

走滑式断层地震的折迭突变模型*

潘岳¹, 李爱武²

(1. 青岛理工大学 土木工程学院, 山东 青岛 266520;

2. 青岛理工大学 理学院, 山东 青岛 266520)

(陈立群推荐)

摘要: 利用过势函数微分形式的途径, 计入远场外力功的影响, 对走滑式断层地震机制进行分析. 研究表明: 突变理论中折迭突变模型展示的性状, 与走滑式断层地震的主要特征之间一一对应. 折迭突变可对包括震前、震后围岩-断层系统稳定性描述在内的断层失稳起、终点位置、断层失稳错距等作出描述, 给出3种性状可相互印证的断层失稳围岩弹性能释放量图解. 走滑式断层地震强度与围岩压力及围岩断层的刚度比等有关, 围岩压力大、刚度比小、主切应力轴与发震断层面夹角大, 则地震强度大.

关键词: 断层地震; 折迭突变模型; 失稳终止点; 失稳准则; 能量输入率; 弹性能释放量

中图分类号: P315.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.008

引言

地震是一个动力失稳过程, 但是地震孕育是准静态的, 地震本质是在外界挠动下, 围岩-断层系统从震前的不稳定平衡状态跃变为震后稳定的准静式平衡状态. 因此, 可以采用准静态方法对孕震、发震条件和震后状况进行研究. 在这方面, 研究者已做了很多工作^[1-8]. 突变理论是描述参数连续变化导致系统状态不连续变化的理论, 地震应力降和地震错距都是典型的不连续变化现象. 殷有泉等^[9]最早采用突变理论对受纯扭作用的走滑式断层地震进行分析, 正确地采用非线性软化本构模型表示断层的力学特性, 对围岩-断层系统失稳特性进行研究; 杨修信等^[10]采用突变理论对非均匀围压作用的走滑式断层地震特性进行了研究, 但是文献[9-10]在建立的是势函数中没有考虑远场外力功的作用. 本文拟参照文献[10]给出的走滑式断层地震简化模型(图1), 计入远场外力功的影响, 采用突变理论方法对断层地震的孕震、发震和震后状况进行研究.

1 走滑式断层地震的分析模型

图1 地震模型中震源断层比较陡直, 断层错动方向接近水平, 主应力轴与发震断层面成一

* 收稿日期: 2009-06-02; 修订日期: 2010-01-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50674059)

作者简介: 潘岳(1947—), 男, 江苏金坛人, 教授(联系人. Tel: +86-532-86879624; E-mail: panyue@qtech.edu.cn).

定角度,图中围岩、断层由不同的均质岩体构成,断层带宽 $2l$,围岩外边界到断层的距离为 L ;在远场边界作用有均布切应力 $\tau_{xy} = \tau$ 和均布压应力 σ_x, σ_y (其中 $\sigma_x > \sigma_y$), 它们为围岩-断层系统的外力. 在此外力系作用下围岩和断层内的应力相同,但由于围岩、断层介质的本构不同,它们内部的形变程度却不相同. 在远场边界 ($L + l$) 处有逐渐增加的位移

$$\rho_{\Gamma} = \sqrt{v_{\Gamma}^2 + u_{\Gamma}^2} = v_{\Gamma} \sqrt{1 + \tan^2 \beta},$$

式中 v_{Γ}, u_{Γ} 为 $x = -(L + l)$ 处的切向和法向位移, $\beta = \text{atan}u_{\Gamma}/v_{\Gamma}$; 断层边界 l 处有相应位移 $\rho_l = \sqrt{v^2 + u^2} = v \sqrt{1 + \tan^2 \beta'}$, 式中 v, u 为 $x = -l$ 处的切向和法向位移, $\beta' = \text{atan}u/v$.

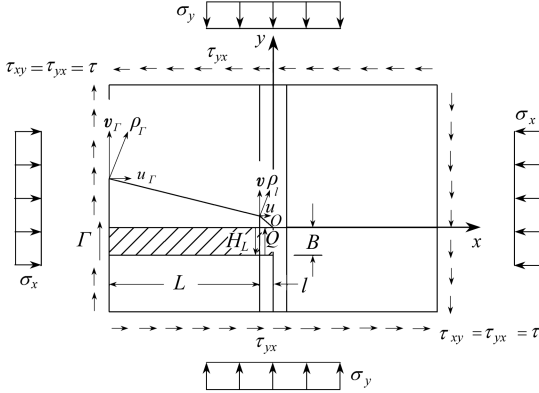


图 1 走滑式断层地震的分析模型^[10]

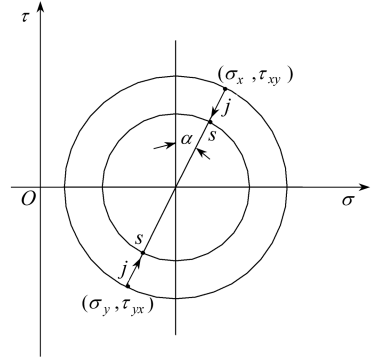


图 2 围岩和断层中应力变化方式

为便于分析,假定图 1 中的应力按比例加载,应力增量 $d\tau$ 与 $(d\sigma_x - d\sigma_y)$ 沿图 2 中倾角为 α ($\alpha < 45^\circ$) 的斜线变化,即总有

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \tau \cdot \tan \alpha, \tag{1}$$

由于问题的复杂性,本文仅研究断层失稳破裂的平均效应,沿 z 轴方向按在平面应变处理. 由于图 1 中 y 轴两侧围岩-断层形变反向均匀,只需在 3 维地块中取出 $x \leq 0$,沿 y 和 z 方向尺度为 B 和 D 的半条阴影带来研究就可以了. 对于图 1 半条带,在 $x = -l$ 处的应力满足连续条件

$$\tau_l BD = \tau_L BD \text{ 或 } Q = H_L, \tag{2}$$

$$\sigma_{xl} BD = \sigma_{xL} BD = N. \tag{3}$$

在 $x = -(l + L)$ 处的力边界条件为

$$\tau_L BD = \Gamma, \sigma_{xL} BD = N. \tag{4}$$

围岩处于弹性阶段,其切应力-切应变关系为

$$\tau = G\gamma, \tag{5}$$

式中 G 为剪切弹性模量,断层岩体峰后具有非线性软化特性,其切应力-切应变全曲线表达式可假定为^[11]

$$\tau = g\gamma \exp \left[- \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^m \right], \tag{6}$$

