

竖板表面温度的变化对磁流体 动力学流动的影响*

I·A·阿巴斯^{1,2}, G·帕拉尼³

- (1. 纳季兰大学 科学人文学院 数学系, 纳季兰, 沙特阿拉伯王国;
- 2. 索哈杰大学 科学学院 数学系, 索哈杰-82524, 埃及;
- 3. S. S. 公立艺术学院 数学系, 蒂鲁德尼-631209, 泰米尔纳德邦, 印度)

(周哲玮推荐)

摘要: 在横向磁场作用下, 不可压缩的粘性导电流体, 流经一个半无限的竖板, 完成了壁面温度变化对磁流体动力学流动的分析. 假定由粘性耗散和感应磁场产生的热量可以忽略不计. 无量纲的控制方程为二维非稳态耦合的非线性方程. 结果显示, 磁场参数对空气和水的速度有着抑制作用.

关键词: 有限元; 竖板; 摩擦力; 速度; Nusselt 数

中图分类号: O34 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.006

符号说明

a	常数	T'_{∞}	远离平板时的流体温度
B_0	磁感应	T'_w	板面温度
g	重力加速度	t'	时间
Gr	热 Grashof 数	t	无量纲时间
M	磁场参数	u, v	分别为 x, y 方向的速度分量
Nu_x	无量纲的局部 Nusselt 数	U, V	分别为 X, Y 方向的无量纲速度分量
\overline{Nu}	无量纲的平均 Nusselt 数	x	沿板方向的空间坐标
Pr	Prandtl 数	X	沿板方向的无量纲空间坐标
T'	温度	y	垂直板方向的空间坐标
T	无量纲温度	Y	垂直板方向的无量纲空间坐标
α	热传导系数	ν	动粘度
β	热膨胀体积系数	σ	电导率
τ_x	局部摩擦力	ρ	密度

* 收稿日期: 2009-03-23; 修订日期: 2009-11-24

作者简介: Ibrahim A. Abbas (E-mail: ibrabbas7@yahoo.com);

G. Palani (联系人, E-mail: gpalani32@yahoo.co.in).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

$\bar{\tau}$ 平均摩擦力

脚 标

w 壁面条件 ∞ 自由流条件

引 言

自然对流在自然界中很常见,它们在科技界有着广泛的应用.在不同条件下流经竖板的研究成果已有很多.但该分析方法还无法解决流经半无限竖板时二维非稳态的自由对流.先进的数值方法的出现,以及计算机技术的发展,为解决这类难题铺平了道路.流经半无限竖板的非稳态自然对流,首先由 Hellums 和 Churchill^[1]利用显式的有限差分法进行求解.由于显式有限差分格式自身的缺陷,Soundalgekar 和 Ganesan^[2]采用一种更为有效的隐式有限差分格式. Soundalgekar 和 Ganesan^[3]采用隐式格式得到了竖板上有质量传递时,自由对流的瞬态数值解. Takhar 等^[4]采用 Crank-Nicolson 型隐式有限差分格式,研究了流经半无限竖板表面温度变化时的瞬态自由对流.

在很多实际应用中,磁场对不可压缩粘性导电流体有着重要的影响,如人造纤维和尼龙制造中的塑料挤压,原油的净化和纺织工业等.在生产线的工业生产过程中,一些聚合材料的细丝或薄片的冷却是重要的.导电流体在有磁场作用时,通过拉丝等可以有效地控制其冷却率,达到最终获得产品所要求的特性.

磁流体动力学(MHD)的研究,在农业、工程和石油工业中起着重要的作用.关于磁场影响下的自由对流问题,由于其在地球物理学和天体物理学中的应用,引起了众多研究者的兴趣.在地球物理成份研究、原油的探测和热的回收、以及核废料的地下贮存中,该问题都有着重要的应用.磁流体动力学本身也有实际应用,例如,利用液态钠和感应流量计,决定了流体在垂直运动方向和磁场方向间的势能差,来处理核反应堆的冷却问题.

