文章编号:1000-0887(2010)01-0117-10　

采用三角形面积坐标的四边形 17 节点样条单元*

陈　娟[1],　李崇君[1],　陈万吉[2,3]

(1. 大连理工大学 数学科学学院,辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024;
3. 沈阳航空工业学院 飞行器结构分析研究所,沈阳 130115)

(张鸿庆推荐)

摘要:　利用二元 4 次样条插值基和三角形面积坐标构造 17 节点四边形单元. 这个新单元具有 4 次完备阶,通过一些算例测试表明了该单元有较高精度并对网格畸变不敏感.

关　键　词:　17 节点样条单元;　二元样条插值基;　三角形面积坐标;　B 网方法;　4 次完备阶

中图分类号:　O241;O343　　　**文献标志码:**　A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.013

引　　言

位移法是指将位移假定为直角坐标中的简单多项式,待定系数为广义坐标参数. 构造协调四边形单元常用的方法是等参变换. 一般来说,有 2 种常用的等参元族,Serendipity 元,如 Q8/Q12/Q17,和 Lagrange 元,如 Q9/Q16/Q25[1]. 通常 Serendipity 元不含或者含有少量的内部节点,因此,Serendipity 元具有节点数少于 Lagrange 元的优点. 例如 4 次单元 Q25 比 Q17 多了 8 个节点. 然而 Serendipity 元有一个众所周知的缺点,当网格畸变时精度明显降低. Lee 和 Bathe[2] 对等参元的精度受网格畸变的影响做了深入的研究. 他们指出当单元从矩形变成不规则的四边形时,直角坐标 (x,y) 和等参坐标(ξ,η) 之间的变换从线性变为非线性,从而导致位移场关于直角坐标的完备阶降低. 因此 Serendipity 元虽然有等参坐标的高次项,但对直角坐标,Q8 和 Q12 只有 1 次完备阶,Q17 只有 2 次完备阶.

为了克服等参元的网格敏感性,Long 和 Cen 等利用四边形面积坐标方法构造了 1 族 4 ~ 8 节点的四边形单元[3-4]. 李勇东等提出精化不协调平面 8 节点元[5]. Li 等构造了分别具有 2 次和 3 次完备阶的 8 节点和 12 节点样条单元[6]①②. 这些单元在克服网格畸变和提高精度方面表现出良好的性能. 另外,采用高阶单元也是提高精度的一种有效方法. Rathod 等推导了矩形

---

* 收稿日期:　2009-07-20; 修订日期:　2009-12-04
　基金项目:　国家自然科学基金资助项目(60533060; 10672032; 10726067)
　作者简介:　陈娟(1982—),女,甘肃人,博士生(联系人. E-mail: chenjuan@mail.dlut.edu.cn).

① 陈娟,李崇君,陈万吉. 基于面积坐标与 B 网方法的四边形样条单元[J]. 力学学报已录用.

② 陈娟,李崇君,陈万吉. 四边形单元面积坐标插值的的新方法[J]. 工程力学已录用.

网格上 4 次到 10 次的 Serendipity 单元族和完备 Lagrange 单元族的表达式[7]. Ho 等利用泡函数和凝聚法构造了 1 次到 3 次的加强单元族[8]. 因此对(高阶)单元族的研究在有限元的理论和应用中都是很有意义和必要的.

样条函数是满足一定连续条件的分片多项式[9-10],具有简单性和协调性的优点,在有限元法中应用广泛. 我们已经利用二元样条插值基构造了 1 ~3 阶的四边形样条单元[6]①②,在本文中,我们给出 17 节点样条单元的构造方法,这个单元具有 4 次完备阶,对不规则网格保持高精度. 这样,我们得到了 1 个 1 ~ 4 阶的 L4,L8,L12 和 L17 样条单元族,它们的节点数和 Serendipity 元相等,且与 Lagrange 元的完备阶相同.

本文的结构如下: 首先第 1 节简单介绍定义在三角形面积坐标上的 B 网方法,第 2 节给出 17 节点样条单元的构造,最后通过数值算例来测试这个单元的精度,并与 Q17 单元进行了比较.

1 三角形面积坐标和 B 网方法

B 网方法是研究定义在三角形上的二元样条函数的一种重要的方法,它起源于 Bernstein 多项式,并基于三角形面积坐标.

