

1:1 内共振悬索的二维奇异性分析*

秦朝红, 陈予恕, 李 军

(哈尔滨工业大学 航天学院 137 信箱, 哈尔滨 150001)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 对 1:1 内共振悬索系统的二维分岔方程进行了研究. 根据奇异性理论得到了 3 种情况下开折系统的转迁集. 转迁集将整个参数空间分成了不同的保持域, 得到了各个保持域上的分岔图.

关键词: 二维分岔系统; 悬索; 奇异性分析

中图分类号: O322 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.02.002

引 言

悬索由于其本身低阻尼、轻质量、大柔度等特点,在海洋工程领域、输电导线领域和大跨度桥梁工程领域等的应用越来越广泛,其非线性动力学特性的研究也得到了人们越来越多的关注. 1991 年, Rao 和 Iyengar^[1] 研究了周期激励下悬索的内共振和非线性响应. 1992 年, Lee 等^[2] 研究了悬索的内共振,得到了悬索的二阶近似解. 1995 年 Benedettini 等^[3] 利用多尺度法对悬索的 4 个自由度模型进行了分析,考虑了 1:1 内共振和 1:2 内共振同时存在的情况. 2002 年, Zhang 等^[4] 研究了悬索的全局分岔及混沌动力学. 2006 年, 王连华等^[5] 研究了 1:3 内共振悬索系统在外激励作用下的非线性响应,对其平均方程的稳态解、周期解及非线性响应进行了分析. 2007 年, 赵跃宇等^[6] 对 1:3 内共振悬索系统的二模态非线性响应进行了研究,讨论了系统参数对稳态解的影响. 2008 年, 赵跃宇等^[7] 研究了悬索的多重内共振,分析了稳态解的稳定性及响应的分岔现象.

在以往的研究中,都是将其他系统参数固定后只保留分岔参数来研究其分岔特性. 而对于实际的系统,其难免会受到一些扰动,系统受到扰动后,其分岔行为是否会发生改变,这是本文要解决的问题. 另外,到目前为止利用奇异性理论来进行分岔分析主要应用在单自由度动力学系统当中. 而对于内共振系统,其自由度数至少为 2. 尽管在 1985 年 Golubitsky 和 Schaeffer^[8] 已经将其异性理论推广到了 2 自由度系统当中,但其应用却很少. 本文应用二维奇异性理论对 1:1 内共振悬索的二维分岔方程进行了研究,分析了阻尼 μ_2 、调谐参数 σ_2 和激励幅值 f_3 对悬索分岔特性的影响.

* 收稿日期: 2009-08-04; 修订日期: 2010-01-06

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10632040)

作者简介: 秦朝红(1979—),女,山东人,博士生(联系人. E-mail: zhh-qin@163.com).

1 1:1 内共振悬索系统的分岔方程

根据文献[9],悬索的无量纲运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{q}_2 + 2\varepsilon\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 + \varepsilon\alpha_2q_2^2 + \varepsilon\beta_2q_3^2 + \varepsilon\gamma_2q_2^3 + \varepsilon\eta_2q_2^2q_3 = 0, \\ \ddot{q}_3 + 2\varepsilon\mu_3\dot{q}_3 + \omega_3^2q_3 + \varepsilon\alpha_3q_2q_3 + \varepsilon\gamma_3q_3^3 + \varepsilon\eta_3q_2^2q_3 = 2\varepsilon f_3 \cos\Omega t, \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= b_2/b_1, \quad \varepsilon\alpha_2 = b_3/b_1, \quad \varepsilon\beta_2 = b_4/b_1, \quad \varepsilon\gamma_2 = b_5/b_1, \quad \varepsilon\eta_2 = b_6/b_1, \\ 2\varepsilon\mu_2 &= \zeta_2/b_1, \quad \omega_3^2 = c_2/c_1, \quad \varepsilon\alpha_3 = c_3/c_1, \quad \varepsilon\gamma_3 = c_4/c_1, \quad \varepsilon\eta_3 = c_5/c_1, \\ 2\varepsilon\mu_3 &= \zeta_3/c_1, \quad 2\varepsilon f_3 \cos\Omega t = Q_0/c_1, \end{aligned}$$

ω_2, ω_3 为固有频率, μ_2, μ_3 为阻尼系数, $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3, \eta_2$ 和 η_3 为非线性系数, 其他各参数参见文献[9]. 在文献[9]中, 给定了一组悬索的材料参数和几何参数, 计算后得其固有频率为 $\omega_2 = 0.314408$ 和 $\omega_3 = 0.314159$, 也就是说 ω_2 和 ω_3 非常接近.

