值,并且其余的特征值都有非零实部. 容易得到系统(16) 在 M_0 上的限制系统的线性化矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

简单的计算可表明上述矩阵的特征值为 0,0,-1,-1,1,1,这样 M_0 是系统(16) 的规范双曲流形. 因此,系统(16) 对 $\varepsilon > 0$ 有一个二维的不变流形 M_ε.

下面我们计算 M_ε. 令

$$\begin{aligned} M_\varepsilon := \{(U,V,W,X,Y,Z) \in R^6 :\ & X = f(U,V;\varepsilon),\ W = Y + g(U,V;\varepsilon), \\ & Z = h(U,V;\varepsilon),\ Y = U + k(U,V;\varepsilon)\}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中函数 f,g,h 和 k 满足条件

$$f(U,V;0) = g(U,V;0) = h(U,V;0) = k(U,V;0) = 0. \tag{18}$$

把 $X = f(U,V;\varepsilon)$, $W = Y + g(U,V;\varepsilon)$, $Z = h(U,V;\varepsilon)$ 和 $Y = U + k(U,V;\varepsilon)$ 代入慢系统(15),可得 f,g,h 和 k 满足下面的偏微分方程:

$$\begin{cases} \varepsilon\left[\left(1 + \dfrac{\partial g}{\partial U} + \dfrac{\partial k}{\partial U}\right)V + \left(\dfrac{\partial g}{\partial V} + \dfrac{\partial k}{\partial V}\right)(-cV + \delta U - p(U+g+k)\mathrm{e}^{-a(U+g+k)})\right] = f, \\ \varepsilon\left[\dfrac{\partial f}{\partial U}V + \dfrac{\partial f}{\partial V}(-cV + \delta U - p(U+g+k)\mathrm{e}^{-a(U+g+k)})\right] = c\varepsilon f + g, \\ \varepsilon\left[\left(1 + \dfrac{\partial k}{\partial U}\right)V + + \dfrac{\partial k}{\partial V}(-cV + \delta U - p(U+g+k)\mathrm{e}^{-a(U+g+k)})\right] = h, \\ \varepsilon\left[\dfrac{\partial h}{\partial U}V + \dfrac{\partial h}{\partial V}(-cV + \delta U - p(U+g+k)\mathrm{e}^{-a(U+g+k)})\right] = c\varepsilon h + k. \end{cases} \tag{19}$$

注意到 f,g,h 和 k 满足条件(18),从而根据 Taylor 展式,当 ε 充分小时,函数 f,g,h 和 k 可以表示为下面的形式:

$$\begin{cases} f(U,V;\varepsilon) = \varepsilon f_1(U,V) + \varepsilon^2 f_2(U,V) + \cdots, \\ g(U,V;\varepsilon) = \varepsilon g_1(U,V) + \varepsilon^2 g_2(U,V) + \cdots, \\ h(U,V;\varepsilon) = \varepsilon h_1(U,V) + \varepsilon^2 h_2(U,V) + \cdots, \\ k(U,V;\varepsilon) = \varepsilon k_1(U,V) + \varepsilon^2 k_2(U,V) + \cdots. \end{cases} \tag{20}$$

把式(20)代入方程(19)并比较 ε 和 ε^2 的系数,可得

$$\begin{cases} f_1(U,V)=V,\ f_2(U,V)=0, \\ g_1(U,V)=0,\ g_2(U,V)=\delta U-pU\mathrm{e}^{-aU}, \\ k_1(U,V)=V,\ k_2(U,V)=0, \\ h_1(U,V)=0,\ h_2(U,V)=\delta U-pU\mathrm{e}^{-aU}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} f(U,V;\varepsilon)=\varepsilon V+o(\varepsilon^2), \\ g(U,V;\varepsilon)=(\delta U-pU\mathrm{e}^{-aU})\varepsilon^2+o(\varepsilon^2), \\ k(U,V;\varepsilon)=\varepsilon V+o(\varepsilon^2), \\ h(U,V;\varepsilon)=(\delta U-pU\mathrm{e}^{-aU})\varepsilon^2+o(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{21}$$

并且系统(15)在 M_ε 上的限制系统由

$$\begin{cases} U'=V, \\ V'=-cV+\delta U-p(U+g(U,V;\varepsilon)+k(U,V;\varepsilon))\mathrm{e}^{-a(U+g(U,V;\varepsilon)+k(U,V;\varepsilon))} \end{cases} \tag{22}$$