式中 g 为介质的初始剪切刚度, γ_0 为断层介质微元的平均剪切强度, m 为介质微元均质度参数. 峰值强度 τ_{\max} 处的应变 γ_c 与 γ_0 的关系为

$$\gamma_c = \left(\frac{1}{m}\right)^{1/m} \gamma_0, \quad (7)$$

$m = 1$ 时, $\gamma_c = \gamma_0$, m 越大, 曲线软化段越陡. 按 Coulomb-Mohr 条件, 式(6) 中的 γ_0 随围压 $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ 增大而增大, 相应式(6) 中的切应力峰值强度 τ_{\max} 也随围压增大而增大, 具体数据可从试验获得.

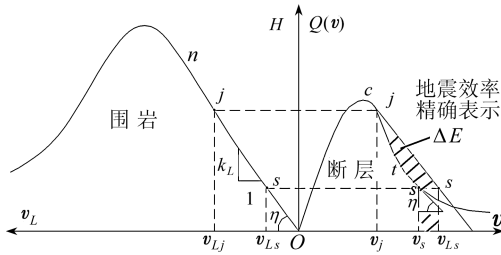
在均布应力作用下半条带断层和围岩部分的形变各自均匀分布, 断层和围岩内位移则按线性分布, 切应变与切向位移关系分别为

$$\gamma = \frac{v}{l}, \quad (8)$$

$$\gamma_L = \frac{v_L - v}{L} = \frac{v_L}{L}. \quad (9)$$

将式(6) 和(8) 代入式(2), 可得围压作用下半条带断层部分的剪力-切向形变关系为

$$Q(v) = \frac{gBD}{l} v \exp\left[-\left(\frac{v}{v_0}\right)^m\right] = \lambda v \exp\left[-\left(\frac{v}{v_0}\right)^m\right], \quad (10)$$



式中已记 $\lambda = gBD/l$. 式(10) 的图形为图3 纵轴右侧峰后软化段上具有拐点 t 的曲线; 式(5) 和(9) 代入式(4), 可得半条带围岩部分的剪力-切向形变关系为

$$\Gamma = H_L = \frac{GBD}{L} v_L = k_L v_L, \quad (11)$$

式中 $k_L = GBD/L$ 为围岩半条带的切向刚度. 式(11) 的图形为图3 纵轴左侧的曲线上斜率为 $\tan \eta$

图3 围岩、断层半条带的剪力-横向位移关系
= GBD/L 的直线段 On 部分.

图1 外边界剪力 Γ 作用点位移 $\rho_r = \sqrt{v_r^2 + u_r^2}$ 按准静态单调方式增大, 也即可设 $d\rho_r/dt = c_1, c_1$ 为微小常数. 当断层形变以准静态方式增加时, 由式(2) 和式(10) 及(11) 可得

$$\Gamma = H_L = k_L v_L = Q(v). \quad (12)$$

式(12) 是 $x = l + L$ 面与 $x = l$ 面上内力和剪力的关系.

2 围岩与断层的形变

在平面应变 $\varepsilon_z = 0$ 和体积应变 $\theta = 3\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ 条件下, 有^[12-13]

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \quad \text{或} \quad \varepsilon_y = -\varepsilon_x. \quad (13)$$

由式(13) 第1 式可得 $\varepsilon_z = 0$ 时的平均应力

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (14)$$

与应力张量对应, 应变也是2 阶张量. 围岩、断层岩体也有对应的应变圆. 可以证明在式(1)、图2 的比例加载条件下, 切应变 $\varepsilon_{lxy} = \gamma/2, \varepsilon_{Lxy} = \gamma_L/2$ 与正应变的关系也按图2 中倾角为 α 的斜线变化, 即有 $\beta = \text{atan} u_r/v_r = \beta' = \text{atan} u/v = \alpha$, 从而有

$$\frac{\varepsilon_{xL} - \varepsilon_{yL}}{2} \Big/ \frac{\gamma_L}{2} = \tan \alpha, \quad \frac{d\varepsilon_{xL} - d\varepsilon_{yL}}{2} \Big/ d\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan \alpha. \quad (15)$$

3 断层地震的折迭突变模型

图4中边缘的应力 τ, σ_y 和 Γ, N 是围岩-断层半条带的外力. 岩体系统与外界有着能量交换. 在外力作用下, 岩体系统内部也有着能量传递和转移. 断层动力失稳是在其承载强度之后的软化段(图3)发生的, 在峰后软化段上断层有准静态形变增量 $d\rho_l (> 0)$ 时, 断层以其内微裂纹扩展、连通要吸收能量 $dU_l^p (> 0)$; 相应围岩由于卸载(与沿图3半直线 O_n 卸载类似), 其形变增量 $d(\rho_r - \rho_l)$ 小于零, 即要释放弹性形变能 $dU_l^e (< 0)$. 当 $-dU_l^e < dU_l^p$ 时, 外力 Γ, N 等在其位移上做功 $dW (> 0)$ 补充能量, 才能使断层产生形变 $d\rho_l (> 0)$. 由于是处于准静态, 无动能影响, 由能量守恒原理, 可得关系式

$$dU_L^e + dU_l^p - dW = 0, \quad (16)$$

式(16)为以断层任一形变 ρ_l 时的状态为参考态建立的、断层有微形变 $d\rho_l (> 0)$, 而系统作准静态形变时的功、能量增量平衡关系——系统总势能的微分形式.