如图 1(a)所示,三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 内任一点 P 的面积坐标为$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 其中

$$P_1=(x_1,y_1),P_2=(x_2,y_2),P_3=(x_3,y_3),P=(x,y),$$

直角坐标 (x,y) 与面积坐标$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 之间的关系为

$$\begin{cases} x=x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+x_3\lambda_3, \\ y=y_1\lambda_1+y_2\lambda_2+y_3\lambda_3, \end{cases} \tag{1}$$

共有 $(n+2)(n+1)/2$ 个域点 $\xi_{i,j,k}$ 分布在 $\triangle P_1P_2P_3$ 内,面积坐标分别为$(i/n,j/n,k/n)$, 如图 1(b)所示,其中 $n=4$.

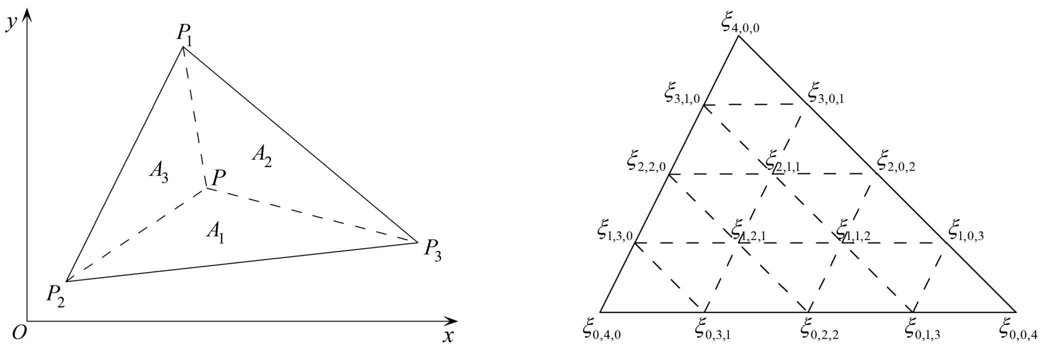


图 1 面积坐标和 4 次 B 网域点

定义在 $\triangle P_1P_2P_3$ 上的 n 次 Bernstein 多项式为

$$\begin{cases} B^n_{i,j,k}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\dfrac{n!}{i!\ j!\ k!}\lambda_1^i\lambda_2^j\lambda_3^k, \qquad i+j+k=n, \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1. \end{cases} \tag{2}$$

所有 n 次 Bernstein 多项式组成的行向量记为 $\boldsymbol{B}^n$. 例如

$$\boldsymbol{B}^4=\{B^4_{4,0,0},B^4_{3,1,0},B^4_{3,0,1},B^4_{2,2,0},B^4_{2,1,1},B^4_{2,0,2},B^4_{1,3,0},B^4_{1,2,1},B^4_{1,1,2},$$
$$B^4_{1,0,3},B^4_{0,4,0},B^4_{0,3,1},B^4_{0,2,2},B^4_{0,1,3},B^4_{0,0,4}\}=$$

$$\{\lambda_1^4, 4\lambda_1^3\lambda_2, 4\lambda_1^3\lambda_3, 6\lambda_1^2\lambda_2^2, 12\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3, 6\lambda_1^2\lambda_3^2, 4\lambda_1\lambda_2^3, 12\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3, 12\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2, 4\lambda_1\lambda_3^3, \lambda_2^4, 4\lambda_2^3\lambda_3, 6\lambda_2^2\lambda_3^2, 4\lambda_2\lambda_3^3, \lambda_3^4\}.$$

容易验证,所有的 n 次 Bernstein 多项式是线性无关的,并满足单位分解性:

$$\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^n = 1.$$

对直角坐标系下的任意 n 次多项式

$$p(x,y) = \sum_{i+j\leqslant n} a_{i,j}\, x^i y^j, \tag{3}$$

可以表示为如下面积坐标的 B 网形式

$$p(x,y) = f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \boldsymbol{B}^n \boldsymbol{f}_b, \tag{4}$$

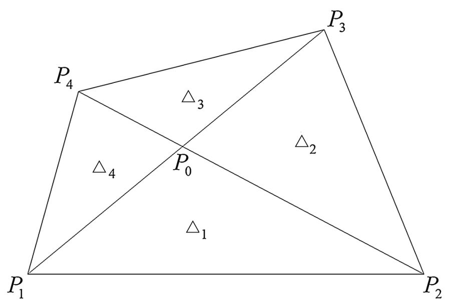
其中,$b_{i,j,k}$ 称为对应域点 $\xi_{i,j,k}$ 的 Bézier 系数,$\boldsymbol{f}_b$ 是所有 $b_{i,j,k}$ 组成的列向量. 例如,一个 4 次多项式 $f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 可以用 B 网方法表示为 $f = \boldsymbol{B}^4 \boldsymbol{f}_b$,其中

$$\boldsymbol{f}_b = \{b_{4,0,0}, b_{3,1,0}, b_{3,0,1}, b_{2,2,0}, b_{2,1,1}, b_{2,0,2}, b_{1,3,0}, b_{1,2,1}, b_{1,1,2}, b_{1,0,3}, b_{0,4,0}, b_{0,3,1}, b_{0,2,2}, b_{0,1,3}, b_{0,0,4}\}^{\mathrm{T}},$$

