

# 旋翼/机身非线性气弹耦合 配平及稳定性分析\*

胡新宇<sup>1</sup>, 韩景龙<sup>2</sup>, 喻梅<sup>1</sup>

(1. 中国矿业大学 理学院 力学系, 江苏 徐州 221008;  
2. 南京航空航天大学 振动工程研究所, 南京 210016)

(陈立群推荐)

**摘要:** 根据 Hamilton 原理, 采用中等变形梁理论, 将桨叶离散为 15 自由度梁单元, 用准定常气动模型建立旋翼/刚性机身耦合的有限元非线性方程, 用时间有限元法进行气弹耦合配平计算, 得到桨叶和机身运动的周期解。在此基础上, 引入 Peters 动态入流模型分析耦合系统的稳定性, 并研制相应的计算程序, 可用于桨叶响应、桨叶和桨毂载荷、旋翼操纵等方面的分析计算。算例分析结果与相关文献吻合较好, 且同时满足桨叶响应和配平方程的收敛性要求。

**关键词:** 非线性; 气弹响应; 旋翼/机身耦合; 时间有限元法; 稳定性

**中图分类号:** O343.5; V211.52      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.02.011

## 引 言

直升机旋翼工作时具有气弹耦合现象, 由于桨叶发生中等变形, 其理论建模、气弹响应计算和稳定性分析都属非线性问题。由于响应计算要面对含结构、惯性和气动载荷非线性的时变方程, 选择求解方法尤为重要。常用方法有基于 Floquet 理论的直接积分法、谐波平衡法、时间有限元法等等。直接积分法出现较早, 可求解系统的稳态和瞬态运动, 缺点是计算量过大、对初值非常敏感, 收敛性不佳<sup>[1]</sup>; 谐波平衡法是分析非线性振动的常用方法, 但解的精度受预定谐波项数的限制, 高阶谐波项求解较困难, 不利于后继分析高阶谐波对直升机振动水平的影响。

时间有限元法(TEM)可避免以上不足, 1992 年 Smith 和 Chopra<sup>[2]</sup>采用它计算复合材料桨叶的气弹响应, 1995 年文献[3]使用它进行后掠桨尖旋翼气弹耦合分析及参数优化。本文将时间有限元与空间有限元相结合: 桨叶运动方程是以时间和空间位置为变量的函数, 通过空间有限元离散将桨叶二阶偏微分方程化为以时间为变量的二阶常微分方程, 转换到状态空间后成为一阶微分方程组, 再用时间有限元法化为非线性代数方程组。

在综合考虑旋翼/机身(耦合系统)方面, 1979 年 Warmbrodt 和 Friedmann<sup>[4]</sup>建立了一种耦合系统的显式运动方程, 但并未给出求解方法。Friedmann<sup>[5]</sup>于 1990 年用谐波平衡法求解刚性桨叶/机身耦合振动方程。1999 年文献[6]在设定旋翼操纵的条件下(即不属于耦合配平)计

\* 收稿日期: 2009-02-13; 修订日期: 2010-01-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872089)

作者简介: 胡新宇(1977—), 男, 江苏徐州人, 讲师, 硕士(联系人, E-mail: xyhu@cumt.edu.cn)。

算考虑机身耦合的桨叶响应. 2005 年文献[7]为了简化计算, 直接在机身惯性系下建立桨叶运动方程并进行旋翼稳定性分析. 本文在桨叶旋转系中建立弹性桨叶隐式运动方程, 用 TEM 法通过配平同时得到桨叶响应和修正的旋翼操纵、机身姿态角, 在此基础上转换到机身惯性系分析耦合系统稳定性.

## 1 桨叶动力学方程及响应计算

由于旋翼桨叶具有根部约束多、沿展向结构变化丰富等特点, 适合用有限元法<sup>[8-9]</sup>对其建模, 可方便地考虑桨叶的各种不均匀性(质量、刚度等). 根据中等变形梁理论<sup>[10]</sup>, 桨叶运动方程由 Hamilton 变分原理导出:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T - \delta W) dt = 0, \quad (1)$$

式中,  $\delta U$  为应变能变分,  $\delta T$  为动能变分,  $\delta W$  为气动力虚功.