由应力旋转公式和式(1), 式(14)可得半条带内主应力

$$\sigma_1 = \sigma_m + \tau\sqrt{1 + \tan^2\alpha}, \quad \sigma_3 = \sigma_m - \tau\sqrt{1 + \tan^2\alpha}. \quad (17)$$

由应变旋转公式和式(13)、(15)可得围岩岩体主应变

$$\varepsilon_{L1} = \frac{\gamma_L}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}, \quad \varepsilon_{L3} = -\frac{\gamma_L}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}. \quad (18)$$

同理, 可得断层岩体主应变

$$\varepsilon_{l1} = \frac{\gamma_L}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}, \quad \varepsilon_{l3} = -\frac{\gamma_L}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}. \quad (19)$$

由于 $\varepsilon_2 = \varepsilon_z = 0$, 在断层 $x = l$ 处沿 y 轴方向的位移增量为 $dv (> 0)$ 时, 由式(17)和(19), 可得半条带断层和围岩内的能量变化:

$$\begin{aligned} dU &= dU_L^e + dU_l^p = BDL(\sigma_1 d\varepsilon_{L1} + \sigma_3 d\varepsilon_{L3}) + BDL(\sigma_1 d\varepsilon_{l1} + \sigma_3 d\varepsilon_{l3}) = \\ & BDL[\tau d\gamma_L(1 + \tan^2\alpha)] + BDL[\tau d\gamma(1 + \tan^2\alpha)] = \\ & [Hdv_L + Qdv](1 + \tan^2\alpha). \end{aligned} \quad (20)$$

半条带上外力功增量

$$dW = dW_1 + dW_2, \quad (21)$$

dW_1 为图4半条带表面切应力的外力功增量. 远场边界 $x = (l + L)$ 表面剪力功增量为 $BD\tau dv_\Gamma$, 上下表面的切应力在各自表面的刚体位移上, 一个做正功, 另一个做负功, 代数数和为0. 因此,

$$dW_1 = BD\tau dv_\Gamma = \Gamma dv_\Gamma, \quad (22)$$

dW_2 为图4半条带表面正应力的外力功增量. 半条带 $x = (l + L)$ 表面的正应力功增量为 $BD\sigma_x(ld\varepsilon_{lx} + Ld\varepsilon_{Lx})$; 上下表面正应力在半条带刚体位移部分各做正负功相互抵消, 而上下表面正应力在半条带压缩形变引起的位移增量上所做的功为 $B\sigma_y(Dd\varepsilon_{ly}) + B\sigma_y(Dd\varepsilon_{ly})$. 将这两个部分相加, 再利用式(13)第2式 $\varepsilon_y = -\varepsilon_x$ 、式(2)、(12)和式(1)、(15), 可得

$$dW_2 = BD\sigma_x(ld\varepsilon_{xl} + Ld\varepsilon_{Ll}) + B\sigma_y(Dd\varepsilon_{yl}) + B\sigma_y(Dd\varepsilon_{yl}) =$$

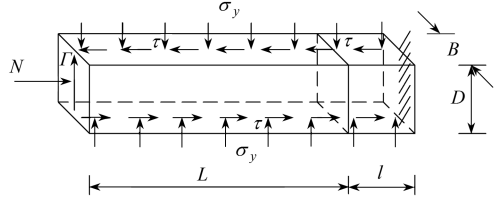


图4 围岩-断层半条带系统受外力作用

$$\begin{aligned}
& BDL(\sigma_x - \sigma_y) d\varepsilon_{xl} + BDL(\sigma_x - \sigma_y) d\varepsilon_{xL} = \\
& BDL\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) d(\varepsilon_{xl} - \varepsilon_{yL}) + BDL\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) d(\varepsilon_{xL} - \varepsilon_{yL}) = \\
& BD\tau \tan\alpha \cdot ld\gamma \tan\alpha + BD\tau \tan\alpha \cdot Ld\gamma_L \tan\alpha = \\
& \Gamma(dv + dv_L) \tan^2\alpha = \Gamma dv_r \tan^2\alpha. \quad (23)
\end{aligned}$$

式(23)最后一个等式中已利用关系 $dv_r = dv + dv_L = ld\gamma + Ld\gamma_L$ 。将式(22)和(23)代入式(21), 可得

$$dW = \Gamma dv_r (1 + \tan^2\alpha). \quad (24)$$

将式(20)和式(24)代入式(16), 可得到用图1中围岩、断层切向位移表示的总势能函数微分形式:

$$(Hdv_L + Qdv - \Gamma dv_r)(1 + \tan^2\alpha) = 0. \quad (25)$$

由于 $(1 + \tan^2\alpha) > 1$, 式(25)两端除以 dv , 再利用式(12)并考虑到 k_L 为常数导得的 $Hdv_H/dv = Q(v) \cdot Q'(v)/k_L$, 可以得到用断层切向形变 v 表示的系统作准静态形变时平衡方程:

$$Q(v) \frac{Q'(v)}{k_L} + Q(v) - J = 0. \quad (26)$$

式中

$$J = \Gamma \frac{dv_r}{dv}. \quad (27)$$

J 为使断层产生单位形变 $dv (> 0)$ 时, 远场边界 $x = L + l$ 处剪力 Γ 做功对围岩-断层半条带系统输入的能量; 而 $(1 + \tan^2\alpha)J$ 为使断层产生单位形变 $dv_L (> 0)$ 时, 半条带表面全部外力做功对围岩-断层半条带系统输入的能量。从导得的式(16)的过程知, 若式(26)中 $J > 0$, 则断层作准静态形变; 若式(26)中 $J = 0$, 则表明无需外力做功, 仅凭系统内部的能量转移, 断层形变便自动加大, 这表明系统处于临界状态, 故可用

$$(1 + \tan^2\alpha)J = 0 \text{ 或 } J = 0 \quad (28)$$

作为判定系统失去准静态或走滑式断层地震的临界条件。

式(10)表示的图3中 $Q(v)$ 曲线软化段上拐点 t 处的形变 v_t 满足 $Q''(v_t) = 0$, 由此可导得软化段上拐点形变 v_t 与 v_0 之间的关系为

$$\frac{v_t}{v_0} = \left(\frac{1+m}{m}\right)^{1/m}. \quad (29)$$

式(29)表明随曲线指数 m 增大, v_t/v_0 变小即 $Q(v)$ 曲线软化段变陡。曲线软化段拐点 t 处的斜率最陡, 断层动力失稳是发生在其 $Q(v)$ 曲线软化段拐点上下的系统行为, 利用式(29)可得式(10)在 v_t 处的各阶导数: $Q(v_t) = \eta v_t$, $Q'(v_t) = -\eta m$, $Q''(v_t) = 0$, $Q'''(v_t) = \eta m(1+m)^2/v_t^2$, 式中

$$\eta = \lambda \exp\left[-\frac{1+m}{m}\right]. \quad (30)$$

利用式(30)和 $Q(v)$ 在 v_t 的各阶导数, 将式(26)中的 $Q(v)$ 和 $Q'(v)$ 在 v_t 处作 Taylor 展开后可得

$$\frac{\eta^2 m(1+m)^2}{2v_t} (v - v_t)^2 + \eta^2 m^2 \left(1 - \frac{k_L}{\eta m}\right) (v - v_t) +$$

$$\eta^2 m v_i \left(\frac{k_L}{\eta m} - 1 \right) - J + O(v - v_i)^3 = 0. \quad (31)$$

