

# 非饱和土一维固结的半解析解\*

秦爱芳<sup>1</sup>, 孙德安<sup>1</sup>, 谈永卫<sup>2,3</sup>

(1. 上海大学 土木工程系, 上海 200072;

(2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092;

3. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 首先对 Fredlund 的非饱和土一维固结理论进行简化, 由得到的液相及气相的控制方程、Darcy 定律及 Fick 定律, 经 Laplace 变换及 Cayley-Hamilton 定理构造了顶面状态向量与任意深度处状态向量间的传递关系; 通过引入边界条件, 得到了大面积瞬时加荷情况多种边界条件下 Laplace 变换域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力及土层沉降的解; 采用 Crump 方法编制程序实现 Laplace 逆转换, 得到了时间域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力、土层沉降的半解析解; 引用典型算例, 对单面排水排气情况, 与已有的解析解进行对比, 验证其正确性; 对单面排气不排水情况, 与差分法结果进行对比进一步证明半解析解的正确性, 并进行固结特性分析. 该研究对非饱和土一维固结的研究具有重要的意义.

**关键词:** 一维固结; 非饱和土; 超孔隙水压力; 超孔隙气压力; 半解析解

**中图分类号:** TU44 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.02.009

## 引 言

国外从 20 世纪 60 年代开始研究非饱和土固结问题, 典型的有 Blight<sup>[1]</sup>, Scott<sup>[2]</sup>, Barden<sup>[3]</sup>, Fredlund 等<sup>[4-5]</sup>等提出的固结方程. 20 世纪 90 年代非饱和土固结问题是国内非饱和土力学研究的热点, Yang(杨代泉)<sup>[6]</sup>、陈正汉<sup>[7-8]</sup>、Shen(沈珠江)<sup>[9]</sup>、殷宗泽<sup>[10]</sup>等曾先后研究过非饱和土的固结理论, 并提出了各自的见解. 在非饱和土固结理论中比较完善也具有权威性的是 Fredlund<sup>[5]</sup>固结理论. 秦爱芳等<sup>[11]</sup>基于 Fredlund 的非饱和土一维固结理论得到了大面积均布瞬时加载下顶面为透水透气面, 底面为不透水不透气(单面排水排气)边界条件下非饱和土层一维固结的解析解. 对于简单荷载及边界条件的 Laplace 逆变换问题, 可直接利用 Laplace 变换表得到逆变换的解析表达式, 而对于大部分荷载及边界条件(如以上荷载的其它边界条件), Laplace 变换下的表达式极其复杂, 难以直接进行 Laplace 逆变换得到其解析解, 需要通过数值方法进行逆变换. 本文对大面积均布瞬时加载的多种边界条件, 首先推导出 Laplace 变换域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力及土层沉降的解, 然后采用 Crump 方法编制程序实现 Laplace 逆转换, 得到其半解析解. 这种半解析解方法避免了直接 Laplace 逆变换的困难, 并可向

\* 收稿日期: 2009-06-08; 修订日期: 2009-12-28

作者简介: 秦爱芳(1966—), 女, 山西人, 副教授, 博士生(联系人. Tel: +86-21-56336014; E-mail: qinaifang@21cn.com).

多种荷载及多种边界条件拓展,这一研究将对非饱和土一维固结的研究具有重要的意义。

## 1 半解析解的求解

### 1.1 对 Fredlund 固结方程的简化

假定在 Fredlund 一维固结的基本控制方程中液体及气体的渗透系数为常数;假定固结过程中发生的应变为小应变。

### 1.2 顶面状态向量 $\tilde{X}(0,s)$ 与任意深度处状态向量 $\tilde{X}(z,s)$ 间的传递关系

基于 Fredlund 的一维非饱和土固结液相控制方程及简化气相的控制方程、Darcy 定律及 Fick 定律,经 Laplace 变换及 Cayley-Hamilton 数学方法构造的顶面状态向量  $\tilde{X}(0,s)$  与任意深度处状态向量  $\tilde{X}(z,s)$  间的传递关系如下<sup>[11]</sup>:

$$\tilde{X}(z,s) = T(z,s)\tilde{X}(0,s) + S(z,s), \quad (1)$$

其中

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}, S = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}.$$

当  $z = H$  时,  $\tilde{X}(z,s)$  可表达成

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_a(H,s) \\ \tilde{u}_w(H,s) \\ \tilde{J}_a(H,s) \\ \tilde{v}_w(H,s) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}_{z=H} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_a(0,s) \\ \tilde{u}_w(0,s) \\ \tilde{J}_a(0,s) \\ \tilde{v}_w(0,s) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}_{z=H}, \quad (2)$$

$T_{11} \sim T_{44}$  及  $S_1 \sim S_4$  同文献[11]。

### 1.3 边界和初始条件

以下列两种边界条件为例:

边界条件 1 顶面排水排气,底面不排水不排气

$$\begin{cases} u_a(0,t) = u_w(0,t) = 0, \\ \frac{\partial u_a(H,t)}{\partial z} = \frac{\partial u_w(H,t)}{\partial z} = 0, \\ u_a(z,0) = u_a^0, u_w(z,0) = u_w^0, \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $u_a^0$  和  $u_w^0$  为  $t = 0$  时刻由荷载引起的初始超孔隙气和初始超孔隙水压力。

边界条件 2 顶面排气不排水,底面不排水不排气

$$\begin{cases} u_a(0,t) = 0, \\ \frac{\partial u_a(H,t)}{\partial z} = \frac{\partial u_w(H,t)}{\partial z} = \frac{\partial u_w(0,t)}{\partial z} = 0, \\ u_a(z,0) = u_a^0, u_w(z,0) = u_w^0. \end{cases} \quad (4)$$