沿展向把桨叶分为若干梁单元, 得到上述原理的桨叶有限元方程:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{q}^T [\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(t) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{K}}(t) \mathbf{q} - \bar{\mathbf{F}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] dt = \mathbf{0}, \quad (2)$$

式中, 总节点位移向量  $\mathbf{q}(t) = [u_1, v_1, v_1', w_1, w_1', \phi_1, \dots, u_n, v_n, v_n', w_n, w_n', \phi_n]$ ,  $u, v, w, \phi$  分别为桨叶弹性轴上各点在轴向拉伸、摆振、挥舞和扭转自由度上的弹性位移. 由叶素理论, 剖面气动力与桨叶相对风速  $V$  有关. 而  $V$  的分量在从未变形桨叶坐标系转换到变形桨叶系时, 由于梁发生中等变形, 其转换矩阵包含  $\mathbf{q}$  的非线性项<sup>[10]</sup>, 因此  $\delta W$  也含  $\mathbf{q}$  的非线性项. 除  $\mathbf{q}$  的线性项外, 所有式(1)的常数项和非线性项统一放在广义力向量  $\bar{\mathbf{F}}$  中, 便于今后在平衡点展开进行线性化扰动稳定性分析.

为降低方程维数, 节省求解时间, 取桨叶最低数阶在挥舞、摆振和扭转上的固有模态<sup>[11]</sup>, 将式(2)模态降阶为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{p}^T [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}(t) \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}(t) \mathbf{p} - \mathbf{F}(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})] dt = \mathbf{0}. \quad (3)$$

以下用 TEM 法求解桨叶非线性响应.

由桨叶方位角  $\psi = \Omega t$ , 将  $t$  无量纲化为  $\psi$  后, 将式(3)在  $(0, 2\pi)$  分部积分得

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{K} \mathbf{p} \\ \mathbf{M} \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} d\psi = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{M} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Big|_0^{2\pi}. \quad (4)$$

因为方程本身有周期解, 即  $\dot{\mathbf{p}}(2\pi) = \dot{\mathbf{p}}(0)$ , 所以方程(4)的右端为 0, 故有

$$\int_0^{2\pi} \delta \mathbf{y}^T \mathbf{Q} d\psi = 0,$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{K} \mathbf{p} \\ \mathbf{M} \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

向量  $\mathbf{Q}$  包含了原来的  $\mathbf{F}$ , 仍然是含有广义位移和时间的非线性项. 将一个周期的时间域  $(0, 2\pi)$  等分成  $N_e$  个时间单元, 每个单元有  $n$  个节点, 这样在整个周期上, 总的节点数为  $N_d = (n-1)N_e + 1$ .

于是方程(5)变成离散形式:

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \delta \mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}_i d\psi = 0,$$

其中

$$\psi_1 = 0, \psi_{N_e+1} = 2\pi. \quad (6)$$

将式(6)在平衡点  $\mathbf{p}_0$  作一阶 Taylor 级数展开:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \delta \mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}_i(\mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}) d\psi = \\ \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \delta \mathbf{y}_i^T [\mathbf{Q}_i(\mathbf{y}_0) + \mathbf{K}_{ii}(\mathbf{y}_0) \Delta \mathbf{y}] d\psi = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{K} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}_i.$$

对于第  $i$  个时间单元,单元内的任意时刻的位移用节点值插值得到:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{H}_i(s) \boldsymbol{\xi}_i, \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{H}_i(s)$  为时间形函数矩阵,  $\boldsymbol{\xi}_i$  为第  $i$  个单元的节点位移向量.

变量  $s$  和  $\mathbf{H}_i(s)$  分别为

$$\begin{cases} s = \frac{\psi - \psi_i}{\psi_{i+1} - \psi_i}, & 0 \leq s \leq 1, \\ \mathbf{H}_i = (\mathbf{H}_1 \mathbf{I}_m, \dots, \mathbf{H}_{J+1} \mathbf{I}_m), \end{cases} \quad (9)$$

这里,  $\mathbf{I}_m$  为  $m \times m$  阶单位矩阵,  $m$  为系统的自由度,  $J$  为所取 Lagrange 插值多项式的阶数, 即  $J = n - 1$ .

由式(8)可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_i = \dot{\mathbf{H}}_i(s) \boldsymbol{\xi}_i, \quad \ddot{\mathbf{y}}_i = \ddot{\mathbf{H}}_i(s) \boldsymbol{\xi}_i, \\ \delta \mathbf{p}_i = \mathbf{H}_i(s) \delta \boldsymbol{\xi}_i, \quad \delta \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{H}}_i(s) \delta \boldsymbol{\xi}_i, \end{cases} \quad (10)$$

把式(8) ~ 式(10)代入式(7)得到方程:

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \delta \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{N}^T (\mathbf{Q}_i + \mathbf{K}_{ii} \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\xi}_i) d\psi = 0, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_i(\psi) \\ \dot{\mathbf{H}}_i(\psi) \end{pmatrix}.$$

对于周期解来说,式(5)的边界条件为  $\mathbf{y}(2\pi) = \mathbf{y}(0)$ .