因此, 考虑了悬索 1:1 内共振的情况. 引入调谐参数 σ_1 和 σ_2 , 假设

$$\omega_2 = \omega_3 + \varepsilon\sigma_1, \quad \Omega = \omega_3 + \varepsilon\sigma_2. \quad (2)$$

应用多尺度法可得到其平均方程^[9]为

$$\begin{cases} a_2' = -\mu_2 a_2 - \frac{\eta_2 a_3^2 a_2}{8\omega_2} \sin(2\lambda_2 - 2\lambda_3), \\ a_3' = -\mu_3 a_3 + \frac{\eta_3 a_2^2 a_3}{8\omega_3} \sin(2\lambda_2 - 2\lambda_3) + \frac{f_3}{\omega_3} \sin\lambda_3, \\ a_2(\sigma_2 - \sigma_1 - \lambda_2') = \frac{\eta_2 a_3^2 a_2}{4\omega_2} + \frac{3\gamma_2 a_2^3}{8\omega_2} + \frac{\eta_2 a_3^2 a_2}{8\omega_2} \cos(2\lambda_2 - 2\lambda_3), \\ a_3(\sigma_2 - \lambda_3') = \frac{3\gamma_3 a_3^3}{8\omega_3} + \frac{\eta_3 a_2^2 a_3}{4\omega_3} + \frac{\eta_3 a_2^2 a_3}{8\omega_3} \cos(2\lambda_2 - 2\lambda_3) - \frac{f_3}{\omega_3} \cos\lambda_3, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\lambda_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)T_1 - \theta_2, \quad \lambda_3 = \sigma_2 T_1 - \theta_3, \quad \omega_2 \approx \omega_3.$$

从方程(3)可以得到其分岔方程为

$$\begin{cases} a_2^2 \mu_2^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_2 + \frac{\eta_2 a_3^2}{4\omega_3} + \frac{3\gamma_2 a_2^2}{8\omega_3} \right)^2 a_2^2 - \frac{\eta_2^2 a_3^4}{64\omega_3^2} a_2^2 = 0, \\ \left(\frac{\mu_2 \eta_3 a_2^2}{\omega_3} + \frac{\mu_3 \eta_2 a_3^2}{\omega_3} \right)^2 + \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \eta_3 a_2^2}{\omega_3} + \frac{3\eta_3 \gamma_2 a_2^4}{8\omega_3^2} + \frac{\sigma_2 \eta_2 a_3^2}{\omega_3} - \frac{3\eta_2 \gamma_3 a_3^4}{8\omega_3^2} \right]^2 - \\ \frac{\eta_2^2 f_3^2 a_3^2}{\omega_3^4} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

令

$$\lambda = \sigma_2, \quad \varepsilon_1 = \mu_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\eta_2^2 f_3^2}{\omega_3^2 \eta_3^2},$$

$$m_1 = \frac{3\eta_2^2}{64\omega_3^2}, \quad m_2 = \frac{9\gamma_2^2}{64\omega_3^2}, \quad m_3 = \frac{\eta_2}{2\omega_3}, \quad m_4 = \frac{3\gamma_2}{4\omega_3}, \quad m_5 = \frac{3\gamma_2 \eta_2}{16\omega_3^2},$$

$$n_1 = \frac{\mu_3 \eta_2}{\eta_3}, n_2 = \frac{\eta_2^2}{\eta_3^2}, n_3 = \frac{9\eta_2^2 \gamma_3^2}{64\omega_3^2 \eta_3^2}, n_4 = \frac{2\eta_2}{\eta_3}, n_5 = \frac{3\eta_2 \gamma_3}{4\omega_3 \eta_3},$$

$$n_6 = \frac{3\eta_2 \gamma_2}{4\omega_3 \eta_3}, n_7 = \frac{9\eta_2 \gamma_2 \gamma_3}{32\omega_3^2 \eta_3}, n_8 = \frac{3\eta_2^2 \gamma_3}{4\omega_3 \eta_3^2},$$

则方程(4)变为

$$\begin{cases} G_1 = [\varepsilon_1^2 + (\sigma_1 - \lambda)^2 + m_1 a_3^4 + m_2 a_2^4 + m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_3^2 + \\ m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 + m_5 a_2^2 a_3^2] a_2^2 = 0, \\ G_2 = \varepsilon_1^2 a_2^4 + n_1 a_3^4 + 2n_1 \varepsilon_1 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_1 - \lambda)^2 a_2^4 + m_2 a_2^8 + n_2 \lambda^2 a_3^4 + n_3 a_3^8 + \\ m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^6 + n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2^2 a_3^2 - n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 a_3^4 + n_6 \lambda a_2^4 a_3^2 - \\ n_7 a_2^4 a_3^4 - n_8 \lambda a_3^6 - \varepsilon_2 a_3^2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

根据方程(5), 可将 G_1 和 G_2 看成是 g_1 和 g_2 的一个开折,

$$\begin{cases} g_1 = [(\sigma_1 - \lambda)^2 + m_1 a_3^4 + m_2 a_2^4 + m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_3^2 + \\ m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 + m_5 a_2^2 a_3^2] a_2^2 = 0, \\ g_2 = n_1 a_3^4 + (\sigma_1 - \lambda)^2 a_2^4 + m_2 a_2^8 + n_2 \lambda^2 a_3^4 + n_3 a_3^8 + m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^6 + \\ n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2^2 a_3^2 - n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 a_3^4 + n_6 \lambda a_2^4 a_3^2 - n_7 a_2^4 a_3^4 - n_8 \lambda a_3^6 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中 λ 为分岔参数, ε_1 和 ε_2 为开折参数.