### 1.4 Laplace 变换下的解 $\tilde{X}(z,s)$

边界条件 1 顶面排水排气,底面不排水不排气

将式(3)代入式(2),可以得到

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_a(H, s) \\ \tilde{u}_w(H, s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}_{z=H} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_a(0, s) \\ \tilde{v}_w(0, s) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}_{z=H}, \quad (5)$$

解得

$$\begin{cases} \tilde{J}_a(0, S) = \frac{-T_{44}S_3 + T_{34}S_4}{T_{33}T_{44} - T_{34}T_{43}}, \\ \tilde{v}_w(0, S) = \frac{T_{43}S_3 - T_{33}S_4}{T_{33}T_{44} - T_{34}T_{43}}. \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)及(3)代入式(2),则可求得 Laplace 变换下任意时刻的超孔隙水压力、超孔隙气压力、土层沉降:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_a(z, s) &= T_{13}\tilde{J}_a(0, s) + T_{14}\tilde{v}_w(0, s) + S_1 = \\ & \left[ - \left\{ \left( \eta^2 + \frac{s}{C_v^a} \right) (u_a^0 + C_a u_w^0) + \frac{sC_a}{C_v^a} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right\} \frac{\text{ch}[\xi(H-z)]}{\xi^2 \text{ch}(\xi H)} + \right. \\ & \left. \left\{ (u_a^0 + C_a u_w^0) \left( \xi^2 + \frac{s}{C_v^a} \right) + \frac{sC_a}{C_v^a} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right\} \frac{\text{ch}[\eta(H-z)]}{\eta^2 \text{ch}(\eta H)} \right] \\ & \frac{1}{C_v^a (\xi^2 - \eta^2)} + \frac{u_a^0}{s}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_w(z, s) &= T_{23}\tilde{J}_a(0, s) + T_{24}\tilde{v}_w(0, s) + S_2 = \\ & \left[ - \left[ \frac{sC_w}{C_v^a} (u_a^0 + C_a u_w^0) + \left( \eta^2 + \frac{s}{C_v^w} \right) (C_w u_a^0 + u_w^0) \right] \frac{\text{ch}[\xi(H-z)]}{\xi^2 \text{ch}(\xi H)} + \right. \\ & \left. \left[ \frac{sC_w}{C_v^a} (u_a^0 + C_a u_w^0) + (C_w u_a^0 + u_w^0) \left( \xi^2 + \frac{s}{C_v^w} \right) \right] \frac{\text{ch}[\eta(H-z)]}{\eta^2 \text{ch}(\eta H)} \right] \\ & \frac{1}{C_v^w (\xi^2 - \eta^2)} + \frac{u_w^0}{s}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(z, s) &= \int_0^H \tilde{\varepsilon}_v(z, s) dz = \int_0^H \left\{ -m_{1k}^s \left( \tilde{u}_a - \frac{u_a^0}{s} \right) + m_2^s \left( \tilde{u}_a - \frac{u_a^0}{s} - \tilde{u}_w + \frac{u_w^0}{s} \right) \right\} dz = \\ & (-m_{1k}^s + m_2^s) \int_0^H \tilde{u}_a dz - m_2^s \int_0^H \tilde{u}_w dz + \frac{(m_{1k}^s - m_2^s)u_a^0 + m_2^s u_w^0}{s} H = \\ & - \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)} \left[ \frac{1}{C_v^a} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \left( \eta^2 + \frac{s}{C_v^a} \right) - m_2^s \frac{sC_w}{C_v^a} \right\} (u_a^0 + C_a u_w^0) + \right. \\ & \left. \frac{1}{C_v^w} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \frac{sC_a}{C_v^a} - m_2^s \left( \eta^2 + \frac{s}{C_v^w} \right) \right\} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right] \frac{\text{sh}(\xi H)}{\xi^3 \text{ch}(\xi H)} + \\ & \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)} \left[ \frac{1}{C_v^a} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \left( \xi^2 + \frac{s}{C_v^a} \right) - m_2^s \frac{sC_w}{C_v^a} \right\} (u_a^0 + C_a u_w^0) + \right. \\ & \left. \frac{1}{C_v^w} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \frac{sC_a}{C_v^a} - m_2^s \left( \xi^2 + \frac{s}{C_v^w} \right) \right\} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right] \frac{\text{sh}(\eta H)}{\eta^3 \text{ch}(\eta H)}. \quad (9) \end{aligned}$$

边界条件2 顶面排气不排水,底面不排水不排气

同以上方法,代入边界、初始条件,可求得

$$\tilde{u}_a(z, s) = T_{12}\tilde{u}_w(0, s) + T_{13}\tilde{J}_a(0, s) + S_1 =$$

$$\frac{-\xi \operatorname{sh}\left[\left(\xi H\right)\left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^w}\right)\right] \operatorname{ch}[\eta(H-z)] - \eta \operatorname{sh}\left[\left(\eta H\right)\left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^a}\right)\right] \operatorname{ch}[\xi(H-z)]}{\left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^w}\right) \xi \operatorname{sh}(\xi H) \operatorname{ch}(\eta H) + \left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^a}\right) \eta \operatorname{sh}(\eta H) \operatorname{ch}(\xi H)}$$

$$\frac{u_a^0}{s} + \frac{u_a^0}{s}, \quad (10)$$

$$\tilde{u}_w(z, s) = T_{22} \tilde{u}_w(0, s) + T_{23} \tilde{J}_a(0, s) + S_2 =$$

$$\frac{\xi \operatorname{sh}(\xi H) \operatorname{ch}[\eta(H-z)] - \eta \operatorname{sh}(\eta H) \operatorname{ch}[\xi(H-z)]}{\left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^w}\right) \xi \operatorname{sh}(\xi H) \operatorname{ch}(\eta H) + \left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^a}\right) \eta \operatorname{sh}(\eta H) \operatorname{ch}(\xi H)} \cdot \frac{C_w u_a^0}{C_v} + \frac{u_w^0}{s}, \quad (11)$$

$$\tilde{w}(z, s) = \left(\frac{\xi}{\eta} - \frac{\eta}{\xi}\right) \left(m_{1k}^s - m_2^s - m_2^s C_w\right) \frac{u_a^0}{C_v} \times$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\eta H) \operatorname{sh}(\xi H)}{\left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^w}\right) \xi \operatorname{sh}(\xi H) \operatorname{ch}(\eta H) + \left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^a}\right) \eta \operatorname{sh}(\eta H) \operatorname{ch}(\xi H)}. \quad (12)$$