将式(11)写为

$$\sum_{i=1}^{N_e} \delta \boldsymbol{\xi}_i^T \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} (\mathbf{N}^T \mathbf{Q}_i + \mathbf{N}^T \mathbf{K}_{ii} \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\xi}_i) d\psi = 0, \quad (12)$$

设

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^e &= \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{Q}_i d\psi, \\ \mathbf{K}_i^e &= \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{K}_{ii} \mathbf{N} d\psi, \end{aligned}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N_e} \delta \boldsymbol{\xi}_i^T (\mathbf{Q}_i^e + \mathbf{K}_i^e \Delta \boldsymbol{\xi}_i) = 0. \quad (13)$$

与空间有限元方法类似,去掉任意变分,将上式中各个时间单元汇总,得到如下方程:

$$\mathbf{Q}^e + \mathbf{K}^e \Delta \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

式(14)关于  $\Delta \boldsymbol{\xi}$  是线性的,但由于向量  $\mathbf{Q}^e$  中含有非线性项,故属非线性代数方程组,用 Newton-Raphson 法迭代求解就得到桨叶周期响应  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0$ .

## 2 旋翼/机身耦合配平

### 2.1 桨叶载荷、桨毂载荷计算

得到上述桨叶响应后,用力积分法将桨叶剖面气动载荷和惯性载荷从桨尖到桨根沿展向积分,得出桨叶旋转坐标系中的桨根载荷.

桨毂载荷包括旋翼的拉力  $T$ 、阻力  $H$  和侧向力  $Y$ ,以及滚转力矩  $M_{xR}$ 、俯仰力矩  $M_{yR}$  和偏航力矩  $M_{zR}$  这 6 个分量.叠加所有桨叶的桨根载荷,桨毂力与桨根力之间的数学转换见文献[12].

前飞条件下桨毂载荷是时间的函数,取其零阶谐波(即平均值)用于配平计算.而桨根、桨毂载荷的各阶谐波对振动估计很重要,与谐波平衡法不同,本文 TEM 法不用事先假设谐波项数,且一旦求得这些周期载荷(例如  $f(\psi)$ ),用有限元插值可得任意  $\psi$  的  $f$  值,运用 Fourier 级数展开和数值积分可得其任意前  $n$  阶谐波系数.

### 2.2 耦合配平计算

在第 1 节将旋翼操纵(含总距  $\theta_0$  和周期变距  $\theta_c, \theta_s$ )、机身姿态角( $\alpha_s, \phi_s$ )、尾桨操纵(总距  $\theta_{tr}$ )和入流  $\lambda$  的具体值代入桨叶动力学方程,再用 TEM 法求得桨叶变形.但由于事先未知配平变量( $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_0, \theta_c, \theta_s, \alpha_s, \phi_s, \theta_{tr}\}$ )和  $\lambda$  的准确值,只能先以刚性桨叶作关于  $\boldsymbol{\theta}$  和  $\lambda$  的初值估计<sup>[1]</sup>,这就导致所求桨叶变形的偏差,继而引起桨叶剖面气动力乃至桨毂载荷的变化,接着又带来  $\boldsymbol{\theta}$  和  $\lambda$  的波动,该波动还会导致用 TEM 法所求桨叶变形的再次改变.以上的相互耦合使得同时得到准确的桨叶响应、 $\boldsymbol{\theta}$  和  $\lambda$  必须进行配平计算.

配平计算往往和气弹分析耦合在一起,因而是一个非常复杂的非线性过程,涉及结构动力学、空气动力学和飞行力学等多种学科.如果不进行配平计算,任何旋翼分析的结果都是不可靠的<sup>[1]</sup>.除去较简易的风洞配平以外,直升机的配平分非耦合配平和耦合配平.