2 1:1 内共振系统的二维奇异性分析

将方程(5)分别对 a_2, a_3 和 λ 求导, 可得到下面的关系:

$$\begin{cases} G_{1a_2} = [2\varepsilon_1^2 + 2(\sigma_1 - \lambda)^2 + 2m_1 a_3^4 + 6m_2 a_2^4 + 2m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_3^2 + \\ 4m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 + 4m_5 a_2^2 a_3^2] a_2, \\ G_{1a_3} = [4m_1 a_3^2 + 2m_3 (\sigma_1 - \lambda) + 2m_5 a_2^2] a_3 a_2^2, \\ G_{1\lambda} = [-2(\sigma_1 - \lambda) - m_3 a_3^2 - m_4 a_2^2] a_2^2, \\ G_{2a_2} = [4\varepsilon_1^2 a_2^2 + 4n_1 \varepsilon_1 a_3^2 + 4(\sigma_1 - \lambda)^2 a_2^2 + 8m_2 a_2^6 + 6m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^4 + \\ 2n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_3^2 - 2n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_3^4 + 4n_6 \lambda a_2^2 a_3^2 - 4n_7 a_2^2 a_3^4] a_2, \\ G_{2a_3} = [4n_1^2 a_3^2 + 4n_1 \varepsilon_1 a_2^2 + 4n_2 \lambda^2 a_3^2 + 8n_3 a_3^6 + 2n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2^2 - \\ 4n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 a_3^2 + 2n_6 \lambda a_2^4 - 4n_7 a_2^4 a_3^2 - 6n_8 \lambda a_3^4 - 2\varepsilon_2] a_3, \\ G_{2\lambda} = -2(\sigma_1 - \lambda) a_2^4 + 2n_2 \lambda a_3^4 - m_4 a_2^6 + n_4 (\sigma_1 - 2\lambda) a_2^2 a_3^2 + \\ n_5 a_2^2 a_3^4 + n_6 a_2^4 a_3^2 - n_8 a_3^6. \end{cases} \quad (7)$$

情况 1 当 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ 时, 方程(5) 中的 G_1 可变为

$$H_1 = n_1^2 a_3^4 + n_2 \lambda^2 a_3^4 + n_3 a_3^8 - n_8 \lambda a_3^6 - \varepsilon_2 a_3^2 = 0. \quad (8)$$

同样, H_1 可看成

$$h_1 = n_1^2 a_3^4 + n_2 \lambda^2 a_3^4 + n_3 a_3^8 - n_8 \lambda a_3^6 = 0 \quad (9)$$

的一个开折, 其中 λ 为分岔参数, ε_2 为开折参数.

将方程(8)分别对 a_3 和 λ 求导,可得到下面的关系:

$$\begin{cases} H_1 = n_1^2 a_3^4 + n_2 \lambda^2 a_3^4 + n_3 a_3^8 - n_8 \lambda a_3^6 - \varepsilon_2 a_3^2, \\ H_{1a_3} = 4n_1^2 a_3^3 + 4n_2 \lambda^2 a_3^3 + 8n_3 a_3^7 - 6n_8 \lambda a_3^5 - 2\varepsilon_2 a_3, \\ H_{1\lambda} = 2n_2 \lambda a_3^4 - n_8 a_3^6, \\ H_{1a_3 a_3} = 12n_1^2 a_3^2 + 12n_2 \lambda^2 a_3^2 + 56n_3 a_3^6 - 30n_8 \lambda a_3^4 - 2\varepsilon_2. \end{cases} \quad (10)$$

根据单自由度系统转迁集的定义^[8,10],方程(8)的分岔集满足

$$a_3^4 = -\frac{n_1^2}{-3n_8^2/4n_2 + 3n_3}, \lambda = \frac{n_8 a_3^2}{2n_2}, \varepsilon_2 = n_1^2 a_3^2 + n_2 \lambda^2 a_3^2 + n_3 a_3^6 - n_8 \lambda a_3^4, \quad (11)$$

滞后集满足

$$a_3^4 = -\frac{n_1^2}{9n_2 n_3^2/n_8^2 - 3n_3}, \lambda = \frac{3n_3 a_3^2}{n_8}, \varepsilon_2 = n_1^2 a_3^2 + n_2 \lambda^2 a_3^2 + n_3 a_3^6 - n_8 \lambda a_3^4. \quad (12)$$

将方程(11)和方程(12)中的 a_3 和 λ 消掉后可得其转迁集,如图1所示.