记

$$K = \frac{k_L}{\eta m} = \frac{Gb}{gBm} \exp\left(\frac{1+m}{m}\right). \quad (32)$$

K 为围岩刚度 k_L 与 $|Q'(v_i)| = \eta m$ 的比值, 为重要系统参数. 以下讨论 K 在 1 附近取值的情况, 这样 $(v - v_i)^2$ 项是级数式 (31) 中系数不为 0 的最低项次. 由突变理论中的确定性法则, 式 (31) 对应的是折迭突变模型^[14] 的平衡方程, 故可略去 $(v - v_i)^3$ 以上的项来讨论系统的稳定性. 利用式 (32), 可将式 (31) 化为无量纲形式:

$$\left[\frac{v - v_i}{v_i} + \frac{m}{(1+m)^2} (1-K) \right]^2 - \frac{m^2}{(1+m)^4} (1-K)^2 - \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} - \frac{2KJ}{Q(v_i)(1+m)^2} = 0. \quad (33)$$

作变量代换

$$\begin{cases} w = \frac{v - v_i}{v_i} + \frac{m}{(1+m)^2} (1-K), \\ a = -\frac{m^2}{(1+m)^4} (1-K) - \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} - \frac{2KJ}{Q(v_i)(1+m)^2}. \end{cases} \quad (34)$$

可将式 (33) 化成折迭突变平衡方程的正则形式:

$$w^2 + a = 0, \quad (35)$$

式中, w 是状态变量; a 是控制变量, 式 (35) 的图形为一抛物线. $a = 0$ (或 $K = 1$ 轴) 将抛物线分成上、下两枝, 如图 5. 式 (34) 中第 1 式将 $Q(v)$ 曲线上

$$v^* = \left[1 - \frac{m(K-1)}{(1+m)^2} \right] v_i \quad (36)$$

的点映射到图 5 中的 $w = 0$ 时的 $K = 1$ 轴上. 显然, v^* 值随 K 而变, $K = 1$ 时, $v^* = v_i$.

注意到 $dv_r = dv_L + dv$ 以及且 k_L 为常数, 由式 (12), 式 (27) 中的能量输入率可以表示为

$$J = \Gamma \frac{dv_r}{dv} = \Gamma \frac{Q'(v) + k_L}{k_L}. \quad (37)$$

图 3 中 $Q(v)$ 曲线软化段上 v 增大时, 斜率 $Q'(v)$ 从 $Q(v_c) = 0$ 起负向增大, 在拐点处达到负极大值 $Q'(v_i)$. 拐点以下 $Q'(v)$ 由负极大值向 0 变化, 故在软化段某些区段上式 (37) 中能量输入率 J 为正值. 在这样的区段上式 (33) 可写为两个式子:

$$\begin{aligned} \frac{v - v_i}{v_i} + \frac{m}{(1+m)^2} (1-K) &= w_1 = \\ &= -\frac{1}{(1+m)} \sqrt{\frac{m^2}{(1+m)^2} (1-K) + 2(1-K) + \frac{2KJ}{Q(v_i)}}, \end{aligned} \quad (38)$$

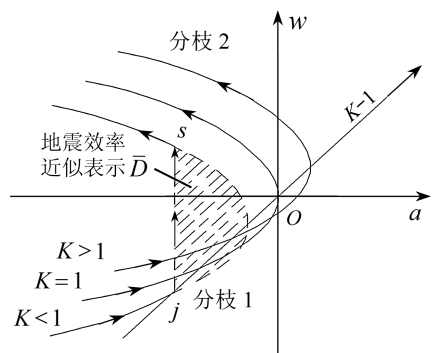


图 5 折迭突变模型的平衡曲面

$$\frac{v - v_t}{v_t} + \frac{m}{(1 + m)^2}(1 - K) = w_2 = \frac{1}{(1 + m)} \sqrt{\frac{m^2}{(1 + m)^2}(1 - K) + 2(1 - K) + \frac{2KJ}{Q(v_t)}}. \quad (39)$$

式(38)和(39)是图5围岩-断层系统准静态平衡路径的下、上两个分枝,它们分别对应于图3中 $Q(v)$ 曲线峰后软化段拐点 t 以上和以下的某区段.断层地震发生系统平衡位置最终是要到达图5中分枝2的.式(35)对于不为0的同一个 a 值,系统有2个平衡位置与其对应,当 K 值给定,若平衡位置 w 由分枝1经过 $K-1$ 轴过渡到分枝2(即两条准静态平衡路径可以延伸到 $K-1$ 轴),断层将以准静态形式破裂.否则,平衡位置 w 将以跳跃形式到达分枝2,断层以动力失稳形式破裂.

4 折迭突变模型对断层地震的描述

4.1 断层失稳与断层失稳半错距

$Q(v)$ 曲线上由式(36)定义的 v^* 点位于 $w=0$ 的 $K-1$ 轴上.对于固定的 K 值,在分枝1上当 $v < v^*$ 且 v 增大时,即图3软化段上 $Q'(v)$ 减小,式(37)中的 J 也相应减小,由式(34)和(38)知, a 与 w_1 由负向0变化,平衡位置 (a, w_1) 沿图5分枝1右行;在分枝2上 $v > v^*$ 且 v 增大时,图3软化段上 $Q'(v)$ 增大,式(37)中的 J 也相应增大,由式(34)和(39)知, a 负向增大而 w_2 正向增大,即平衡位置 (a, w_2) 沿图5分枝2左行.下面来看 K 取不同的值时, v 趋近和离开 v^* 点,即平衡位置 (a, w) 趋近和离开 $K-1$ 轴时的情况.