前者指同时给定飞行状态和  $\boldsymbol{\theta}$ ,根据 TEM 法算得的桨叶响应计算桨毂拉力后更新入流,又代入桨叶方程再求响应,重复迭代直到桨叶响应收敛;与前者相比,后者在更新桨叶响应前除了更新入流外,还要修正  $\boldsymbol{\theta}$ ,直到桨叶响应收敛且机身满足平衡方程.前者在计算量上有所减少(不需在迭代中修正  $\boldsymbol{\theta}$ ),但未考虑旋翼操纵与桨叶响应的耦合.

修正  $\boldsymbol{\theta}$  根据机身平衡(配平)方程进行,本文在给定直升机重量和前飞速度的条件下,耦合配平采用机身坐标系中 6 个力和力矩平衡方程(统称为  $F_{ss}$ ):

$$\begin{cases} T \cos \alpha_s + H \sin \alpha_s - W = 0, \\ D_F + H \cos \alpha_s - T \sin \alpha_s = 0, \\ Y_F + Y \cos \phi_s + T \sin \phi_s + T_{tr} = 0, \\ M_{xR} + M_{xF} + Y_F (\bar{h} \cos \phi_s + y_{cg} \sin \phi_s) + \\ \quad W (\bar{h} \sin \phi_s - y_{cg} \cos \phi_s) + T_{tr} (\bar{h} - z_{tr}) = 0, \\ M_{yR} + M_{yF} + W (\bar{h} \sin \alpha_s - x_{cg} \cos \alpha_s) - D_F (\bar{h} \cos \alpha_s + x_{cg} \sin \alpha_s) = 0, \\ M_{zR} + M_{zF} + T_{tr} (x_{tr} - x_{cg}) + D_F y_{cg} \cos \alpha_s - Y_F x_{cg} \cos \phi_s = 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $D_F, Y_F, W$  是机身的迎风、横向阻力和直升机重量,  $M_{xF}, M_{yF}, M_{zF}$  为机身俯仰、滚转和偏航

力矩,  $x_{cg}, y_{cg}, \bar{h}$  为直升机重心到桨毂中心的纵向、横向和垂直距离,  $T_{tr}, x_{tr}, z_{tr}$  为尾桨拉力、尾桨中心到直升机重心的纵向和垂直距离。

桨叶响应是  $\theta$  的函数, 而  $F_{ss}$  是桨叶响应和  $\theta$  的函数。迭代中每次用 TEM 法求得桨叶响应的具体数值后, 在用力积分法求桨毂载荷并代入  $F_{ss}$  时, 不对  $\theta$  赋值, 然后按照 Taylor 一阶展开近似修正  $\theta$ :

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta_i, \\ \Delta\theta_i = - \left. \frac{\partial F_{ss}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_i} F_{ss}(\theta_i), \end{cases} \quad (16)$$

其中  $i$  是迭代次数。

前飞条件下的耦合配平基本步骤如下:

- 1) 输入旋翼和机身额定参数, 包括前飞速度、旋翼转速和半径、桨叶质量和刚度分布、预锥角、桨叶线性预扭、机体重量、机身阻力系数等;
- 2) 以刚性桨叶初步估计  $\theta$  和入流参数  $\{\lambda_0, \lambda_c, \lambda_s\}$ ;
- 3) 将以上初值代入桨叶振动方程, 用 TEM 法求出弹性响应, 再算得桨叶、桨毂载荷;
- 4) 桨毂载荷代入  $F_{ss}$ , 从而得到或者更新  $\theta$ ;
- 5) 根据桨毂载荷更新入流参数  $\{\lambda_0, \lambda_c, \lambda_s\}$ ;
- 6) 由新的入流和  $\theta$ , 用 TEM 法更新桨叶弹性稳态响应;
- 7) 用新的桨叶响应更新桨叶剖面气动载荷、惯性载荷。再将其沿展向积分, 更新桨叶、桨毂载荷。

重复步骤 4) ~ 7), 直至桨叶响应、配平方程都收敛, 即某次迭代前后它们的相对改变量都小于预定值。

### 3 旋翼/机身耦合系统稳定性分析

与只考虑旋翼不同, 耦合系统中机身的运动会影响桨叶动能和气动力。为此补充机身空间三维自由度, 与 2 个机身姿态角一起共 5 个机身自由度:  $\mathbf{x}_F = \{x_F, y_F, z_F, \alpha_s, \phi_s\}$ 。另外, 为考虑入流与旋翼动力特性的相互影响, 纳入 3 个入流自由度:  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda_c, \lambda_s\}$ 。假设上述自由度在配平位置发生小扰动, 即