从图1可以看到, ε_2 -轴被分成了两个保持域,各部分的分岔图如图2所示.

从图2可以看到,当 $\varepsilon_2 > e_1$ 时系统会出现滞后现象,也就是说当分岔参数增大时系统的稳态解会从解的上分支跳跃到解的下分支,而当分岔参数减小时系统的稳态解会从解的下分支跳跃到解的上分支.这对悬索来说是很危险的,因此在悬索设计时,尽量不要把参数选在该区域内.

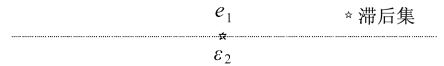
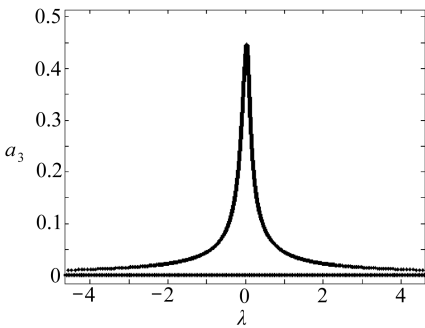
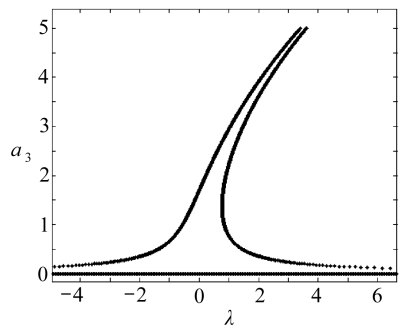


图1 情况1的转迁集



(a) $\varepsilon_2 \leq e_1$



(b) $\varepsilon_2 > e_1$

图2 情况1的分岔图

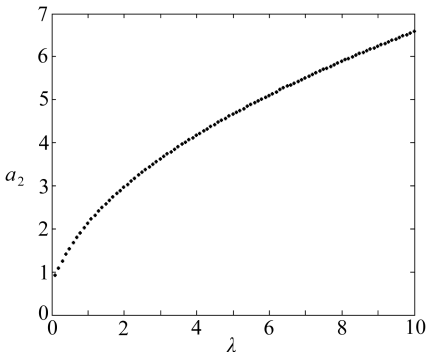


图3 情况2的分岔图

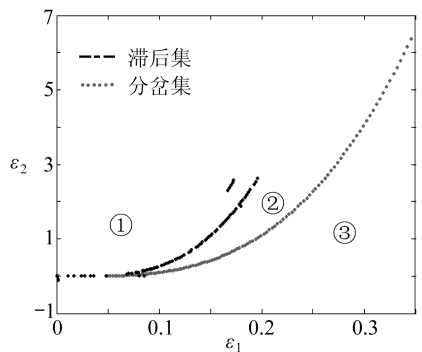
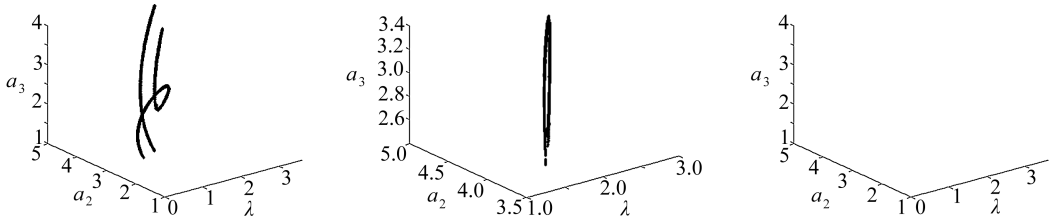


图4 情况3的转迁集

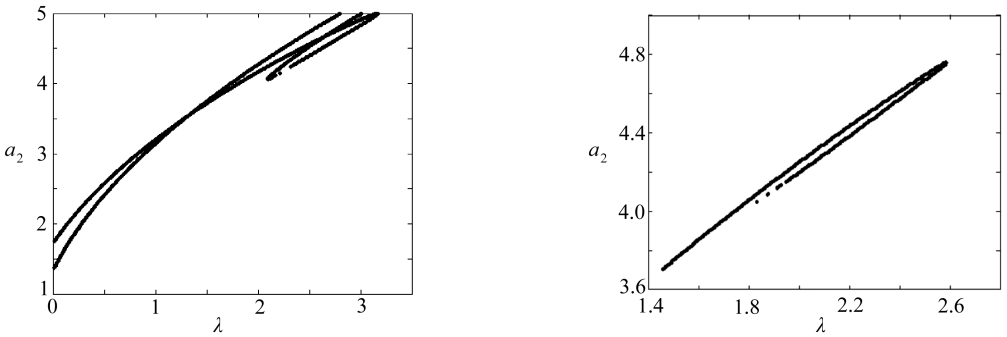
情况2 当 $a_3 = 0, a_2 \neq 0$ 时, 方程(5)中的关系变为

$$[\varepsilon_1^2 + (\sigma_1 - \lambda)^2 + m_2 a_2^4 + m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2] a_2^2 = 0. \quad (13)$$