Soundalgekar 等^[5]就横向磁场作用下竖板的 Stokes 问题,分析了对自由对流的影响. Sacheti 等^[6]在一个有常热通量冲击起动的竖板上,得到了非稳态 MHD 自由对流问题的精确解. Shanker 和 Kishan^[7]讨论了当冲击起动竖板温度发生改变或者有常热通量时,传质对 MHD 的影响.在有磁场的时候,就热的浮力影响和物质扩散的综合作用,Elbashbeshy^[8]研究了沿着竖板的传热和传质问题. Ganesan 和 Palani^[9]用有限差分法,得到了 MHD 流过半无限等温竖板时非稳态的数值解.

近年来,很多研究者就横向磁场对不可压缩粘性导电流体的流动作了广泛的研究.然而,磁流体动力学半无限竖板上的非稳态自然对流问题在文献中仍未有讨论.因此,我们用有限元法,就表面温度变化时,提出了 MHD 流经半无限竖板时的瞬态自由对流解.

1 数学分析

考虑不可压缩的粘性流体,流经半无限竖板时的二维非稳态流动.假设在能量方程中,粘性耗散可以忽略不计.同时,先假设平板和流体的温度是一样的.当时间 $t' > 0$ 时,平板的温度将突然上升,并保持在一个更高的温度, $T_w'(x) = T_\infty' + \alpha x^n$. x 轴为沿平板方向(板前缘处在向上方向), y 轴为垂直平板方向.沿 y 轴作用着一均匀的横向磁场.同时假设,感应磁场和粘性耗散的影响可以忽略不计.则在通常的 Boussinesq 近似下,边界层流动由以下方程控制:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}. \quad (3)$$

初始-边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} t' \leq 0: \quad u = 0, v = 0, T' = T'_\infty, \\ t' > 0: \quad u = 0, v = 0, T' = T'_w + ax^n \quad (y = 0), \\ \quad \quad \quad u = 0, T' = T'_\infty \quad (x = 0), \\ \quad \quad \quad u \rightarrow 0, T' \rightarrow T'_\infty \quad (y \rightarrow \infty). \end{array} \right. \quad (4)$$

引入无量纲量

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{uL}{\nu} Gr^{-1/2}, V = \frac{vL}{\nu} Gr^{-1/4}, t = \frac{\nu t'}{L^2} Gr^{1/2}, \\ T_w(x) = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w(L) - T'_\infty}, Gr = \frac{g\beta L^3 (T'_w(L) - T'_\infty)}{\nu^3}, \\ Pr = \frac{\nu}{\alpha}, M = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho\nu} Gr^{-1/2}. \end{array} \right. \quad (5)$$

控制方程可以简化为如下形式:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = T + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - MU, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \quad (8)$$

相应的无量纲形式的初始-边界条件如下给出:

$$\left\{ \begin{array}{l} t \leq 0: \quad U = 0, V = 0, T = 0 \quad (\text{对所有 } y), \\ t > 0: \quad U = 0, V = 0, T = X^n \quad (Y = 0), \\ \quad \quad \quad U = 0, T = 0 \quad (X = 0), \\ \quad \quad \quad U \rightarrow 0, T \rightarrow 0 \quad (Y \rightarrow \infty). \end{array} \right. \quad (9)$$

2 有限元法

在初始-边界条件(9)下,控制方程(6)至(8)是非稳态、耦合的和非线性的.用有限元法(FEM)数值地求解这些方程.在有限元法中,控制方程的积分区域被分成由两组平行于坐标轴的线条组成的矩形网格.这里,积分区域为以 $X_{\max}(=1.0)$ 和 $Y_{\max}(=14.0)$ 为边组成的矩形,其中 Y_{\max} 对应 $Y = \infty$,即离动量-热边界层的外表面足够远.在一些值得注意的点上,即所谓的自由度上,得到了因变量,如速度 U, V 和温度 T 的数值解.得到了无量纲控制方程的弱形式.独立的测试函数集合,由被指定的速度 U, V 和温度 T 组成.控制方程先与独立的权函数相乘,然后在边界的指定范围内进行积分.应用分部积分,并利用散度定理,降低空间导数的阶数,并供