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, \quad \mathbf{x}_F = \mathbf{x}_{F0} + \Delta\mathbf{x}_F, \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \Delta\boldsymbol{\lambda}. \quad (17)$$

注意在前面配平中已得到  $\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_{F0}, \boldsymbol{\lambda}_0$ 。将上式代入 Hamilton 变分原理, 剔除其中稳态(平衡态)的配平量得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^{N_b} (\delta\Delta U_{bi} - \delta\Delta T_{bi} - \delta\Delta W_{bi}) + (\delta\Delta U_F - \delta\Delta T_F - \delta\Delta W_F) \right] dt = \mathbf{0}, \quad (18)$$

式中  $N_b$  是桨叶片数, 下标 b, F 代表桨叶和机身, 其中桨叶、机身能量变分是关于  $\delta\Delta\mathbf{q}, \delta\Delta\mathbf{x}_F, \delta\Delta\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}_0, \mathbf{x}_{F0}, \boldsymbol{\lambda}_0, \Delta\mathbf{q}, \Delta\mathbf{x}_F, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \psi$  的函数, 将其保留到关于系统总自由度  $\mathbf{q}, \mathbf{x}_F, \boldsymbol{\lambda}$  的二次非线性项。为进行线性化扰动分析, 将非线性项(下标用 NL)在配平位置用 Taylor 一阶展开近似代替, 如

$$\mathbf{F}_{NL} = \mathbf{F}_{NL} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \Delta\mathbf{q}. \quad (19)$$

为将低频尾迹的不稳定效应纳入系统动力学中, 采用动态入流模型:

$$\mathbf{M}_\lambda \Delta\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{L}^{-1} \Delta\boldsymbol{\lambda} = (\Delta C_T, -\Delta C_{M_x}, \Delta C_{M_y})^T, \quad (20)$$

式中矩阵  $\mathbf{M}_\lambda, \mathbf{L}$  参见文献[13], 等式右边为拉力、滚转和俯仰力矩系数的扰动。式(18) 去掉变

分后,将其中关于扰动自由度的线性项写成矩阵,并对自由度  $q$  模态降阶到  $p$ , 得到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{RR} & \mathbf{M}_{RF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{FR} & \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{p}}_R \\ \Delta \ddot{\mathbf{x}}_F \\ \Delta \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{RR} & \mathbf{C}_{RF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{FR} & \mathbf{C}_{FF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\lambda R} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{\mathbf{p}}_R \\ \Delta \dot{\mathbf{x}}_F \\ \Delta \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RF} & \mathbf{K}_{RA} \\ \mathbf{K}_{FR} & \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\lambda R} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} + \mathbf{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p}_R \\ \Delta \mathbf{x}_F \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

式中下标 R,  $\lambda$  代表旋翼和入流,且

$$\mathbf{M}_{RR} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{N_b} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

其中  $\mathbf{M}_{N_b}$  为第  $N_b$  根桨叶的质量阵,  $\mathbf{C}_{RR}, \mathbf{K}_{RR}$  依此类推.  $\mathbf{M}_{FF}, \mathbf{C}_{FF}, \mathbf{K}_{FF}$  指机身的质量、阻尼和刚度阵. 桨叶 - 机身耦合质量阵  $\mathbf{M}_{RF}$  源自机身引起的对桨叶的惯性力项; 而机身 - 桨叶耦合质量阵  $\mathbf{M}_{FR}$  源自桨叶引起的对机身的惯性力项,  $\mathbf{C}_{RF}, \mathbf{C}_{FR}, \mathbf{C}_{\lambda R}, \mathbf{K}_{RF}, \mathbf{K}_{FR}, \mathbf{K}_{RA}, \mathbf{K}_{\lambda R}$  依此类推. 这些耦合矩阵须先经过桨叶空间有限元离散, 从单元矩阵集成为桨叶总矩阵, 其具体推导类似于式 (2) 中的各矩阵. 将以上二阶扰动方程转到状态空间, 得到

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{Y}, \quad (22)$$

其中状态变量  $\mathbf{Y} = \{ \Delta \dot{\mathbf{p}}_R, \Delta \dot{\mathbf{x}}_F, \Delta \mathbf{p}_R, \Delta \mathbf{x}_F, \Delta \boldsymbol{\lambda} \}$ .