① $k_L < -Q'(v_t)$ 即 K 取小于1的值

平衡位置沿分枝1右行,可以证明分枝1上存在某点 $w_j (< 0)$ 或小于 v^* 的某点 v_j 处,有

$$-Q'(v_j) < -Q'(v^*) < -Q'(v_t),$$

这会使得

$$Q'(v_j) + k_L = 0 \quad (40)$$

也即Cook失稳准则^[15-16]得到满足,这导致式(37)中

$$\frac{dv_r}{dv} = 0 \quad (41)$$

或 $J=0$,即式(28)得到满足,系统处于临界状态.由前文 $dp_r/dt = d\sqrt{v_r^2 + u_r^2}/dt = c_1 > 0$,可得 $dv_r/dt > 0$,也即 $dv_r (> 0)$ 是大于0的微量.系统位置在不包括原点的准静态平衡路径1上变化时, dv_r 与 dv 是同阶量.式(41)中 $dv_r/dv = 0$ 或

$$\frac{dv}{dv_r} \rightarrow \infty \quad (42)$$

表明,在 v_j 处位移 v 将有一个突然的(有限)改变量而使平衡位置脱离分枝1.由于除 $a=0$ 之外,同一 a 值 w 有两个状态与之对应,故平衡位置将从分枝1上的 w_j 点跳到分枝2上 w_s 点.式(42)在物理上表示一个任意小且逐渐变化的远场位移,会引起断层一个突然的有限位移量,也称为Stuart^[1-2]断层失稳准则.需要指出,由式(37)及图3、图5知,在分枝2的 w_s 处有与式(40)相同的关系式

$$Q'(v_s) + k_L = 0 \quad (43)$$

成立. 由式(28) $J = 0$ 和式(38)和(39)可得跳跃前后的形变(近似)值为

$$\begin{cases} v_j = \left\{ 1 - \frac{1}{1+m} \left[\frac{m(1-K)}{1+m} + \sqrt{\frac{m^2}{(1+m)^2} (1-K)^2 + 2(1-K)} \right] \right\} v_i, \\ v_s = \left\{ 1 - \frac{1}{1+m} \left[\frac{m(1-K)}{1+m} - \sqrt{\frac{m^2}{(1+m)^2} (1-K)^2 + 2(1-K)} \right] \right\} v_i. \end{cases} \quad (44)$$

图5中 w 的跳跃幅值

$$\Delta w = \frac{v_s - v_j}{v_i} = \frac{2}{1+m} \sqrt{\frac{m^2}{(1+m)^2} (1-K)^2 + 2(1-K)}. \quad (45)$$

平衡位置跳跃表示断层地震发生, 式(45)中的 $\Delta v = v_s - v_j$ 便是断层失稳半错距沿 y 轴方向的分量. 由几何关系式(8) $v = \gamma l$, 可得 $\gamma_j = v_j/l$, $\gamma_s = v_s/l$. 由应变圆可知, 断层失稳前后断层内最大切应变为

$$\begin{cases} \gamma_{j\max} = \gamma_j \sec \alpha = \gamma_j \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}, \\ \gamma_{s\max} = \gamma_s \sec \alpha = \gamma_s \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}. \end{cases} \quad (46)$$

由式(8)及式(45)和(46), 可得走滑式断层地震的最大半错距

$$\begin{aligned} \Delta \rho_{l\max} &= \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot \Delta v = \\ &= \frac{2\sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot v_i}{1+m} \sqrt{\frac{m^2}{(1+m)^2} (1-K)^2 + 2(1-K)}. \end{aligned} \quad (47)$$

从式(47)看到, m 固定时, K 值小, 且图2中倾角 $\alpha = \arctan[(\sigma_x - \sigma_y)/(2\tau)]$ 大, 则断层地震的最大半错距 $\Delta \rho_{l\max}$ 大.

② $k_L \geq -Q(v_i)$ 即 K 取大于或等于1的值

$k_L = -Q(v_i)$ 或 $K = 1$ 时, 式(38)和(39)成为

$$\begin{cases} \frac{v - v_i}{v_i} = w_1 = -\frac{1}{1+m} \sqrt{\frac{2J}{Q(v_i)}}, \\ \frac{v - v_i}{v_i} = w_2 = -\frac{1}{1+m} \sqrt{\frac{2J}{Q(v_i)}}. \end{cases} \quad (48)$$

平衡位置沿分枝1右行, J 由正而减小, 当 $v = v_i$ 时, 据条件 $k_L = -Q(v_i)$, 由式(40)、式(28) $J = 0$ 知, 式(41)也得到满足. 但由于这时式(48)中 $w_1 = w_2 = 0$, 图5中分枝1、2在 origin 相连, 平衡位置 w 平稳(无跳跃)地经原点过渡到分枝2, 断层准静态破裂, 不发生地震.

$k_L > -Q(v_i)$ 或 $K > 1$ 时, 断层将准静态破裂, 不发生地震, 限于篇幅, 不再赘述.

4.2 围岩-断层系统的稳定性分析

式(35)关于 w 积分可得折迭突变模型的总势能函数:

$$\Pi = \frac{1}{3} w^3 + aw. \quad (49)$$

图5分枝1上 $w_1 < 0$, 分枝2上 $w_2 > 0$. 由势函数二阶导数 $\partial^2 \Pi / \partial w^2 = 2w$ 知, 在分枝1和分枝2分别有

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial w^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w^2} > 0.$$

由 Dirichlet 势函数二阶导数正负性判别法, 在分枝1上即地震前兆阶段系统平衡状态不

稳定;在分枝 2 上即地震之后系统平衡状态稳定. 在到达平衡状态稳定的分枝 2 后, 系统永远不会再回到状态不稳定的分枝 1 上, 这便是岩体破坏的不可逆性. 通过折迭突变势函数式 (49), 可将长期以来达共认识的关于地震前兆阶段围岩-断层系统处于不稳定状态的认识, 从定性提高到定量描述.