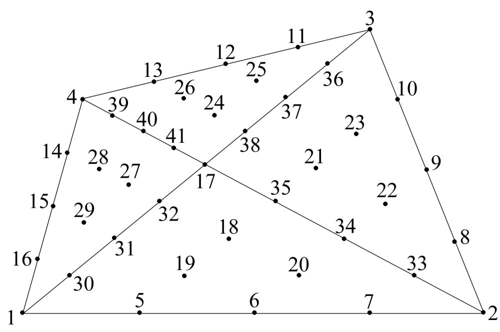
利用 B 网方法对计算多项式的乘积、求导、积分带来很大便利,详见文献[6,11].

2 17 节点四边形样条单元

对任意的凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$,连接 2 条对角线得到 4 个三角形分别记为 $\triangle_1, \cdots, \triangle_4$(图 2(a)),由 B 网方法,每个三角形上有 15 个域点,所以 1 个四边形上共有 41 个域点,它们的标号如图 2(b).



(a)



(b)

图 2 一个三角剖分的凸四边形和 4 次 B 网域点

记定义在三角剖分 $\triangle_1, \cdots, \triangle_4$ 上的 4 次样条空间为 $S_4^3(\triangle)$. 定义一个样条函数 $s \in S_4^3(\triangle)$ 为 1 个分片的 4 次多项式并在 2 条对角线 P_1P_3 和 P_2P_4 上满足 C^3 连续. 利用光滑余因子协调法[4-5],容易知道样条空间 $S_4^3(\triangle)$ 的维数为17. 我们可以得到17 个线性无关的4 次样条基,记为 $L_1, L_2, \cdots, L_{17}$. 它们分别在 41 个域点上的 Bézier 系数用向量表示为

$$\boldsymbol{L}_{b_1} = \{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}^{\mathrm{T}}, \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_2} = \{0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}^{\mathrm{T}}, \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_3} = \{0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,