边界条件所应用. 相同的形函数被分段地定义在单元上. 利用 Galerkin 过程, 将未知量 U, V 和 T 及相应的权函数, 用相同的形函数加以近似. 有限元离散的最后一步是, 选择单元类型及与此关联的形函数. 选用 8 节点的四边形单元. 未知场用任一线性形函数 (由 4 个角节点来定义) 或二次形函数 (所有 8 节点的二维四边形单元来定义) 来进行近似. 或者, 未知场用任一线性形函数 (由 3 个角节点来定义) 或二次形函数 (所有 6 节点的二维三角形单元来定义) 来进行近似. 形函数通常用字母 N 来表示, 且通常是插值多项式的系数. 给出有限元每个独立节点的形函数, 并有特性: 在该单元的该节点上其值为 1, 而在其他节点上其值为 0. 我们假设, 在区域 $[-1, 1]$ 上, 主单元有局部坐标. 这里, 我们选用二维四边形单元, 其线性形函数如下:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).$$

二次形函数如下:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta), \quad N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta),$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta), \quad N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta),$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2).$$

接下来我们研究局部的和平均的壁面摩擦力, 局部的和平均的 Nusselt 数. 在无量纲量四边形单元中, 它们给出如下:

$$\tau_x = Gr^{3/4} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad (10)$$

$$\bar{\tau} = Gr^{3/4} \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX, \quad (11)$$

$$Nu_x = - XGr^{1/4} \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{Y=0} / T_{Y=0}, \quad (12)$$

$$\bar{Nu} = - Gr^{1/4} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{Y=0} / T_{Y=0} \right] dX. \quad (13)$$

3 结果和讨论

为了确认数值结果的准确性, 将得到的结果与先前 Takhar 等^[4]的结果进行比较, 如图 1 所示, 其中 $Pr = 0.7$, $M = 0$, $n = 0$. 可以看到, 两者相当一致.

图 2 至图 7 给出了 $X = 1.0$ 处, 对问题中的不同参数值和时间 t , 温度和速度随无量纲坐标 Y 的变化. 可以看出, 温度和速度随着时间增大并达到稳态. 由图 5 可以看出, 气体 ($Pr = 0.7$) 的速度梯度一般都大于水 ($Pr = 7.0$) 的速度梯度. 从物理上来说, 这是真实的, 因为 Prandtl 数的增大, 将引起流体粘性的增大, 使得流体变稠, 从而导致流体速度的下降. 随着 n 值的增大, 平板表面上直到 $X = 1.0$ 处的速度是减小的. 因此, 速度随 n 值的增大而减小.

可以看出, 板前缘附近温度梯度与 n 值的变化正相反. 应归结为沿板的冲击随着 n 值的减

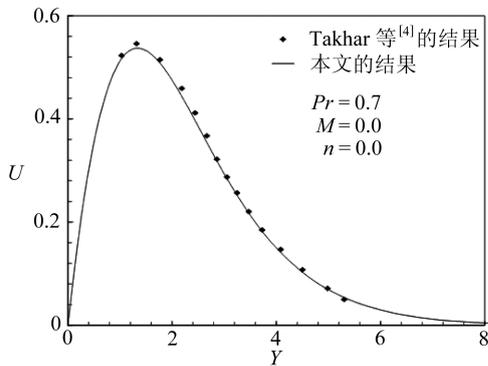


图 1 当 $Pr = 0.7, M = 0.0, n = 0.0$ 时, $X = 1.0$ 处稳态速度分布的比较

小而增大。

由数值结果可以看出, $M = 0$ 时速度值更大. 横向磁场对导电流体的作用, 产生了一个抵抗形式的力, 我们称之为 Lorentz 力. 该力会减慢流体的运动并导致温度的升高. 温度分布随着流体 Prandtl 数的增加而减小.

图 8 至图 10 给出了壁面的局部摩擦力. 壁面的局部剪应力随着 M 值的增大而减小. 这是因为在平板附近, 速度梯度随着 M 值的增大而减小 (见图 6). 还可以看出, 流体的低 Prandtl 数, 相对于高 Prandtl 数, 壁面的局部剪应力更大. 随着 n

的增大, 摩擦力是减小的.