5 断层失稳时围岩弹性能释放量 3 种表示法

5.1 围岩弹性能瞬间释放量的本构曲线表示法

将断层失稳期间能量输入率 $J = 0$ 代入式 (26), 从 v_j 到 v_s 积分再乘上 $(1 + \tan^2 \alpha)$ 后, 可得失稳期间围岩释放的弹性能中超过断层以其内裂纹扩展、连通所消耗的能量以上的部分:

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2 \alpha) \left[\int_{v_j}^{v_s} Q(v) \frac{Q'(v)}{k_L} dv + \int_{v_j}^{v_s} Q(v) dv \right] = \\ (1 + \tan^2 \alpha) \left[\frac{1}{2k_L} (Q_s^2 - Q_j^2) + \int_{v_j}^{v_s} Q(v) dv \right] = \\ - (1 + \tan^2 \alpha) \left[\frac{1}{2k_L} (Q_j^2 - Q_s^2) - \int_{v_j}^{v_s} Q(v) dv \right] = \Delta E + \tan^2 \alpha \cdot \Delta E, \end{aligned} \quad (50)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta E = - \left[\frac{1}{2k_L} (Q_j^2 - Q_s^2) - \int_{v_j}^{v_s} Q(v) dv \right], \\ \tan^2 \alpha \cdot \Delta E = - \tan^2 \alpha \left[\frac{1}{2k_L} (Q_j^2 - Q_s^2) - \int_{v_j}^{v_s} Q(v) dv \right] \end{cases} \quad (51)$$

分别为围岩释放的应变能中的切应力应变能部分和正应力应变能部分.

由于是释放能量, 式 (51) 中的 $\Delta E < 0$. ΔE 的几何形式是将图 3 纵轴左侧围岩释放的弹性能面积 $jsv_{L_s} v_{L_j} j$ 平移到纵轴右侧 j 点, 再减去断层破裂消耗的能量面积 $jsv_{L_s} v_{L_j} j$ 后得到的图 3 中的阴影区面积. $(1 + \tan^2 \alpha) \Delta E$ 中一小部分消耗于断层岩体动力破碎, 大部分将转变成围岩自身的动能, 从而使得在围岩与断层交界面上, 因 H 于瞬间从 H_j 降到 H_s 和 N 于瞬间从 N_j 降到 N_s 的突然卸载而发生剧烈振动, 并以剪切波和纵波的形式向远方传播. 式 (51) 表明, $Q(v_j)$ 大即围压大, k_L 小, $Q(v)$ 曲线软化段下降迅速即曲线指数 m 大及 α 大, 则上述地震效应剧烈. 由式 (51) 可进而求取图 1 断层失稳时整个围岩所释放的弹性能.

5.2 弹性能瞬间释放量的围岩弹性势能变化率曲线表示法

式 (16) 两端除以 $(1 + \tan^2 \alpha) dv = \sec^2 \alpha \cdot dv$, 再由式 (24) 和 (27) 可得

$$\frac{dU_L^e}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha + \frac{dU_L^p}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha - J = 0. \quad (52)$$

比较式 (26) 知, 式 (52) 中,

$$\frac{dU_L^e}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha = \frac{Q(v)}{k_L} \frac{dQ(v)}{dv}, \quad \frac{dU_L^p}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha = Q(v), \quad (53)$$

式 (53) 中的第 1 式称为围岩关于断层形变或系统状态变量 v 的能量变化率. 注意到 $v = 0$ 和 v_c 处, 由于 $Q(0) = 0$, $Q'(v_c) = 0$, 故式 (53) 中 $dU_L^e(0)/dv = 0$, $dU_L^e(v_c)/dv = 0$; 在图 3 中 $Q(v)$ 曲线上 j 点、 s 点, 即式 (40)、式 (43) 得到满足时, 由式 (53) 中第 1 式可得

$$\frac{dU_L^e(v_j)}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha = -Q(v_j), \quad \frac{dU_L^e(v_s)}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha = -Q(v_s). \quad (54)$$

将断层荷载-形变关系式(10)代入式(53)中的第1式,再除以 $k_L v_0$ 后可得无量纲关系式

$$\frac{d\bar{U}_L^c}{d\bar{v}} \Big/ \sec^2 \alpha = \frac{dU_L^c}{dv} \Big/ (\sec^2 \alpha \cdot k_L v_0) = \frac{\lambda^2}{k_L^2} \left[\frac{v}{v_0} - m \left(\frac{v}{v_0} \right)^{m+1} \right] \exp \left[-2 \left(\frac{v}{v_0} \right)^{m+1} \right], \quad (55)$$

取 $\lambda/k_L = 5, m = 1.2$, 据式(55)用 Matlab 软件绘得围岩关于 $\bar{v} = v/v_0$ 的无量纲弹性能变化率曲线,即 $d\bar{U}_L^c/(d\bar{v} \cdot \sec^2 \alpha) - \bar{v}$ 曲线如图6. 在图中断层形变的 \bar{v}_c 左侧 $d\bar{U}_L^c/(d\bar{v} \cdot \sec^2 \alpha) > 0$, 这表明围岩在聚集能量 \bar{S} , 处于地震孕育阶段; 在 \bar{v}_c 右侧, $d\bar{U}_L^c/(d\bar{v} \cdot \sec^2 \alpha) < 0$, 围岩释放能量, 系统处于地震前兆阶段.