使用 Fourier 坐标系转换将式 (22) 从旋转坐标系转换到固定坐标系<sup>[1]</sup>. 再根据 Floquet 理论导出状态转移矩阵  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi})$ , 将其在周期  $(0, 2\pi)$  上数值积分后 ( $\mathbf{Q}(0)$  是单位矩阵), 所得矩阵的特征值为

$$\Lambda_k = \alpha_k + i\omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

其中  $\alpha_k$  为耦合系统第  $k$  阶模态阻尼 (衰减率),  $\omega_k$  为第  $k$  阶模态频率. 系统稳定意味着所有  $\alpha_k$  都小于 0.

## 4 算例分析

对于摆振柔软的无铰旋翼, 系统主要参数为: 旋翼半径 4.938 m; 旋翼转速  $\Omega = 44$  rad/s; 翼型 NACA0012; 均质桨叶单位长度质量 5.56 kg/m; 不考虑桨叶预锥、预扭;  $c = 0.28$  m; 桨叶片数 4 片; Lock 数  $\gamma = 5.2$ ; 桨盘实度  $\sigma = 0.07$ ; 桨叶载荷系数  $C_w/\sigma = 0.07$ . 以下图表中的数据除特别指明外均为无量纲值.

表 1 是本文计算的桨叶基阶模态频率同文献[14]的实验值对比.

	非旋转		旋转	
	计算值	实验值	计算值	实验值
摆振一阶	0.599	0.593	0.744	0.741
挥舞一阶	0.380	0.370	1.150	1.140
扭转一阶	6.300	6.360	4.550	4.890

迭代次数	1	2	3	...	13	14
$\varepsilon_1$	1 000	67.8	17.3	...	2.86	1.71
$\varepsilon_2$	18.5	15.1	11.9	...	0.18	0.096

根据表 1, 对于该实验用的无铰旋翼, 本文模型计算频率与实验结果吻合较好, 基本上能反映该旋翼的真实工况, 表明桨叶结构模型和计算方法的有效性.



图 1 ~ 图 3 是对应表 1 的桨叶最低六阶挥舞、摆振和扭转固有振型  $m_F, m_L, m_T$  (注:由于桨毂位于旋翼中心,振型从桨叶径向位置  $r/R = 0.02$  开始),图中  $f$  为对应各阶模态频率.本文的模态降阶采用此六阶模态进行(除图 7 外).

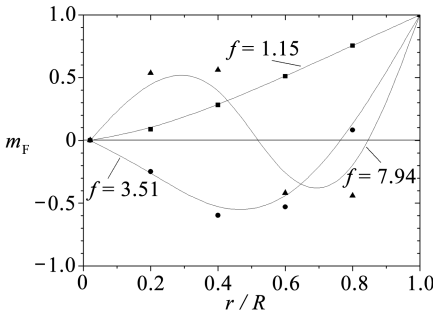


图 1 挥舞前三阶振型图

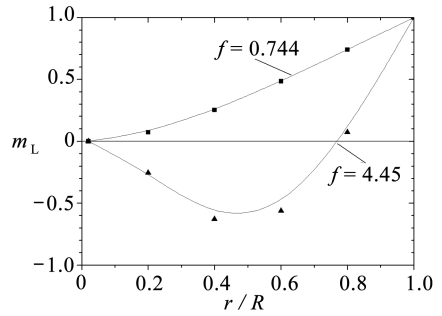


图 2 摆振前两阶振型图

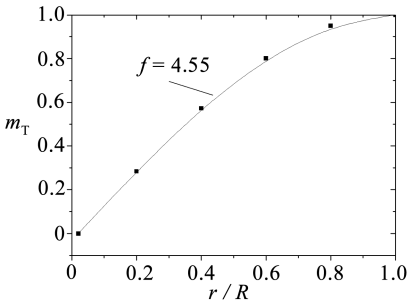


图 3 扭转最低阶振型图

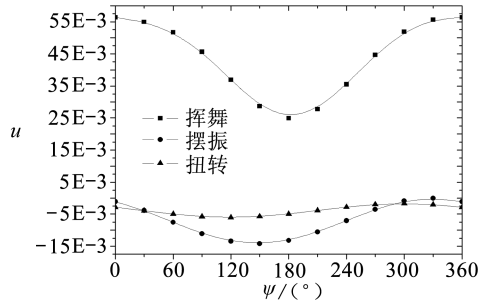


图 4 桨尖稳态响应

图 4 是依据文中配平步骤,取前进比  $\mu = 0.2$ ,先按刚性桨叶估算初始配平变量,经过 14 次耦合配平迭代后得到的桨尖弹性响应  $u$  ( $\psi$  是桨叶方位角).计算中反映桨叶响应、配平方程残量敛散程度的变量  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  的变化见表 2. 作为比较,表 3 列出非耦合配平时  $\varepsilon_2$  随迭代次数的变化,可见迭代 6 次后配平方程残量收敛不佳,此时即使得到收敛的桨叶响应也不能代表真实飞行状态.