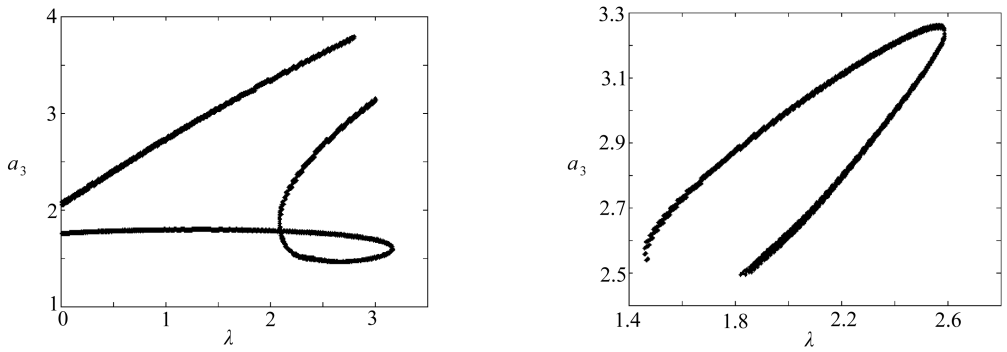
可求得方程(13)的转迁集为空集, 也就是说在整个的分岔参数区域内系统的分岔特性是相同的. 其分岔图如图3所示.



(a) 区域①、②和③的分岔图



(b) 区域①和②的分岔图在 λ - a_2 面内的投影



(c) 区域①和②的分岔图在 λ - a_3 面内的投影

图5 情况3中各保持域的分岔图

情况3 当 $a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 时, 根据二维系统转迁集的定义^[8], 方程(5)的分岔集满足

$$G_1 = 0, G_2 = 0, G_{1a_2} \cdot G_{2a_3} - G_{1a_3} \cdot G_{2a_2} = 0, G_{1a_3} \cdot G_{2\lambda} - G_{2a_3} \cdot G_{1\lambda} = 0, \quad (14)$$

滞后集满足

$$G_1 = 0, G_2 = 0, G_{1a_2} \cdot G_{2a_3} - G_{1a_3} \cdot G_{2a_2} = 0, G_{1a_2} \cdot f_2 - G_{2a_2} \cdot f_1 = 0, \quad (15)$$

其中

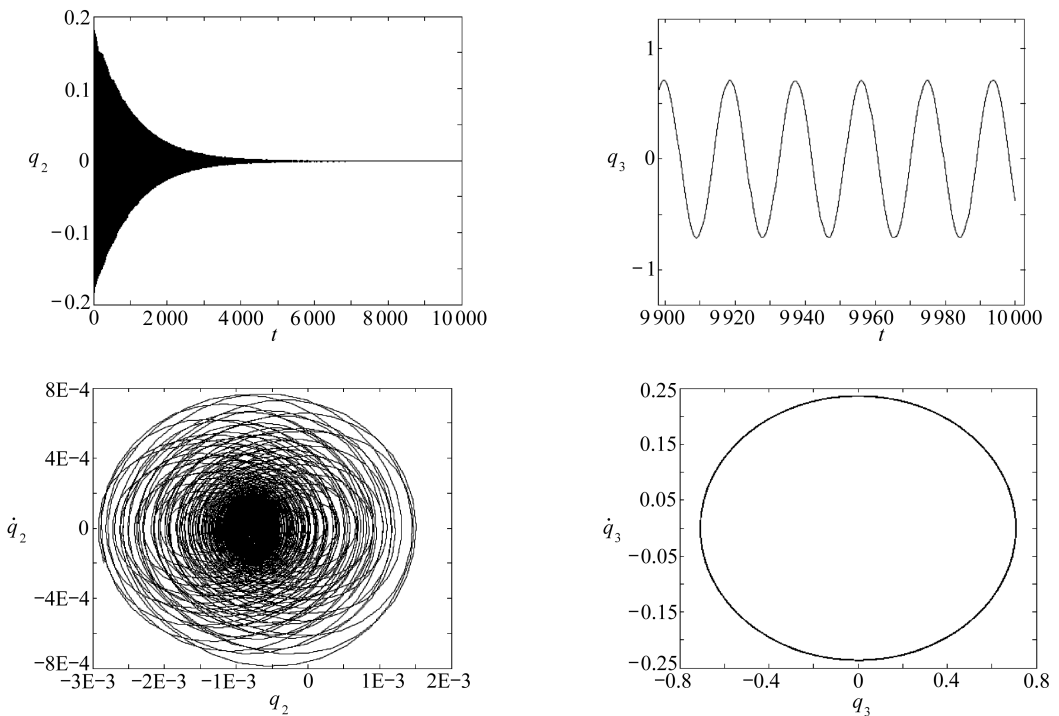
$$f_1 = 2\varepsilon_1^2 a_2' a_2' + 2(\sigma_1 - \lambda)^2 a_2' a_2' + 2m_1 a_3^4 a_2' a_2' + 8m_1 a_2 a_3^3 a_2' a_2' + 30m_2 a_2^4 a_2' a_2' + 2m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_3^2 a_2' a_2' + 4m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_2 a_3 a_2' a_2' + 12m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 a_2' a_2' +$$