给出,其中 f,g,h 和 k 由式(21) 给出. 从式(19) 不难得到对 $\varepsilon>0$, $g(0,0;\varepsilon)=g(u^*,0;\varepsilon)=k(0,0;\varepsilon)=k(u^*,0;\varepsilon)=0$. 因此,对 $\varepsilon>0$,系统仍然有两个平衡点(0,0) 和(u^*,0). 当 $\varepsilon=0$ 时,系统(22) 退化为系统(13),并且从前面的讨论知道,在系统(22) 当 $c\geqslant 2\sqrt{p-\delta}$ 时,在两个平衡点(0,0) 和(u^*,0) 间有一个异宿连接. 下面我们表明这一异宿连接对充分小的 ε 在系统(22)中仍然能够持续存在.

定理 2 假设 $c\geqslant 2\sqrt{p-\delta}$,那么对充分小的时滞 τ, 具有强生成核(6)的 Nicholson 方程(3)有一个连接一致稳定态 $u=u^*$ 和 $u=0$ 的单调减少的波前解.

证明 注意到当 $\varepsilon=0$ 时,系统(22) 退化为系统(13). 因此,当 $\varepsilon=0$ 时,系统(22) 有一条连接两个平衡点(0,0) 和(u^*,0) 的异宿轨道(U_0,V_0). 对充分小的 $\varepsilon>0$, 设

$$U=U_0+\varepsilon\varphi+\cdots,\quad V=V_0+\varepsilon\psi+\cdots \tag{23}$$

是系统(22)的一个解. 容易获得 φ 和 ψ 满足下面的方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -\delta+p(1-aU_0)\mathrm{e}^{-aU_0} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}0\\ -2p(1-aU_0)\mathrm{e}^{-aU_0}H(U_0)\end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中

$$H(U_0)=(\delta U_0-pU_0\mathrm{e}^{-aU_0})\mathrm{e}^{-aU_0}.$$

如果系统(24)有一个解满足条件 $\varphi(\pm\infty)=0$ 和 $\psi(\pm\infty)=0$,则对于充分小的 ε,解的连续依赖性意味着连接系统(22) 的两个平衡点(0,0) 和(u^*,0) 的异宿轨线的存在性. 下面我们表明系统(24) 的确有一个满足条件 $\varphi(\pm\infty)=0$ 和 $\psi(\pm\infty)=0$ 的解.

用(·,·)表示向量空间 R^2 中的 Euclide 内积. 由 Fredholm 定理知,方程(24)有解当且仅当对任意的 $x(z)\in\ker l^*$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\boldsymbol{x}(z),\begin{pmatrix}0\\ -p(1-aU_0)\mathrm{e}^{aU_0}H(U_0)\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}z=0$$

成立，其中

$$l^{*}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\begin{pmatrix}0 & -\delta+p(1-aU_0)\mathrm{e}^{aU_0}\\ -1 & c\end{pmatrix}.$$

要获得 $\ker l^{*}$ 的所有元素是非常困难的，并且如果能够表明 $\ker l^{*}$ 有一个元素 $x(z)$ 满足条件 $x(\pm\infty)=0$，那么可以推断出系统(24)有一个满足条件 $\varphi(\pm\infty)=0$ 和 $\psi(\pm\infty)=0$ 的解 (φ,ψ). 设 $\boldsymbol{x}(z)\in\ker l^{*}$，则 $x(z)$ 满足下面的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{pmatrix}0 & -\delta+p(1-aU_0)\mathrm{e}^{-aU_0}\\ -1 & c\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(z). \tag{25}$$