### 1.5 关于 Laplace 逆变换的处理

数值法进行逆变换方法很多, Crump 法<sup>[12]</sup>是精度较高的一种方法, 本文采用 Crump 方法编制程序实现 Laplace 逆变换得到时间域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力及土层沉降的半解析解, 具体参见附录 A. 求解超孔隙压力的主要流程可参见附录 B.

## 2 算例、验证及固结特性分析

为了验证所推导的非饱和土一维固结半解析解的正确性, 本文采用典型算例, 对边界条件 1 进行了半解析解与文献[11]解析解的对比. 对边界条件 2 进行了半解析解与有限差分方法结果的对比, 有限差分法(Fredlund 和 Hasan 文献[4]提出的)具体实施见文献[11].

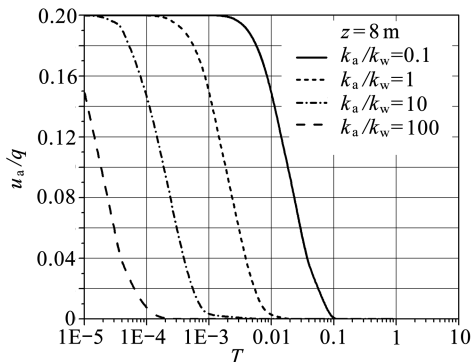
计算问题如下: 设一厚度为 8 m 的水平向无限的土层, 主要土层参数为  $n_0 = 50\%$ ,  $S_{i0} = 80\%$ ,  $m_{1k}^s = -2.5 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$ ,  $m_2^s/m_{1k}^s = 0.4$ ,  $m_{1k}^w/m_{1k}^s = 0.2$ ,  $m_2^w/m_{1k}^w = 4$ , 表面瞬时施加一均匀无限荷载  $q = 100 \text{ kPa}$ , 初始超孔隙气压力为  $u_a^0 = 20.0 \text{ kPa}$ , 超孔隙水压力为  $u_w^0 = 40 \text{ kPa}$  (荷载作用下的土中初始超孔隙气压力、超孔隙水压力按文献[5]的方法计算所得). 计算参数的设定参考了文献[4]. 图 1 ~ 图 5 为土层表面透水透气, 底面不透水不透气边界条件计算结果, 其中: (a) 为本文半解析解结果, (b) 为解析解结果. 图 6 ~ 图 12 为土层表面透气不透水, 底面不透水不透气边界条件计算结果, 其中: (a) 为本文半解析解结果, (b) 为差分法结果. 图中时间因素  $T = k_w t / (\gamma_w m_{1k}^s H^2)$ .

### 2.1 顶面排水排气, 底面不排水不排气边界条件下固结特性分析

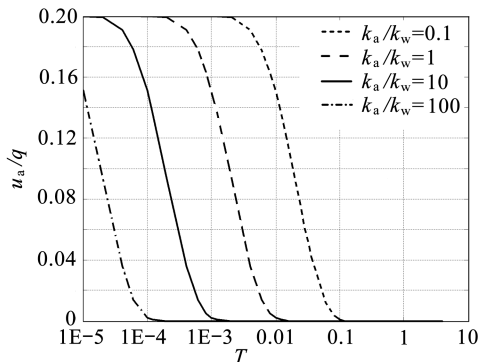
比较图 1 ~ 图 5 的 (a) 和 (b) 可知, 本文半解析解结果几乎与解析解结果一致. 证明本文的半解析方法是正确的.

1) 从图 1 中可以看出  $k_a/k_w$  对超孔隙气压力有明显的影晌,  $k_a/k_w$  越大, 消散开始得就越早; 在整个消散阶段, 曲线陡降得比较厉害, 即说明超孔隙气压力的消散是相对短时间内完成的; 另外, 还可发现, 在半对数坐标下, 不同  $k_a/k_w$  情况下的超孔隙气压力消散曲线具有几乎相同的切线斜率(消散率), 从某种程度上来说, 各曲线之间类似于简单的平移.

2) 从图 2 中可以看出, 在固结初期,  $k_a/k_w$  越小, 超孔隙水压力的消散就开始得越迟, 类似于图 1 超孔隙气压力消散; 而在后期(超孔隙气消散结束后), 无论  $k_a/k_w$  取值如何, 超孔隙水压