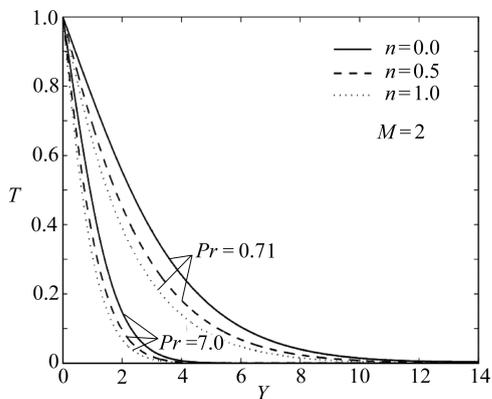


图 2 当 $M = 2$ 时, 对于不同的 Pr 和 n 值, $X = 1.0$ 处的温度随 Y 的变化

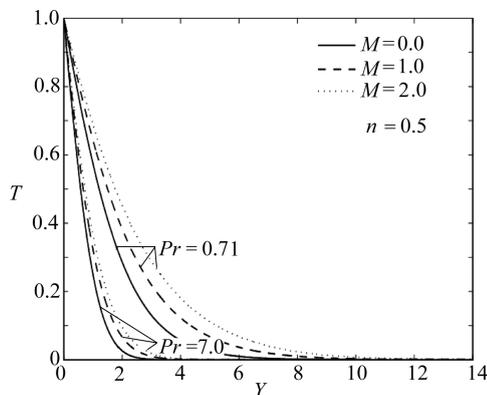


图 3 当 $n = 0.5$ 时, 对于不同的 Pr 和 M 值, $X = 1.0$ 处的温度随 Y 的变化

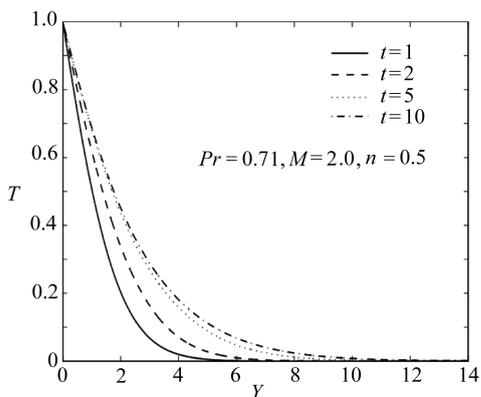


图 4 当 $Pr = 0.71, M = 2.0, n = 0.5$ 时, 对于不同的时间值 t , $X = 1.0$ 处的温度随 Y 的变化

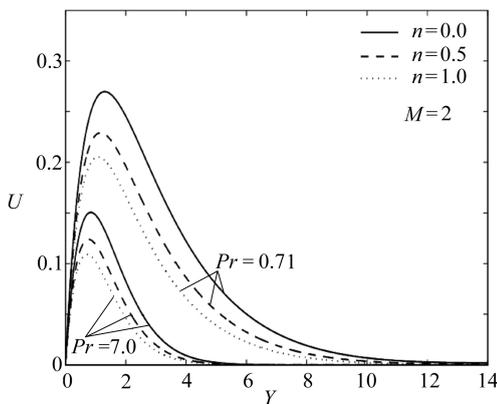


图 5 当 $M = 2$ 时, 对于不同的 Pr 和 n 值, $X = 1.0$ 处的速度随 Y 的变化

图 11 至图 13 给出了不同的指数 n , Prandtl 数 Pr 和磁场参数 M 所对应的局部 Nusselt 数. 可以看出, 局部 Nusselt 数随 n 增大. 然而, 可以看到, 在板缘附近的情况正相反, 局部 Nusselt