$$\begin{aligned}
& 12m_5 a_2^2 a_3^2 a_2' a_2' + 8m_5 a_2^3 a_3 a_2' a_3' + 8m_1 a_2 a_3^3 a_2' a_3' + 12m_1 a_3^2 a_2^2 a_3' a_3' + \\
& 4m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_2 a_3 a_2' a_3' + 2m_3 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 a_3' a_3' + 8m_5 a_2^3 a_3 a_2' a_3' + 2m_5 a_2^4 a_3' a_3', \\
f_2 = & 12\varepsilon_1^2 a_2^2 a_2' a_2' + 4n_1 \varepsilon_1 a_2^3 a_2' a_2' + 8n_1 \varepsilon_1 a_2 a_3 a_2' a_3' + 12 (\sigma_1 - \lambda)^2 a_2^2 a_2' a_2' + \\
& 56m_2 a_2^6 a_2' a_2' + 30m_4 (\sigma_1 - \lambda) a_2^4 a_2' a_2' + 2n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2^3 a_2' a_2' + \\
& 4n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2 a_3 a_2' a_3' - 2n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_3^4 a_2' a_2' - 8n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_2 a_3^3 a_2' a_3' + \\
& 12n_6 \lambda a_2^2 a_3^2 a_2' a_2' + 8n_6 \lambda a_2^3 a_3 a_2' a_3' - 12n_7 a_2^2 a_3^4 a_2' a_2' - 16n_7 a_2^3 a_3^3 a_2' a_3' + \\
& 12n_1^2 a_2^2 a_3' a_3' + 8n_1 \varepsilon_1 a_2 a_3 a_2' a_3' + 4n_1 \varepsilon_1 a_2^2 a_3' a_3' + 12n_2 \lambda^2 a_2^2 a_3' a_3' + 56n_3 a_3^6 a_3' a_3' + \\
& 4n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2 a_3 a_2' a_3' + 2n_4 (\sigma_1 - \lambda) \lambda a_2^2 a_3' a_3' - 8n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_2 a_3^3 a_2' a_3' - \\
& 12n_5 (\sigma_1 - \lambda) a_2^2 a_3^2 a_3' a_3' + 8n_6 \lambda a_2^3 a_3 a_2' a_3' + 2n_6 \lambda a_2^4 a_3' a_3' - \\
& 16n_7 a_2^3 a_3^3 a_2' a_3' - 12n_7 a_2^4 a_3^2 a_3' a_3' - 30n_8 \lambda a_3^4 a_3' a_3' - 2\varepsilon_2 a_3' a_3', \\
G_{1a_2} \cdot a_2' + G_{1a_3} \cdot a_3' = & 0, \\
a_i' = & \left. \frac{da_i}{dt} \right|_{t=0}.
\end{aligned}$$

同样,将方程(14)和方程(15)中的 a_3 和 λ 消掉后可得其转迁集,如图4所示.从图4可以看到,转迁集将参数空间分为3个保持区域,各区域的分岔图如图5所示.