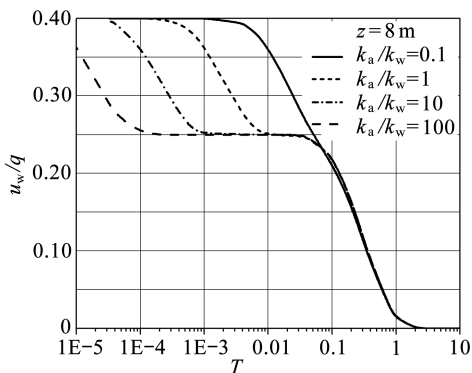


(a) 半解析解结果

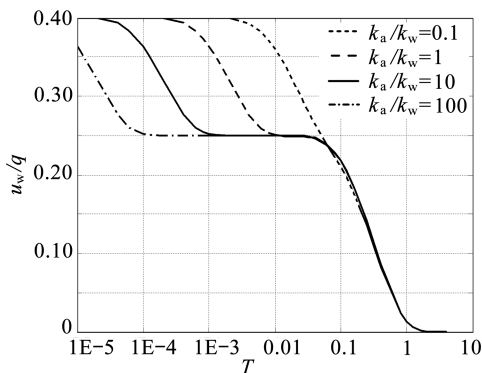


(b) 解析解结果

图1 不同  $k_a/k_w$  条件下土中超孔隙气压力  $u_a/q$  随时间  $T$  的变化

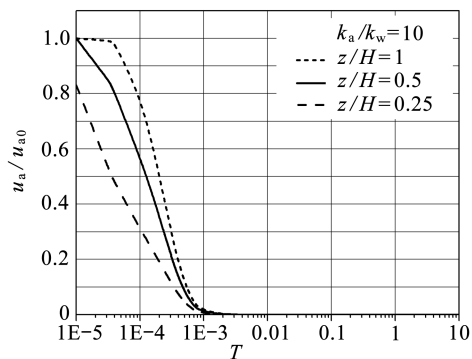


(a) 半解析解结果

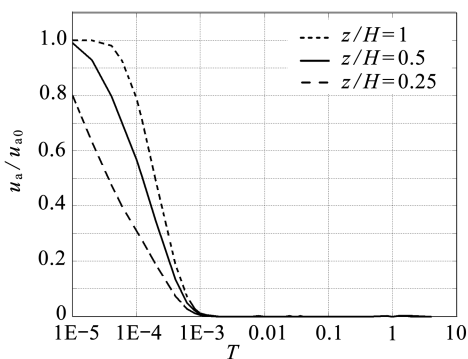


(b) 解析解结果

图2 不同  $k_a/k_w$  条件下土中超孔隙水压力  $u_w/q$  随时间  $T$  的变化



(a) 半解析解结果



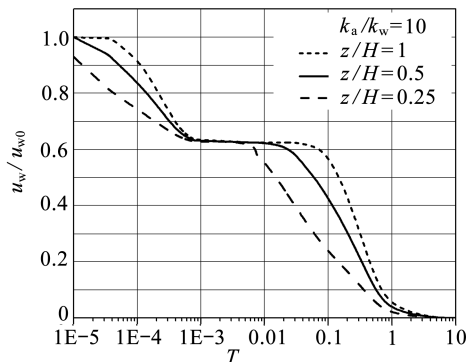
(b) 解析解结果

图3  $k_a/k_w = 10$  时不同  $z/H$  处土中超孔隙气压力  $u_a/u_a^0$  随时间  $T$  的变化

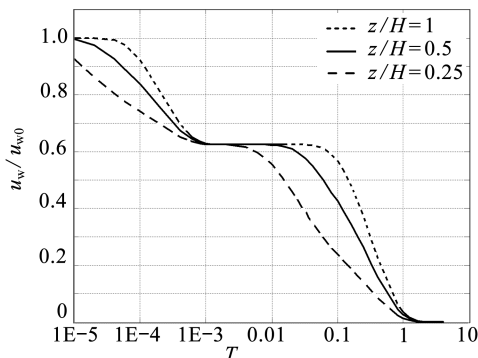
力的消散曲线都趋于一致,这主要是由于超孔隙气压力在后期已消散结束所造成的。

3) 从图3可以发现,越接近顶面超孔隙气压力开始消散得越早,这主要是由于土层顶面排水排气,加压后,顶面的超孔隙气体可以较快地排出;而土层底面不排水不排气,该处的孔隙气体不可能直接穿过底面边界而排出,它的渗透路径最终必须回到顶面。从这一角度来看,深度越深,超孔隙气体的渗透路径就越长,相应地超孔隙气压力消散开始得也就越缓慢。

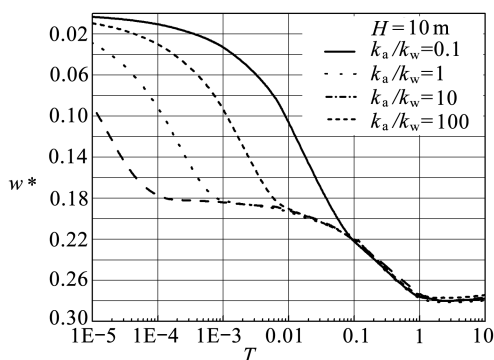
4) 从图4可以发现,超孔隙水顶面处先开始消散,底面处最后开始。另外消散曲线大致呈