从前面的讨论，我们知道当 $z\to\infty$ 时 $U_0(z)\to 0$. 因此，当 $z\to\infty$ 时，方程(25)的系数矩阵变为

$$\begin{pmatrix}0 & -\delta+p\\ -1 & c\end{pmatrix},$$

并且这一矩阵的特征方程为

$$\lambda^2-c\lambda+p-\delta=0. \tag{26}$$

由 $c\geqslant 2\sqrt{p-\delta}$ 可知，方程(26)有两个正的实根，并且这蕴含着方程(25)满足条件 $\boldsymbol{x}(\pm\infty)=0$ 的解 $\boldsymbol{x}(z)$ 仅仅是零解，于是可得方程(24)有满足条件 $\varphi(\pm\infty)=0$ 和 $\psi(\pm\infty)=0$ 的解 (φ,ψ). 因此，对充分小的 ε，方程(22)有一个连接平衡点 $(0,0)$ 和 $(u^{*},0)$ 的异宿轨道，即系统(12)有一个连接平衡点 $(0,0,0,0,0,0)$ 和 $(u^{*},0,u^{*},0,u^{*},0)$ 的异宿轨道. 这表明对充分小的时滞 τ，具有强生成核(6)的 Nicholson 方程(3)有一个连接一致稳定态 $u=u^{*}$ 和 $u=0$ 的单调减少的波前解. 证毕.

致谢　本文作者感谢兰州交通大学“青蓝”工程项目(QL-05-16A)的资助.

参考文献：

[1] Nicholson A J. An outline of the dynamics of animal populations[J]. *Aust J Zool*, 1954, **2**(1): 9-65.

[2] Gurney W S C, Blythe S P, Nisbet R M. Nicholson's blowflies revisited[J]. *Nature*, 1980, **287**: 17-21.

[3] Kopell N, Howard L N. Plane wave solutions to reaction-diffusion equations[J]. *Stud Appl Math*, 1973, **52**: 291-328.

[4] Smith H L. *Monotone Dynamical Systems: an Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*[M]. Providence RI: American Mathematical Society, 1995.

[5] So J W-H, Yu J S. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowflies[J]. *Diff Equ Dyn Sys*, 1994, **2**(1): 11-18.

[6] Law R, Murrell D J, Dieckmann U. Population growth in space and time: spatial logistic equations[J]. *Ecology*, 2003, **84**(1): 252-262.

[7] Yang Y, So J W-H. Dynamics for the diffusive Nicholson's blowflies equation[C]//Chen W, Hu S. *Dynamical Systems and Differential Equations*. Vol II. Springfield: Southwest Missouri State University, 1998: 333-352.

[8] So J W-H, Wu J, Yang Y. Numerical Hopf bifurcation analysis on the diffusive Nicholson's blowflies equation[J]. *Appl Math Comput*, 2000, **111**(1): 53-69.

[9] So J W-H, Zou X. Travelling waves for the diffusive Nicholson's blowflies equation[J]. *Ap-*

pl Math Comput, 2001, **122**(1): 385-392.

[10] So J W-H, Yang Y. Dirichlet problem for the diffusive Nicholson's blowflies equation[J]. *J Differential Equations*, 1998, **150**(1): 317-348.

[11] 张建明,彭亚红. 具有非局部反应的时滞扩散 Nicholson 方程的行波解[J]. 数学年刊,A 辑, 2006, **27**(6): 771-778.

[12] Li W T, Ruan S, Wang Z C. On the diffusive Nicholson's blowflies equation with nonlocal delay[J]. *J Nonlinear Sci*, 2007, **17**(6): 505-525.

[13] Lin G. Travelling waves in the Nicholson's blowflies equation with spatio-temporal delay[J]. *Appl Math Comp*, 2009, **209**(2): 314-332.

[14] Wang Z C, Li W T, Ruan S. Travelling wave-fronts in reaction-diffusion systems with spatio-temporal delays[J]. *J Differential Equations*, 2006, **222**(1): 185-232.

[15] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary diferential equations[J]. *J Differential Equations*, 1979, **31**(1): 53-98.

Wavefront Solutions in the Diffusive Nicholson's Blowflies Equation With Nonlocal Delay

ZHANG Cun-hua, YAN Xiang-ping

(*Department of Mathematics*, *Lanzhou Jiaotong University*, *Lanzhou* 730070, *P. R. China*)

Abstract: The diffusive Nicholson's blowflies equation with a nonlocal delay incorporated as an integral convolution over all the past time up to now and the whole one-dimensional spatial domain was studied. When the delay kernel is assumed to be the strong generic kernel, by using the linear chain techniques and the geometric singularperturbation theory, the existence of travelling front solutions is shown for small delay.

Key words: diffusive Nicholson's blowflies equation; nonlocal delay; strong generic kernel; travelling wavefront solution