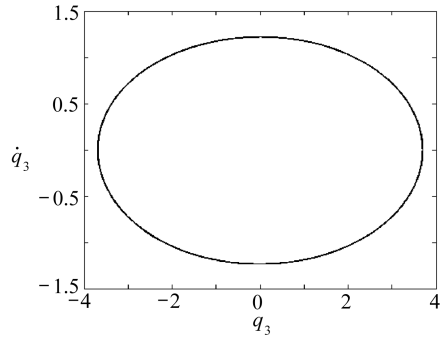
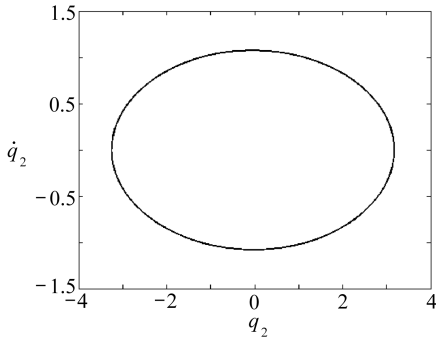
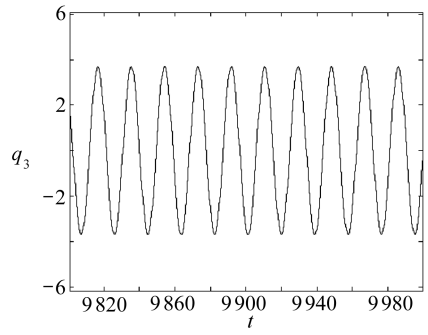
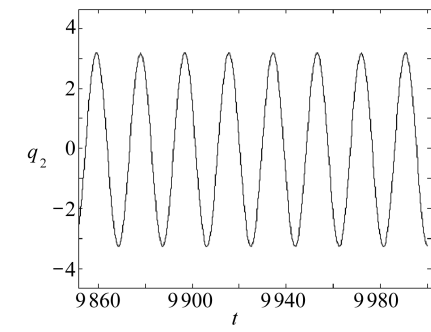
从图5可以看到,当开折参数选在区域③时,系统不存在周期解(振幅 a_2 和 a_3 是负值);当开折参数变化到区域②时,出现稳态解;当开折参数变化到区域①时,稳态解出现滞后现象.

另外,通过4阶Runge-Kutta法对系统进行了数值模拟,模拟结果如图6所示.



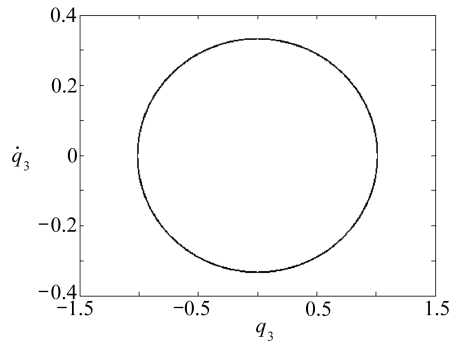
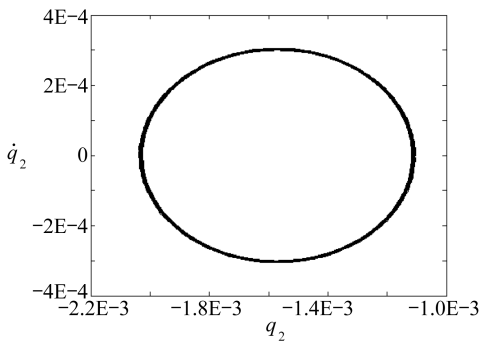
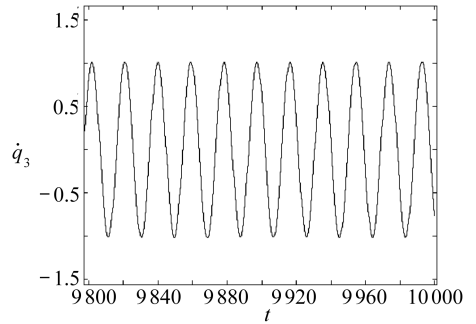
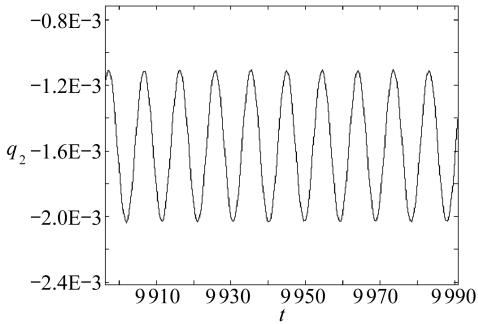
($\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 2, \lambda = 2$, 初始值 $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0.0086, -0.588, 0.0086, -0.588]$)