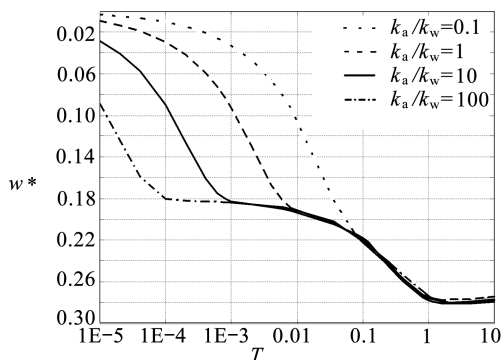
(a) 半解析解结果



(b) 解析解结果

图4  $k_a/k_w = 10$  时不同  $z/H$  处土中超孔隙水压力  $u_w/u_w^0$  随时间  $T$  的变化

(a) 半解析解结果



(b) 解析解结果

图5 不同  $k_a/k_w$  条件下土层沉降  $w^* = w/(m_{ik}^s qH)$  随时间  $T$  的变化

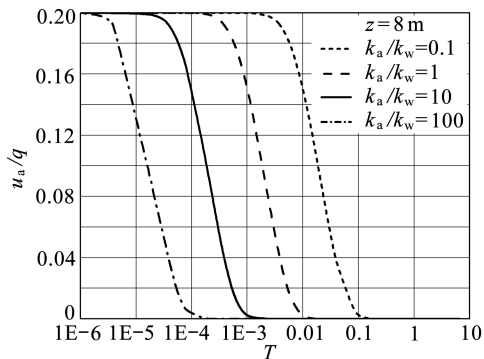
双S型,当  $k_a/k_w > 1$  时,都有一段相对平缓的过渡区段,本文称之为“平台期”, $k_a/k_w$  越大,这一“平台期”越长;对照图3我们可以发现:在超孔隙气压力消散为0的时刻,刚好是这一平缓区段的开始时刻,这也是消散曲线前期与后期的分界点:前期主要由超孔隙气压力的消散控制,后期主要由超孔隙水压力的消散控制。“平台期”长短还随深度变化,相同  $k_a/k_w$  情况下:越接近排气排水面,“平台期”越短,随着距排气排水面距离增大,“平台期”增长。

5) 图5为不同  $k_a/k_w$  情况下土层沉降随时间的变化规律,其中沉降无量纲形式  $w^* = w/(m_{ik}^s qH)$  表示。从图中可以看出:当  $k_a < k_w$  时(即  $k_a/k_w = 0.1$ )时,沉降随时间变化曲线呈S型,类似于饱和土固结沉降曲线;而当  $k_a > k_w$  时,随  $k_a/k_w$  值的增大,沉降随时间变化曲线由S型逐渐过渡成双S型。这是由于土的前期固结沉降主要是由超孔隙气压力的消散引起的,而后期土的固结沉降主要是超孔隙水压力消散引起的。当  $k_a/k_w$  较大时,初期超孔隙气压力消散得非常快;当超孔隙气压力消散结束后,超孔隙水消散出现平缓段, $k_a/k_w$  越大,平缓段越长,土的沉降曲线将出现减缓趋势;平缓段结束后孔隙水继续消散且不受  $k_a/k_w$  的影响,土的沉降曲线趋于一致。