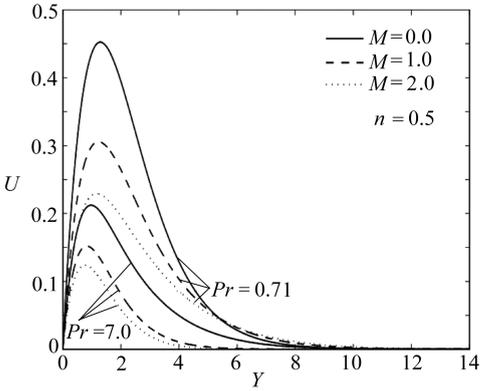


图6 当 $n = 0.5$ 时,对于不同的 Pr 和 M 值,
 $X = 1.0$ 处的速度随 Y 的变化

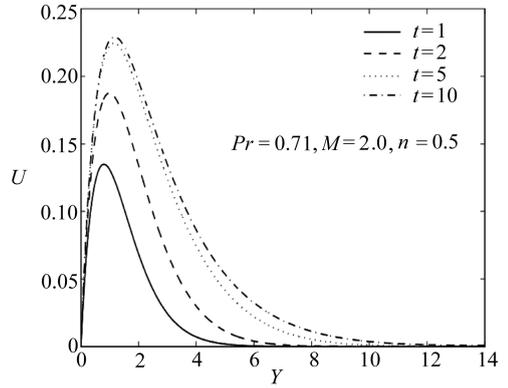


图7 当 $Pr = 0.71, M = 2.0, n = 0.5$ 时,
对于不同的时间值 t , $X = 1.0$ 处的
速度随 Y 的变化

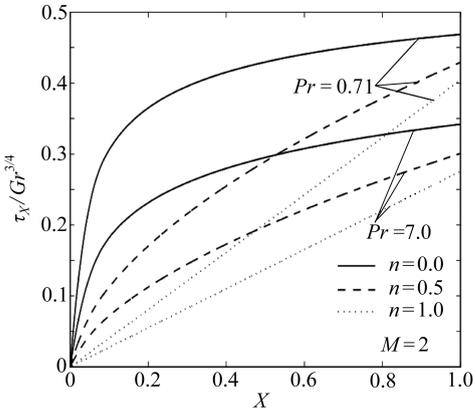


图8 当 $M = 2$ 时,不同 Pr 和 n 值,
局部摩擦力随 X 的变化

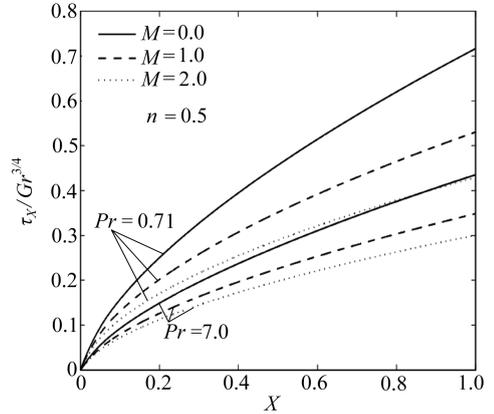


图9 当 $n = 0.5$ 时,不同 Pr 和 M 值,
局部摩擦力随 X 的变化

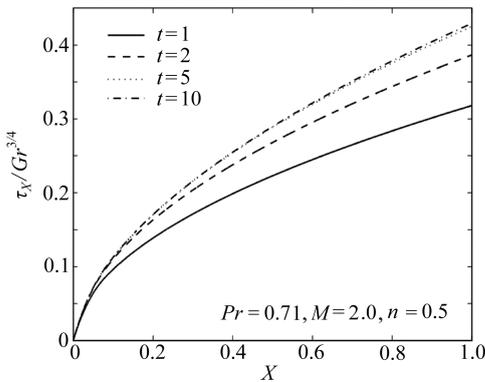


图10 当 $Pr = 0.71, M = 2.0, n = 0.5$ 时,不同
时间值 t , 局部摩擦力随 X 的变化

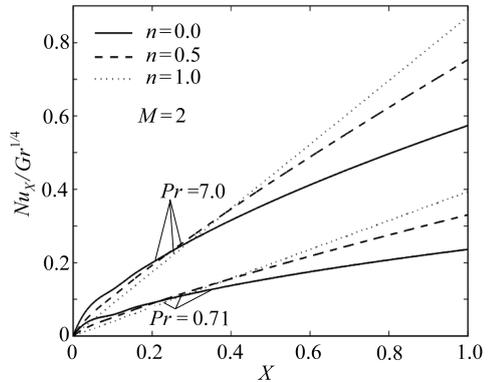


图11 当 $M = 2$ 时,不同 Pr 和 n 值,
局部 Nusselt 数随 X 的变化

数随着 Pr 值增大,局部 Nusselt 数随 M 值而减小。

图14至17给出了壁面的平均摩擦力和 Nusselt 数。壁面的平均摩擦力随着 n 的增大而减小。这是因为平板附近的速度梯度随 n 的增大而减小。壁面平均摩擦力随时间 t 增大,在大的 t