对于断层, 由式(53)中的第2式知, 在 j 点和 s 点有

$$\frac{dU_L^p(v_j)}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha = Q(v_j), \quad \frac{dU_L^p(v_s)}{dv} \Big/ \sec^2 \alpha = Q(v_s). \quad (56)$$

断层始终在吸收或消耗能量, 总有 $dU_L^p/(dv \cdot \sec^2 \alpha) = Q(v) > 0$, 只是由于峰后软化特性, $v > v_c$ 后断层的能量吸收率 $dU_L^p/dv = Q(v)$ 不断减小. 将断层荷载 - 形变关系式(10)除以 $k_L v_0$ 后可得无量纲关系式:

$$\bar{Q}(\bar{v}) = \frac{\lambda}{k_L} \frac{v}{v_0} \exp \left[- \left(\frac{v}{v_0} \right)^m \right]. \quad (57)$$

对式(57)用 Matlab 软件绘得 $\bar{Q}(\bar{v})$ 曲线叠加在图6上, 再绕 \bar{v} 轴翻转 180° , 由式(54)、式(56)易知, 两条曲线在 $(\bar{v}_j, -\bar{Q}(\bar{u}_j))$ 点和 $(\bar{v}_s, -\bar{Q}(\bar{u}_s))$ 点相交. 在 (\bar{v}_c, \bar{v}_j) 的地震前兆阶段, $-d\bar{U}_L^c/d\bar{v} < d\bar{U}_L^p/d\bar{v}$, 需要外力做功 (即 $J > 0$) 断层才能形变 ($d\bar{v} > 0$); 在 \bar{v}_j 处, $-d\bar{U}_L^c/d\bar{v} = d\bar{U}_L^p/d\bar{v}$, 式(52)中 $J = 0$, 系统处于临界状态; 在 (\bar{v}_j, \bar{v}_s) 区段, $-d\bar{U}_L^c/d\bar{v} > d\bar{U}_L^p/d\bar{v}$, 无须外力做功, 断层形变跳跃式增大, 系统处于地震状态. $d\bar{U}_L^c/(d\bar{v} \cdot \sec^2 \alpha)$ 与 $-d\bar{U}_L^p/(d\bar{v} \cdot \sec^2 \alpha)$ 曲线围成的阴影区面积记为 $\Delta \bar{E}$, 而

$$\sec^2 \alpha \Delta E = \sec^2 \alpha \Delta \bar{E} k_L v_0^2 \quad (58)$$

即为地震阶段围岩释放的弹性能中超过断层破裂消耗能量以上的部分, 这部分弹性能将转变成系统的动能, 造成断层动力破碎和围岩剧烈震动. 由于是释放能量, $\Delta \bar{E} < 0$, 这与图6中阴影区面积位于 \bar{v} 轴下方一致.

从图6看到, 在 \bar{v}_s 之后 $-d\bar{U}_L^c/d\bar{v} < d\bar{U}_L^p/d\bar{v}$, 即围岩释放的弹性能小于断层形变要耗散的能量, 必须外力做功补充能量 (即 $J > 0$), 断层才能继续形变, 系统逐步恢复准静态, 属震后阶段. 所以容易判定 v_s 为系统失稳的终止点, 并且 $J_s = 0$.

图6以几何形式阐明了4.1和4.2节中所作的全部数学描述. 注意到图6中 $\bar{Q}(\bar{u})$ 曲线 j 点、 s 点处的倾角 $\bar{\eta}_j = \bar{\eta}_s$, 并与图3中 $Q(u)$ 曲线上 j 点、 s 点处的倾角 $\eta_j = \eta_s$ 作比较, 可以直观地知晓从式(20)和(51)的所有数学运算正确, 且全文前后相一致.

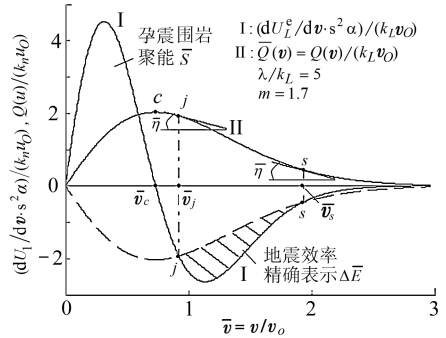


图6 断层地震围岩(无量纲)弹性能释放量图解

5.3 围岩弹性能瞬间释放量的折迭突变平衡路径表示法

平衡位置 w 从 j 点沿图 5 中 js 直线段跃到 s 点时的围岩弹性能释放量可用系统势函数式 (49) 表示为

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \int_j^s d\Pi = \int_j^s \left[\frac{\partial\Pi}{\partial w} dw + \frac{\partial\Pi}{\partial a} da \right] = \\ &= \int_{w_j}^{w_s} (w^2 + a) dw + \int_{a_j}^{a_s} w \cdot da = \\ &= \int_{w_j}^{w_s} (w^2 + a) dw = \frac{w_s^3 - w_j^3}{3} + a_s w_s - a_j w_j.\end{aligned}\quad (59)$$

上式推导时已利用了沿图 7 中 js 直线段 $a_s = a_j, da = 0$ 的条件. 将 $w_j = -w_s, a_j = -w_j^2 = -w_s^2$ 代入式 (59), 并注意到 $w_s > 0$, 可得

$$\Delta\Pi = -\frac{4}{3}w_s^3 (< 0).\quad (60)$$

由于是释放能量, $\Delta\Pi < 0$. 由式 (33), 可得与式 (58) 中 ΔE 相当的围岩释放量钢化弹性能表达式:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{(1+m)^2}{2K} Q(v_i) v_i \cdot \Delta\Pi = \\ &= -\frac{2}{3K} Q(v_i) v_i \frac{1}{(1+m)} \left[\frac{m^2}{(1+m)^2} (1-K) + 2(1-K) \right]^{3/2}.\end{aligned}\quad (61)$$

图 7 中 a 是横坐标, w 是纵坐标, 令 $P_1(w, a) = w^2 + a, Q_1(w, a) = 0$; 注意到 P_1, Q_1 在由抛物线 $w^2 + a = 0$ 与直线段 js 连成的逆时针封闭曲线 l_0 围成的区域 $D (> 0)$ 上有一阶连续偏导数, 由 Green 公式

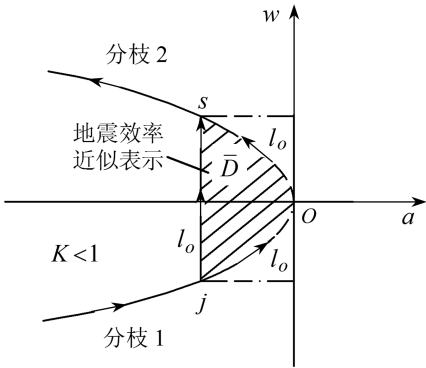


图 7 断层地震围岩弹性能释放量突变理论图解

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \int_j^s d\Pi = \int_{w_j}^{w_s} (w^2 + a) dw = \\ &= -\int_{w_s}^{w_j} (w^2 + a) dw = \\ &= -\oint_{l_0} Q_1 da + P_1 dw = \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial P_1}{\partial a} - \frac{\partial Q_1}{\partial x} \right) da dw = \\ &= -\iint_D 1 \cdot da dw = -\bar{D}.\end{aligned}\quad (62)$$