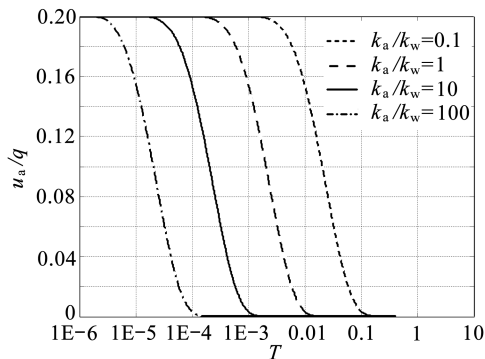
## 2.2 顶面排气不排水,底面不排水不排气边界条件下固结特性分析

比较图6~图11的(a)和(b)可知,本文半解析解结果几乎与有限差分法结果一致。证明本文的半解析解方法是正确的,精度较高。

1) 图6、图8、图10为顶面排气不排水,底面不排水不排气时,超孔隙气压力消散的  $u_a/q$ ,

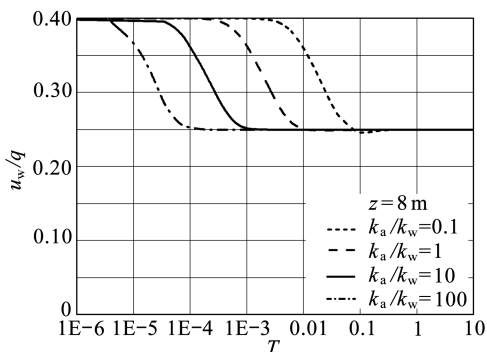


(a) 半解析解结果

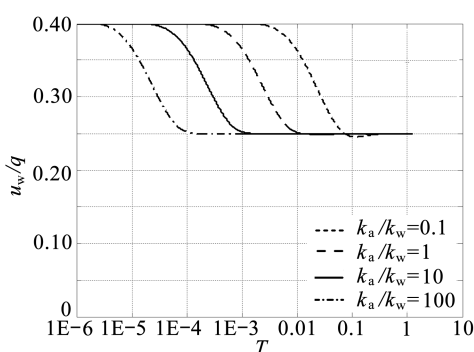


(b) 有限差分方法结果

图6 不同  $k_a/k_w$  条件下土中超孔隙气压力  $u_a/q$  随时间  $T$  的变化

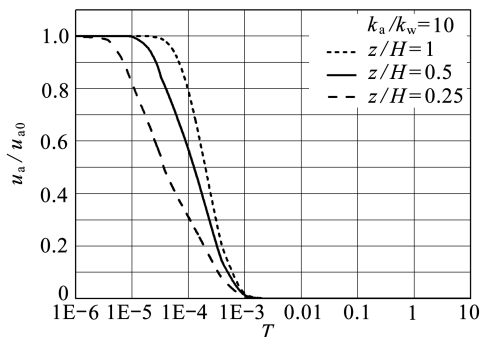


(a) 半解析解结果

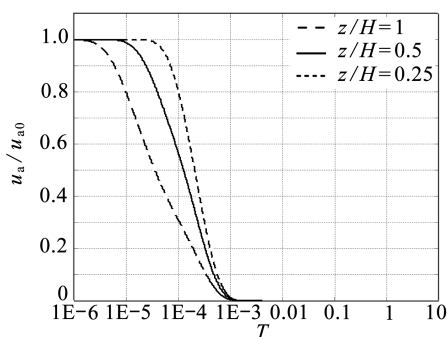


(b) 有限差分方法结果

图7 不同  $k_a/k_w$  条件下土中超孔隙气压力  $u_w/q$  随时间  $T$  的变化



(a) 半解析解结果



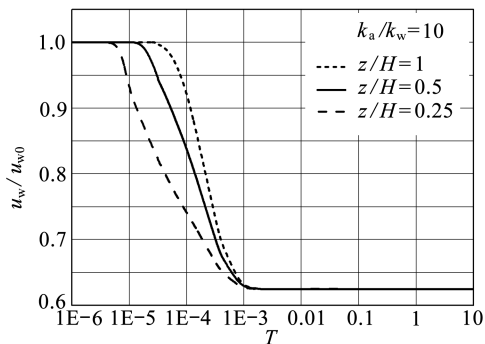
(b) 有限差分方法结果

图8  $k_a/k_w = 10$  时不同  $z/H$  处土中超孔隙气压力  $u_a/u_{a0}$  随时间  $T$  的变化

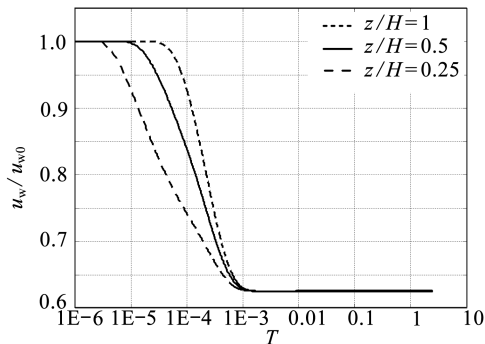
$u_a/u_{a0}$  图。此种边界条件下超孔隙气压的消散,与顶面排水排气且底面不排水不排气边界条件下超孔隙气压的消散是完全相同的(相同  $k_a/k_w$  下,  $u_a/q, u_a/u_{a0}$  图是完全相同的),也就是说:当顶面排气时,排水或不排水对超孔隙气压的消散不产生影响。

2) 图7是顶面排气不排水,底面不渗透时,超孔隙水压力消散的  $u_w/q$  图,对比顶面排水排气,底面不排水不排气的情况,超孔隙水压力的消散在超孔隙气压消散结束之前是相同的。由于顶面不排水,当超孔隙气压消散结束后,超孔隙水压不再消散,  $u_w/q$  恒定为某一值。

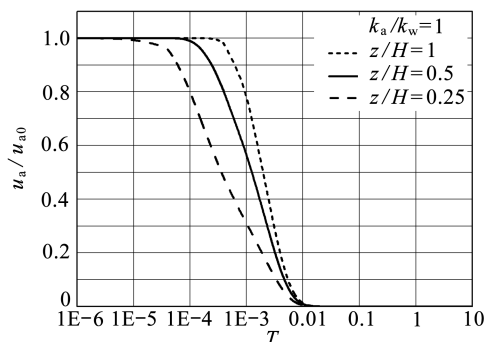
3) 图9、图11是顶面排气不排水,底面不排水不排气时,超孔隙水压力消散的  $u_w/u_{w0}$  图。



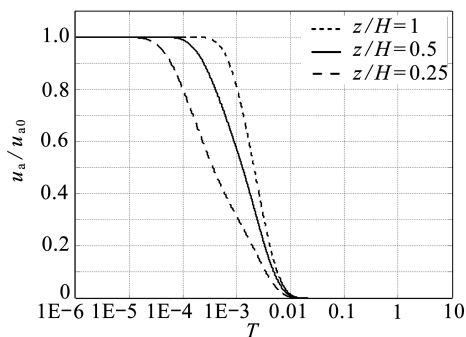
(a) 半解析解结果



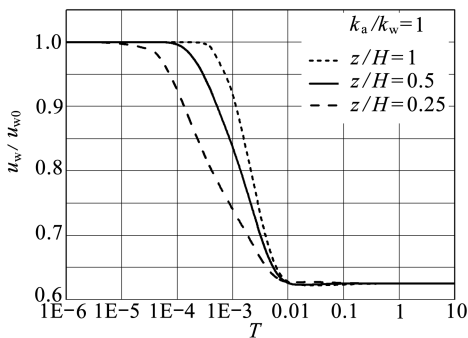
(b) 有限差分方法结果

图9  $k_a/k_w = 10$  时不同  $z/H$  处土中超孔隙气压力  $u_w/u_{w0}$  随时间  $T$  的变化

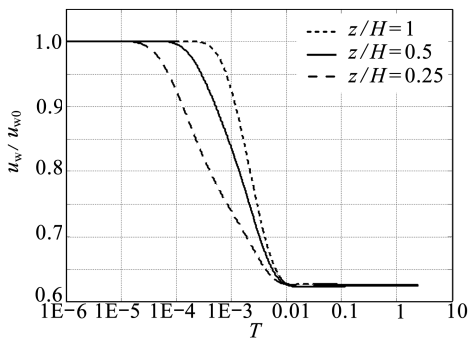
(a) 半解析解结果



(b) 有限差分方法结果

图10 不同  $k_a/k_w = 1$  时不同  $z/H$  处土中超孔隙气压力  $u_a/u_{a0}$  随时间  $T$  的变化

(a) 半解析解结果



(b) 有限差分方法结果

图11 不同  $k_a/k_w = 1$  时不同  $z/H$  处土中超孔隙气压力  $u_w/u_{w0}$  随时间  $T$  的变化

当  $k_a/k_w = 10$  时,在超孔隙气压消散完后,超孔隙水压在一段平缓段后将有微小的调整阶段,最后趋于平衡;当  $k_a/k_w = 1$  时,在超孔隙气压消散完后,超孔隙水压也有微小的调整阶段,最后趋于平衡, $k_a/k_w$  越大,调整之前的平缓段会稍长一些。消散结束后的局部调整如图 12、图 13。