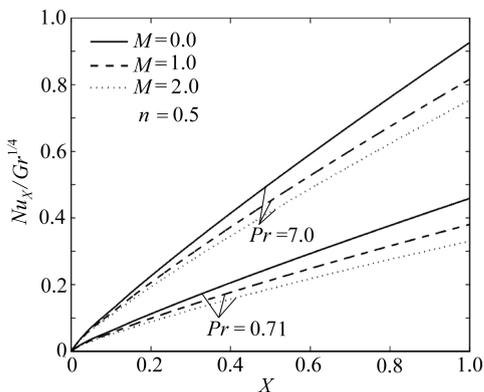


图 12 当 $n = 0.5$ 时,不同 Pr 和 M 值,局部 Nusselt 数随 X 的变化

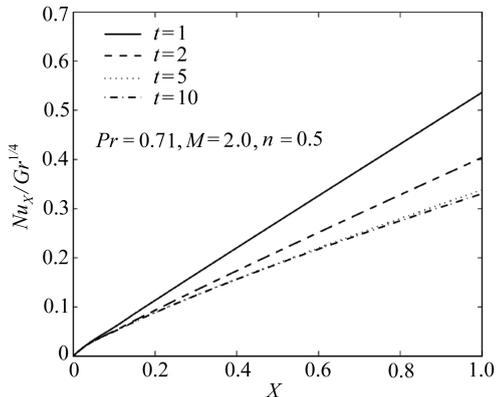


图 13 当 $Pr = 0.71, M = 2.0, n = 0.5$ 时,不同时间值 t ,局部 Nusselt 数随 X 的变化

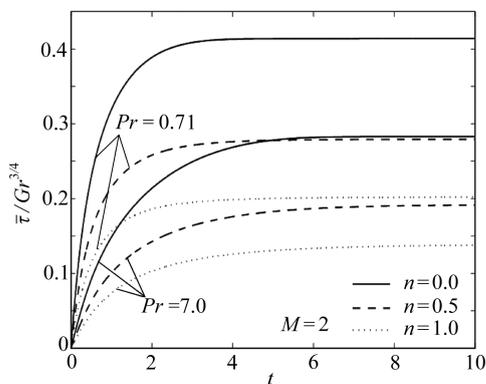


图 14 当 $M = 2$ 时,不同 Pr 和 n 值,平均摩擦力随时间 t 的变化

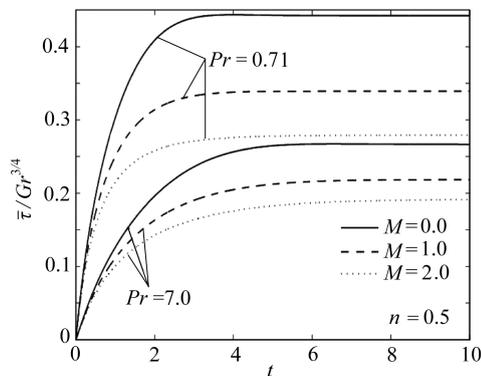


图 15 当 $n = 0.5$ 时,不同 Pr 和 M 值,平均摩擦力随时间 t 的变化

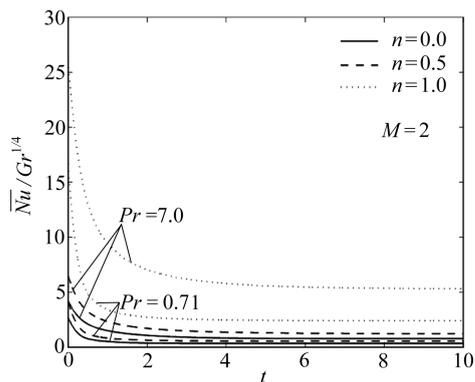


图 16 当 $M = 2$ 时,不同 Pr 和 n 值,平均 Nusselt 数随时间 t 的变化

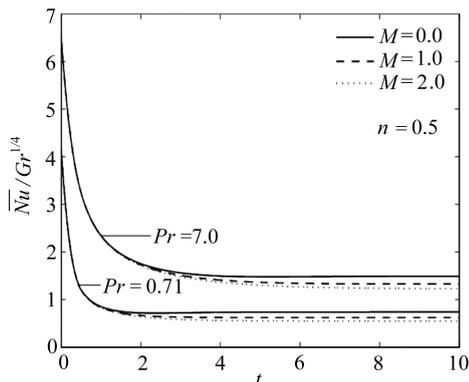


图 17 当 $n = 0.5$ 时,不同 Pr 和 M 值,平均 Nusselt 数随时间 t 的变化

值时达到稳定。在整个瞬态阶段,壁面平均摩擦力随着 Pr 值的增大而减小,平均摩擦力随 M 的增加而减少。

由图 17 可以看到,就 n 来说,初始阶段的平均 Nusselt 数并没有什么差别。这表明最初的传热仅由导电引起,平均 Nusselt 数随时间 t 而减小,且在某一时间后趋于稳定。平均 Nusselt 数