式 (62) 表明系统平衡位置从 j 点跳到 s 点时释放的弹性能为图 7 中阴影区面积 $\bar{D} (> 0)$ 的负值。

式 (58) 中的 ΔE 等于式 (50) 中的 ΔE , 图 6 中的阴影区面积同图 3 中的阴影区面积. 图 3 阴影区面积是分别按围岩形变步调 v_L 和断层的形变步调 v 给出的地震效率精确表示, 而图 6 阴影区面积是按断层的形变步调 v 给出的地震效率精确表示; 图 7 是按断层的形变步调 v 给出的断层地震效率近似值, 这是因为由精确平衡方程式 (26) 导得由式 (33) 表示的近似平衡方程时, 已略去了 $(v - v_L)$ 的 3 次方以上项。

6 结 论

① 折迭突变展示出的包括系统稳定性描述在内的全部性状,与走滑式断层地震的主要特征——相对应。这些特征是:(a) 地震前兆阶段岩体系统处于不稳定平衡状态;(b) 断层动力失稳前后系统只有 2 个平衡状态,即前兆阶段的不稳定平衡状态和该状态失稳后又达到的新的稳定平衡状态;(c) 岩体破坏的不可逆性。折迭突变模型还可对断层失稳起、终点位置、断层失稳错距、围岩弹性能释放量作恰当描述。走滑式断层地震强度与围压、围岩与断层的刚度比 $K = k_L / |Q'(v_i)|$ 等有关,围压大、 K 值小、主切应力轴与发震断层面夹角 α 大,则地震强度大。

② 用 Matlab 绘出的围岩弹性势能变化率曲线蕴涵了丰富的信息,与断层的荷载-形变曲线一起,可使得对地震的孕育、发生及成灾的演化规律所作的数学描述图像化。所给出 3 种断层失稳围岩弹性能释放量图解的性状、特征可相互印证。

③ “断层形变增大时所需外界对围岩-断层系统的能量输入率为 0”的断层失稳概念同时包含 Stuart 失稳准则和 Cook 失稳准则,以能量输入率 $J \rightarrow 0$ 作为断层失稳临界条件有深刻的物理意义。

参考文献:

- [1] Stuart W D. Quasi-static earthquake mechanics[J]. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 1979, **17**(6): 1115-1120.
- [2] Stuart W D. Strain softening instability model for the San Ferrando[J]. *Science*, 1979, **203**(6): 907-910.
- [3] Rice J R. New perspectives in crack and fault dynamics[C]// Aref H, Phillips J W. *Mechanics for a New Millennium (Proceedings of the 20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Chicago, 27 Aug ~ 2 Sept 2000)*. Kluwer Academic Publishers, 2001: 1-23.
- [4] Rice J R. Constitutive relation for fault slip and earthquake instability[J]. *Geophys*, 1983, **83**(3): 443-475.
- [5] Ben-Zion Y. Dynamic rupture in recent models of earthquake faults[J]. *J Mech Phys Solids*, 2001, **49**(6): 2209-2244.
- [6] Kanamori H, Brodsky E E. The physics of earthquakes[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2004, (7): 1429 - 1496.
- [7] WEI Fu-shen, LI Ming. Cepstrum analysis of seismic source characteristics[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2003, **16**(1): 50-58.
- [8] WANG Run-qiu, JIA Xiao-feng, HU Tian-yue. The precise finite difference method for seismic modeling[J]. *Applied Geophysics*, 2004, **1**(2): 69-74.
- [9] 殷有泉, 郑顾团. 断层地震的尖角型突变模型[J]. *地球物理学报*, 1988, **31**(6): 657-664.
- [10] 杨修信, 殷有泉, 康仲远, 等. 压扭性断层地震的 Cusp 型突变分析[J]. *中国科学, B 辑*, 1994, **24**(6): 656-663.
- [11] Karcinovic D. Statistical aspects of the continuous damage theory[J]. *Int J Solids Structures*, 1982, **18**(3): 551-562.
- [12] 卡恰诺夫 L M. 塑性理论基础[M]. 周承侗 译. 北京: 人民教育出版社, 1982: 147-148.
- [13] 郑雨天. 岩石力学的弹塑性理论[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1988.
- [14] 凌复华. 突变理论——历史、现状和展望[J]. *力学进展*, 1984, **14**(4): 289-403.

- [15] Cook N G W. The failure of rock[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1965, 2(3):389-403.
- [16] 陈颙. 地壳岩石的力学性能[M]. 北京:地震出版社,1988.

Fold Catastrophe Model of Strike-Slip Fault Earthquake

PAN Yue¹, LI Ai-wu²

- (1. *College of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266520, P. R. China;*
2. *School of Science, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266520, P. R. China*)

Abstract: By using differential form of potential energy function, and taking the effect of work applied by external force in far field into account, the mechanism of strike-slip fault earthquake was analyzed. The researching indicates that, in catastrophe theory the characters displayed by fold catastrophe model correspond to the primary characteristics of strike-slip fault earthquake one by one. Fold catastrophe can describe the position of starting point and end point of fault failure, distance of fault dislocation etc, including the description about the stability of surrounding rock-fault system before and after the earthquake. Two different illustrations about ~ elastic energy releasing amount of the surrounding rock with fault failure were shown, their primary characteristics can demonstrate each other. The intensity of strike-slip fault earthquake was related to the surrounding rock press, and to the stiffness ratio of surrounding rock and fault etc. The bigger the surrounding rock press was, the smaller stiffness ratio was. The bigger the included angle between the tangential stress axis to causative fault surface was, the bigger the earthquake intensity was.

Key words: fault earthquake; fold catastrophe model; end point of failure; failure criterion; energy import rate; elastic energy releasing amount