表 4 是桨根拉力的前六阶谐波(平均值  $f_0 = 0.0206$ ),其中  $f_n = \sqrt{f_{nc}^2 + f_{ns}^2}$ ,可见 TEM 法能够捕捉可用于分析直升机振动水平的载荷高阶谐波,而这是谐波平衡法难以实现的.

表 3 非耦合配平时  $\varepsilon_2$  随迭代次数的变化 ( $\times 10^{-3}$ )

迭代次数	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon_2$	18.5	18.7	18.5	16.6	18.3	19.2

表 4 桨根拉力的前六阶谐波

谐波次数	1	2	3	4	5	6
$f_{nc} (\times 10^{-3})$	3.730	-1.47	-0.265	-0.026	0.015	-0.013
$f_{ns} (\times 10^{-3})$	1.330	-0.233	0.026	0.007	-0.01	-0.004
$f_n / f_0$	0.192	0.072	0.013	0.0012	0.00085	0.00072

图 5 是桨根拉力  $T$  的配平值,可以看出  $T$  在方位角位于  $0^\circ \sim 180^\circ$  内较  $180^\circ \sim 360^\circ$  内的平均值偏大,这是由于桨叶前进边的方位角在  $0^\circ \sim 180^\circ$  内.

图 6 是不同前进比时的桨尖挥舞响应  $u_F$ . 由图 6 可知,悬停时挥舞响应为常数,随着前飞速度增加,其随方位角的变化幅度加大.当  $\mu = 0.3$  时,曲线形状变化不很规则,可能由于大速度前飞时准定常气动模型精度不够.

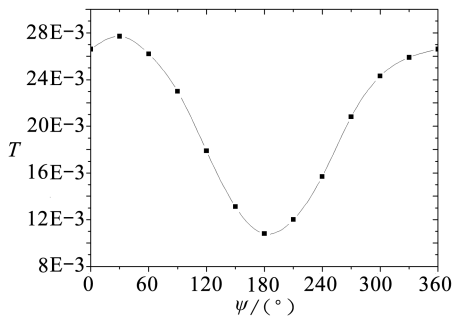


图5 桨叶根部拉力

表5 后退摆振模态频率随 $\Omega$ 的变化

$\Omega/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	31.4	41.9	52.4	62.8	73.3
$\omega_{\perp}/\text{Hz}$	1.12	0.55	0.53	1.99	2.85
$\omega_{\parallel}/\text{Hz}$	1.10	0.52	0.55	2.03	2.92

表5列出了悬停时后退摆振模态频率随旋翼转速的变化,计算值 $\omega_{\perp}$ 与试验数据 $\omega_{\parallel}$ <sup>[14]</sup>吻合良好。

图7给出 $\Omega = 44 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 时配平中模态降阶所用转换矩阵含有或不含扭转模态这2种情况时,后退摆振模态阻尼 $\alpha$ 随前进比的变化。

虽然通常扭转基阶频率比摆振、挥舞基阶频率高出很多(如本文表1),有时为了计算简化将其忽略,但图7表明桨叶弹性扭转对稳定性求解有重要影响。

## 5 结 论

1) 开发了旋翼/机身气弹耦合配平分析程序,适用于前飞状态下计算桨叶非线性响应,同时修正旋翼操纵和机身姿态角。

2) 用TEM法得到桨叶响应的同时,还可计算桨根、桨毂载荷的高阶谐波,用于直升机振动预测。

3) 由于桨叶旋转系转换到机身惯性系需要机身姿态 $\alpha_s, \phi_s$ ,将桨叶运动方程建立在旋转坐标系中可在未知 $\alpha_s, \phi_s$ 准确值时使得考虑旋翼/机身耦合成为可能。

4) 模态空间转换时纳入基阶扭转模态会明显改变耦合系统稳定性,在低前进比时 $\mu < 0.25$ 将减小摆振模态阻尼,而在高前进比时导致阻尼增加。

### 参考文献:

- [1] Wayne Johnson. *Helicopter Theory*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1980.
- [2] Smith E C, Chopra I. Aeroelastic response and blade loads of a composite rotor in forward flight[C]//*Proceedings of the 33rd Structures, Structure Dynamic, and Materials Conference*. Washington D C: AIAA, 1992: 1996-2014.
- [3] 杨卫东. 后掠桨尖旋翼气弹耦合分析及优化[D]. 博士学位论文. 南京:南京航空航天大学航空宇航学院, 1995.
- [4] Warmbrodt W, Friedmann P. Formulation of coupled rotor/fuselage equations of motion[J].