(a) 参数在区域①时的时间历程图和相平面图



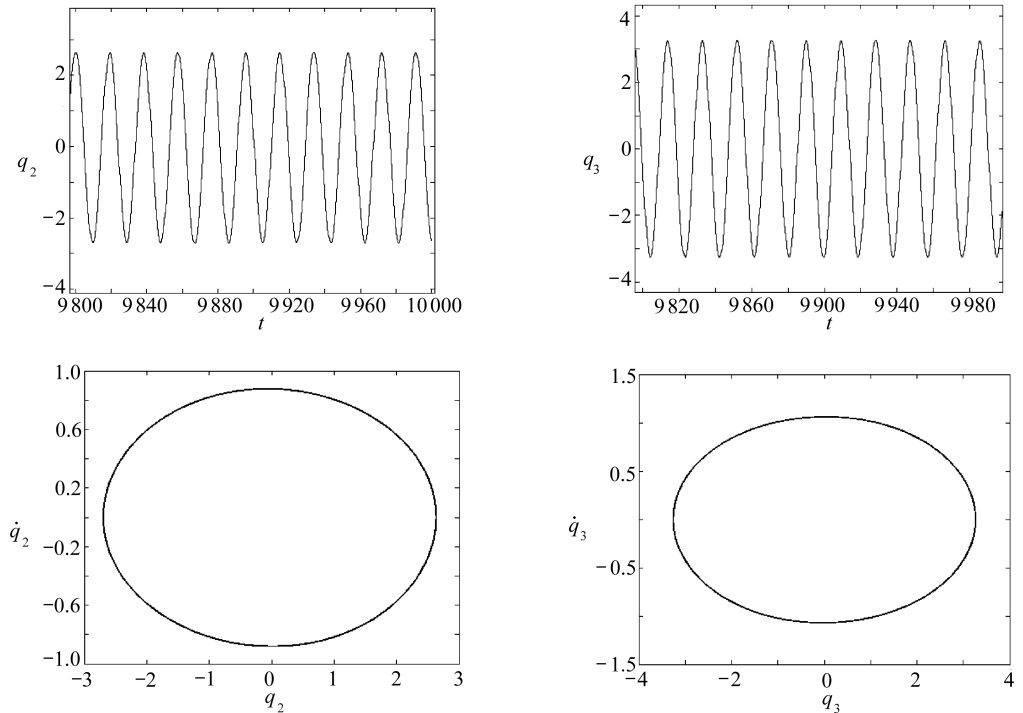
($\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 2, \lambda = 2$, 初始值 $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [4, -0.588, 4, -0.588]$)

(b) 参数在区域①时的时间历程图和相平面图



($\varepsilon_1 = 0.25, \varepsilon_2 = 2, \lambda = 1.5$, 初始值 $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [0.0086, -0.588, 0.0086, -0.588]$)

(c) 参数在区域②时的时间历程图和相平面图



($\varepsilon_1 = 0.25, \varepsilon_2 = 2, \lambda = 1.5$, 初始值 $[q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3] = [4, -0.588, 4, -0.588]$)

(d) 参数在区域②时的时间历程图和相平面图

图6 数值模拟结果

从图6可以发现,参数不管是选在在区域①还是区域②时,系统都会稳定到某一周期解,但对应不同的初值系统会稳定到分岔曲线的不同的周期解上。

3 结 论

本文对 1:1 内共振悬索系统的二维分岔方程进行了奇异性分析,根据奇异性理论得到了 3 种情况下开折系统的变迁集。变迁集将整个参数空间分成不同的保持域,得到了各个保持域上的分岔图。发现在不同的保持域内有不同的分岔模式。在以往的研究中,主要是将开折参数固定后来分析系统振动幅值的分岔特性。而至于开折参数会对系统分岔特性产生什么样的影响,人们没有一个全面的了解。本文主要对二维悬索的分岔特性进行了分析,为该系统的优化设计奠定了理论基础。

参考文献:

- [1] Rao G, Iyengar R N. Internal resonance and non-linear response of cable under periodic excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, **149**(1): 25-41.
- [2] Lee C L, Perkins C N. Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance [J]. *Nonlinear Dynamic*, 1992, **3**(6): 465-490.
- [3] Benedettini F, Rega G, Alaggio R. Non-linear oscillation of four-degree-of-freedom model of suspended cable under multiple internal resonance conditions [J]. *Journal Sound and Vibration*, 1995, **182**(5): 775-789.
- [4] Zhang W, Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external

- excitations [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, **37**(3): 505-526.
- [5] 王连华, 赵跃宇. 悬索在考虑 1:3 内共振情况下的动力学行为[J]. 固体力学学报, 2006, **27**(3): 230-236.
- [6] 赵跃宇, 李永鼎, 王连华, 等. 悬索的超谐共振与 1:3 内共振分析[J]. 动力学与控制学报, 2007, **5**(2): 112-117.
- [7] 赵跃宇, 李永鼎, 王连华. 悬索的多重内共振研究[J]. 力学季刊, 2008, **29**(1): 15-23.
- [8] Golubitsky M, Schaeffer D G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* [M]. Vol I, II. New York: Springer-Verlag, 1985, 1988.
- [9] Zhao Y Y, Wang L H, Chen D L. Non-linear dynamic analysis of the two-dimensional simplified model of an elastic cable [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **255**(1): 43-59.
- [10] Chen Y S, Leung A Y T. *Bifurcation and Chaos in Engineering* [M]. London: Springer, 1998.

Singularity Analysis of a Two-Dimensional Elastic Cable With 1:1 Internal Resonance

QIN Zhao-hong, CHEN Yu-shu, LI Jun

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, P. O. Box 137,
Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: Two-degree-of-freedom bifurcation equations for elastic cable with 1:1 internal resonance were investigated. The transition set of system was obtained by singularity theory for three cases. The whole parametric plane was divided into several different persistent regions by the transition set. The bifurcation diagrams in different persistent regions were obtained.

Key words: two-degree-of-freedom bifurcation system; elastic cable; singularity analysis