### 3 结 论

1) 采用 Crump 方法,实现 Laplace 逆变换可得到多种边界条件下时间域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力、土层沉降的半解析解。



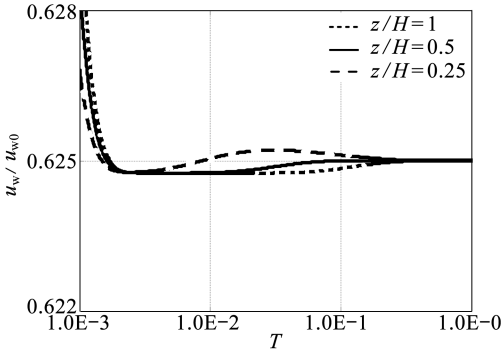


图 12  $k_a/k_w = 10$  时超孔隙气  
消散结束后的局部调整

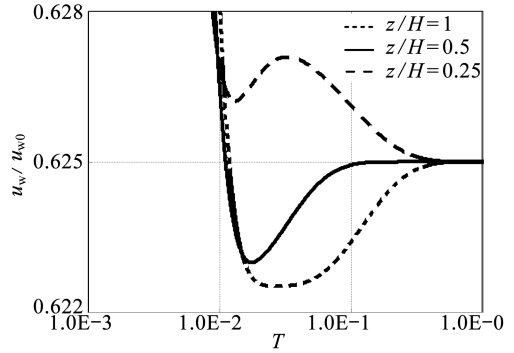


图 13  $k_a/k_w = 1$  时超孔隙气  
消散结束后的局部调整

2) 在单面排气排水情况下,进行了半解析解与解析解结果的对比,验证了本文半解析解方法的正确性。

3) 在单面排气不排水情况下,进行了半解析解与由用 Fredlund 提出的有限差分方法计算的结果对比,结果表明本文采用 Crump 方法实现 Laplace 逆变换,精度较高。

4) 对单面排水排气及单面排气不排水两种边界条件下的非饱和土固结特性进行了分析。

半解析法具有编程简单、输入数据方便的特点,为快速计算提供了方便。采用本文半解析方法可以得到均布瞬时加荷,多种边界条件下的半解析解,克服了解析解很难直接求解的局限性。

由于非饱和土固结的研究还不成熟,得出的半解析解可为非饱和土固结研究提供有用的第一近似值,此研究具有重要的学术意义及工程应用价值。

## 附录 A Crump 的 Laplace 逆变换方法 (Crump, 1976<sup>[12]</sup>; Durbin, 1973<sup>[13]</sup>)

假设  $f(t)$  是  $t$  的函数,当  $t > 0$  时  $f(t) = 0$ , 并且可分段连续, 即当  $t \rightarrow \infty$  时  $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ ,  $\alpha$  为指数,  $f(t)$  的 Laplace 转换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (A1)$$

其中  $F(s)$  被界定为  $\text{Re}(s) > \alpha$ 。逆变换是由 Bromwich 积分定义的:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad t > 0, \quad (A2)$$

$s = a + i\omega$ , 其中  $a$  可以是任何比  $\alpha$  大的实数。

Crump<sup>[12]</sup>的方法是在 Durbin<sup>[13]</sup>的 Fourier 级数求和基础上逼近的:

$$f(t_j) \approx \frac{e^{\alpha t_j}}{\tau} \left[ \frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \text{Re} \left( F\left(a + \frac{k\pi i}{\tau}\right) \right) \cos \frac{k\pi t_j}{\tau} - \text{Im} \left( F\left(a + \frac{k\pi i}{\tau}\right) \right) \sin \frac{k\pi t_j}{\tau} \right\} \right]. \quad (A3)$$

假设我们通过用  $2N+1$  个  $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$  ( $m = 1, 2, \dots, 2N+1$ ) 的总和来近似求出  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的总和。我们定义  $\varepsilon_0^{(m)} = 0$ ,  $\varepsilon_1^{(m)} = S_m$  来确定  $\varepsilon_{p+1}^{(m)} = \varepsilon_{p-1}^{(m+1)} + \{\varepsilon_p^{(m+1)} - \varepsilon_p^{(m)}\}^{-1}$ 。然后序列  $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \varepsilon_5^{(1)}, \dots, \varepsilon_{2N+1}^{(1)}$  是一串逼近总和的近似序列, 它比那些没有转换过的序列  $S_1, S_2, \dots, S_{2N+1}$  要更接近总和。

在我们的研究中, 这些数据要被用到:

1)  $\tau = t_{\text{fac}} \times \max(0.01, t_j)$ , 其中  $t_{\text{fac}} = 0.8$ ;