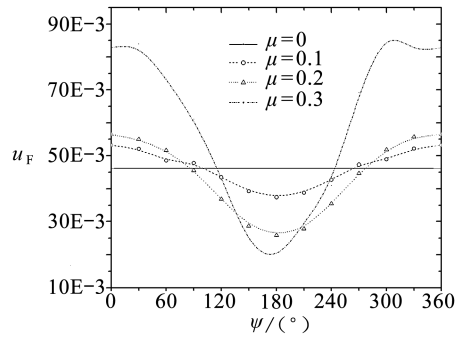


图6 不同前进比的桨尖挥舞响应

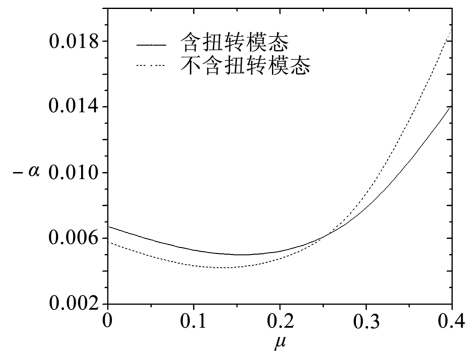


图7 后退摆振模态阻尼随前进比的变化



- Vertica*, 1979, **3**(3/4): 245-271.
- [5] Friedmann P P. Numerical methods for the treatment of periodic systems with applications to structural dynamics and helicopter rotor dynamics[J]. *Computers & Structrals*, 1990, **35**(4): 329-347.
- [6] 程永明, 任革学, 郑兆昌, 等. 直升机旋翼/机身耦合系统的气弹响应分析[J]. *应用力学学报*, 1999, **16**(2): 32-36.
- [7] 韩东, 高正, 王浩文. 惯性坐标系下的旋翼气弹稳定性建模[J]. *南京航空航天大学学报*, 2005, **37**(4): 417-420.
- [8] Sivaner N T, Chopra I. Dynamic stability of a rotor blade using finite element analysis[J]. *AIAA Journal*, 1982, **20**(5): 716-723.
- [9] 向锦武, 张呈林, 王适存. 低振动旋翼桨叶的动力学优化设计[J]. *航空动力学报*, 1996, **11**(2): 125-128.
- [10] Hodges D H, Dowell E H. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades[R]. Washington: NASA TN D-7818, Dec, 1974.
- [11] 胡新宇, 韩景龙. 无轴承旋翼/减摆器的气动弹性力学研究[J]. *中国矿业大学学报*, 2008, **37**(4): 514-518.
- [12] 张晓谷. 直升机动力学设计[M]. 北京: 航空工业出版社, 1995.
- [13] Peters D A, HaQuang N. Dynamic inflow for practical applitions[J]. *Journal of American Helicopter Society*, 1988, **33**(4): 64-68.
- [14] McNulty M J, Bousman W G. Integrated technology rotor methodology assessment workshop [R]. Washington: NASA CP-10007, June, 1983.

## Nonlinear Aeroelastic Coupled Trim and Stability Analysis of Rotor-Fuselage

HU Xin-yu<sup>1</sup>, HAN Jing-long<sup>2</sup>, YU Mei<sup>1</sup>

(1. *Department of Engineering Mechanics, College of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221008, P. R. China;*

2. *Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China)*

**Abstract:** Based on the principle of Hamilton and the moderate deflection beam theory, discretizing the blade into a number of beam elements which had 15 degrees of freedom, using quasi-steady aero model, the nonlinear coupled rotor/fuselage equation was founded. The periodic solution of blades and fuselage were obtained through aeroelastic coupled trim using temporal finite element method. Peters' dynamic inflow model was adopted for vehicle stability. A calculation program was built up, which offered the blade responses, hub loads and the rotor pitch controls. The correlation between analytical results and related literatures is good. The converged solution simultaneously satisfies the blade and the vehicle equilibrium equations.

**Key words:** nonlinear; aeroelasticity; rotor/fuselage coupling; temporal finite element method; stability