随着 Pr 值的增大而增大,随着 M 值的增大而减小。

4 结 论

本文讨论磁流体动力学中,通过一个表面温度变化的半无限竖板时的非稳态自然对流.将控制的偏微分方程转化为一组无量纲的控制方程,并用有限元法进行数值求解.得到结论如下:

- 1) 磁场参数 M 对速度有抑制作用;
- 2) 速度随着指数 n 的增大而减小;
- 3) 温度随着流体 Pr 值的增大而减小;
- 4) 壁面局部摩擦力随 M 值的增大而减小;
- 5) 传热率随 M 值的增大而减小。

参考文献:

- [1] Hellums J D, Churchill S W. Transient and steady state free and natural convection, numerical solutions: part 1. the isothermal, vertical plate[J]. *A I Ch E Journal*, 1962, **8**(5): 690-692.
- [2] Soundalgekar V M, Ganesan P. Finite difference analysis of transient free-convection on an isothermal flat plate[J]. *Regional J Energy Heat Mass Transfer*, 1981, **3**:219-224.
- [3] Soundalgekar V M, Ganesan P. Finite difference analysis of transient free convection with mass transfer on an isothermal vertical flat plate[J]. *Int J Engg Sci*, 1981, **19**(6): 757-770.
- [4] Takhar H S, Ganesan P, Ekambavanan K, *et al.* Transient free convection past a semi-infinite vertical plate with variable surface temperature [J]. *International Journal for Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 1997, **7**(4): 280-296.
- [5] Soundalgekar V M, Gupta S K, Aranake R N. Free convection effects on the MHD Stokes problem for a vertical plate[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1979, **51**(3):403-407.
- [6] Sacheti N C, Chandran P, Singh A K. An exact solution for unsteady magneto hydrodynamic free convection flow with constant heat flux[J]. *Int Commun Heat Mass Transfer*, 1986, **29**:1465-1478.
- [7] Shanker, Kishan. The effects of Mass transfer on the MHD flow past an impulsively started infinite vertical plate with variable temperature or constant heat flux[J]. *Journal of Energy, Heat and Mass Transfer*, 1997, **19**:273-278.
- [8] Elbashbeshy E M A. Heat and Mass transfer along a vertical plate with variable surface tension and concentration in the presence of magnetic field[J]. *Int J Engg Sci*, 1997, **34**(5): 515-522.
- [9] Ganesan P, Palani G. Numerical solution of unsteady MHD flow past a semi-infinite isothermal vertical plate[C]//*Proceedings of the 6th ISHMT/ASME Heat and Mass Transfer Conference and 17th National Heat and Mass Transfer Conference*. Kalpakkam, India, 2004:184-187.

Effects of Magneto Hydro Dynamic Flow Past a Vertical Plate With Variable Surface Temperature

Ibrahim A. Abbas^{1,2}, G. Palani³

(1. *Mathematics Department, Faculty of Science and Arts,
Najran University, Najran, Kingdom of Saudi Arabia;*

2. *Department of Mathematics, Faculty of Science, Sohag University, Sohag 82524, Egypt;*

3. *Department of Mathematics, S. S. Govt. Arts College, Tirutanni - 631209,
Tamil Nadu, India)*

Abstract: An analysis was performed to study the magneto hydro dynamic flow of an electrical-conducting, viscous incompressible fluid past a semi-infinite vertical plate with variable surface temperature, under the action of transversely applied magnetic field was carried out. The heat due to viscous dissipation and the induced magnetic field were assumed to be negligible. The dimensionless governing equations are unsteady, two-dimensional, coupled and non-linear governing equations. It is found that the magnetic field parameter has a retarding effect on the velocity of air and water.

Key words: finite element; vertical plate; skin friction; velocity; Nusselt number