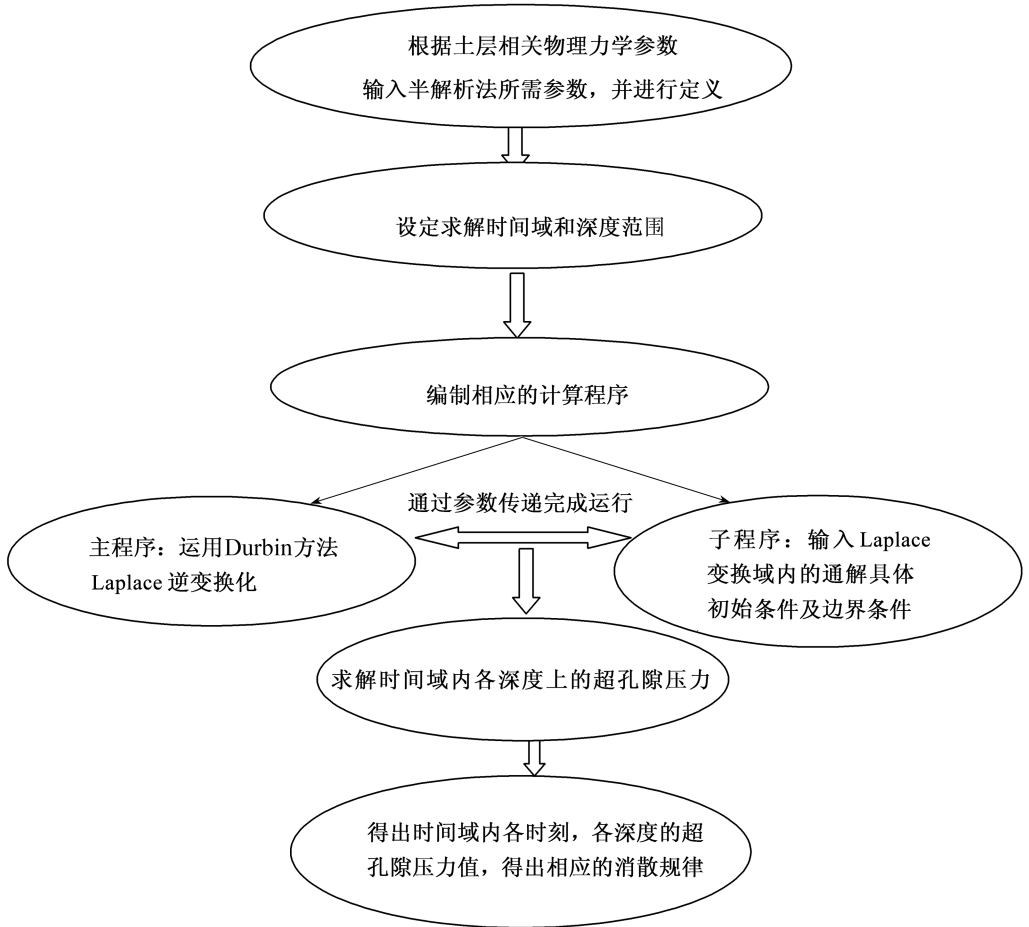
2)  $a = \alpha_b - \ln(0.1 \times E_t) / (2\tau)$ , 其中  $\alpha_b$  必须和  $\alpha$  的值相同或者稍稍的大一点,  $E_t$  是根据 Laplace 逆变换

所获得的允许误差,因此  $E_r$  必须在  $0 \leq E_r < 1.0$  的区间内;

3)  $N = 10 \sim 20$ .

我们通常选取时间间隔  $10^{-6} < t < 10$  来进行优化算法以获得数值结果.

### 附录 B 求解孔隙压力流程图



### 参考文献:

- [1] Blight G E. Strength and consolidation characteristics of compacted soils [D]. England: University of London, 1961.
- [2] Scott R F. *Principles of Soil Mechanics* [M]. USA: Addison Wesley Publishing Company, 1963.
- [3] Barden L. Consolidation of compacted and unsaturated clays [J]. *Geotechnique*, 1965, 15 (3): 267-286.
- [4] Fredlund D G, Hasan J U. One-dimensional consolidation theory unsaturated soils [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1979, 17(3): 521-531.
- [5] Fredlund D G, Rahardjo H. *Soil Mechanics for Unsaturated Soil* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1993.

- [6] 杨代泉. 非饱和土广义固结理论及其数值模拟与试验研究[D]. 博士学位论文. 南京: 南京水利科学研究所, 1990.
- [7] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论( I ) [J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(2): 127-137.
- [8] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论( II ) [J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(8): 687-698.
- [9] 沈珠江. 非饱和土简化固结理论及其应用[J]. 水利水运工程学报, 2003, **4**: 1-6.
- [10] 殷宗泽, 王保田, 余湘娟, 等. 土工原理[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007: 350-364.
- [11] 秦爱方, 陈光敬, 谈永卫, 等. 非饱和土层一维固结问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(10): 1208-1218.
- [12] Crump K S. Numerical inversion of Laplace transform using a Fourier series approximation [J]. *ACM*, 1976, **23**: 89-96.
- [13] Durbin F. Numerical inversion of the Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method [J]. *The Computer Journal*, 1973, **17**(4): 371-376.

## Semi-Analytical Solution to One-Dimensional Consolidation in Unsaturated Soils

QIN Ai-fang<sup>1</sup>, SUN De-an<sup>1</sup>, TAN Yong-wei<sup>2,3</sup>

(1. *Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;*

2. *Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;*

3. *Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)*

**Abstract:** A series of semi-analytical solutions to one-dimensional consolidation in unsaturated soil were obtained. First, the air governing equation by Fredlund for unsaturated soil consolidation was simplified. Then, by applying the Laplace transform and Cayley-Hamilton theorem to the air and water governing equations of simplified, Darcy's law and Fick's law, the transfer function between the state vectors at top and at any depth was constructed. Finally, by introducing the boundary conditions, the excess pore-water pressure and excess pore-air pressure and the soil settlement were obtained under several kinds of boundary conditions under the large-area uniform instantaneous loading. By adopting the Crump method, the inversion of Laplace transform was performed, and the semi-analytical solutions to the excess pore-water and excess pore-air pressures and the soil settlement were obtained in the time domain. In the case of one surface which is permeable to air and water, comparisons between the semi-analytical solutions and the analytical solutions indicate that the semi-analytical solutions are correct by a typical example. In the case of one surface which is permeable to air but impermeable to water, comparisons between the semi-analytical solutions and the results of the finite difference method indicate that the semi-analytical solution is correct too, else the consolidation characteristics are analysed. The research is useful to the studies on unsaturated soil consolidation.

**Key words:** one-dimensional consolidation; unsaturated soil; excess pore-water pressure; excess pore-air pressure; semi-analytical solution