$$0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}^{\mathrm{T}}, \tag{5c}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_4}=\{0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}^{\mathrm{T}}, \tag{5d}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_5}=\Big\{0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-\frac{b^2}{2},\frac{b}{6},-\frac{b^2}{2a},-\frac{b^3}{2d},-\frac{b^3}{2ad},\frac{b^3}{6d^2},\frac{ab^3}{2cd},\frac{ab^3}{6cd^2},\frac{ab^3}{2c^2d},\frac{ab^2}{2c},\frac{ab^2}{2c^2},\frac{ab}{6c},a,\frac{ab}{3},0,0,-\frac{b^3}{a},-b^3,0,\frac{ab^3}{3d^2},0,0,\frac{ab^3}{c^2},\frac{ab^3}{c}\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{5e}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_6}=\Big\{0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\frac{7ab}{4},\frac{5a}{4},\frac{5b}{4},-\frac{ab^2}{4d},\frac{b^2}{4d},-\frac{3ab^2}{4d^2},-\frac{5a^2b^2}{4cd},\frac{-3a^2b^2}{4cd^2},-\frac{3a^2b^2}{4c^2d},-\frac{a^2b}{4c},-\frac{3a^2b}{4c^2},\frac{a^2}{4c},0,\frac{3a^2}{2},\frac{3a^2b}{2},0,\frac{3b^2}{2},\frac{3ab^2}{2},0,-\frac{3a^2b^2}{2d^2},-\frac{3a^2b^2}{2d},0,-\frac{3a^2b^2}{2c^2},-\frac{3a^2b^2}{2c}\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{5f}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_7}=\Big\{0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-\frac{a^2}{2},-\frac{a^2}{2b},\frac{a}{6},\frac{a^2b}{2d},\frac{ab}{6d},\frac{a^2b}{2d^2},\frac{a^3b}{2cd},\frac{a^3b}{2cd^2},\frac{a^3b}{6c^2d},-\frac{a^3}{2c},\frac{a^3}{6c^2},-\frac{a^3}{2bc},0,-\frac{a^3}{b},-a^3,b,\frac{ab}{3},0,0,\frac{a^3b}{d^2},\frac{a^3b}{d},0,\frac{a^3b}{3c^2},0\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{5g}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_8}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\frac{a^2d}{2b},\frac{a^2d}{2b^2},\frac{ad}{6b},-\frac{a^2}{2},\frac{a}{6},-\frac{a^2}{2d},-\frac{a^3}{2c},-\frac{a^3}{2cd},\frac{a^3}{6c^2},\frac{a^3d}{2bc},\frac{a^3d}{6bc^2},\frac{a^3d}{2b^2c},0,\frac{a^3d}{b^2},\frac{a^3d}{b},d,\frac{ad}{3},0,0,-\frac{a^3}{d},-a^3,0,\frac{a^3d}{3c^2},0\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{5h}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_9}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-\frac{ad^2}{4b},-\frac{3ad^2}{4b^2},\frac{d^2}{4b},\frac{7ad}{4},\frac{5d}{4},\frac{5a}{4},-\frac{a^2d}{4c},\frac{a^2}{4c},\frac{-3a^2d}{4c^2},-\frac{5a^2d^2}{4bc},-\frac{3a^2d^2}{4bc^2},-\frac{3a^2d^2}{4b^2c},0,-\frac{3a^2d^2}{2b^2},-\frac{3a^2d^2}{2b},0,\frac{3d^2}{2},\frac{3ad^2}{2},0,\frac{3a^2}{2},\frac{3a^2d}{2},0,-\frac{3a^2d^2}{2c^2},-\frac{3a^2d^2}{2c}\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{5i}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{10}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,-\frac{d^3}{2b},\frac{d^3}{6b^2},-\frac{d^3}{2ab},-\frac{d^2}{2},-\frac{d^2}{2a},\frac{d}{6},\frac{ad^2}{2c},\frac{ad}{6c},\frac{ad^2}{2c^2},\frac{ad^3}{2bc},\frac{ad^3}{2bc^2},\frac{ad^3}{6b^2c},0,\frac{ad^3}{3b^2},0,0,-\frac{d^3}{a},-d^3,a,\frac{ad}{3},0,0,\frac{ad^3}{c^2},\frac{ad^3}{c}\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{5j}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{11}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,\frac{cd^3}{2ab},\frac{cd^3}{6ab^2},\frac{cd^3}{2a^2b},\frac{cd^2}{2a},\frac{cd^2}{2a^2},\frac{cd}{6a},\frac{-d^2}{2},\frac{d}{6},-\frac{d^2}{2c},-\frac{d^3}{2b},-\frac{d^3}{2bc},\frac{d^3}{6b^2},0,\frac{cd^3}{3b^2},0,0,$$

$$\frac{cd^3}{a^2},\frac{cd^3}{a},c,\frac{cd}{3},0,0,-\frac{d^3}{c},-d^3\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5k}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{12}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,-\frac{5c^2d^2}{4ab},-\frac{3c^2d^2}{4ab^2},-\frac{3c^2d^2}{4a^2b},-\frac{c^2d}{4a},-\frac{3c^2d}{4a^2},\frac{c^2}{4a},\frac{7cd}{4},\frac{5c}{4},\frac{5d}{4},-\frac{cd^2}{4b},\frac{d^2}{4b},-\frac{3cd^2}{4b^2},0,-\frac{3c^2d^2}{2b^2},-\frac{3c^2d^2}{2b},0,-\frac{3c^2d^2}{2a^2},-\frac{3c^2d^2}{2a},0,\frac{3c^2}{2},\frac{3c^2d}{2},0,\frac{3d^2}{2},\frac{3cd^2}{2}\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5l}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{13}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,\frac{c^3d}{2ab},\frac{c^3d}{2ab^2},\frac{c^3d}{6a^2b},-\frac{c^3}{2a},\frac{c^3}{6a^2},-\frac{c^3}{2ad},-\frac{c^2}{2},-\frac{c^2}{2d},\frac{c}{6},\frac{c^2d}{2b},\frac{cd}{6b},\frac{c^2d}{2b^2},0,\frac{c^3d}{b^2},\frac{c^3d}{b},0,\frac{c^3d}{3a^2},0,0,-\frac{c^3}{d},-c^3,d,\frac{cd}{3},0\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5m}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{14}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,-\frac{c^3}{2a},-\frac{c^3}{2ab},\frac{c^3}{6a^2},\frac{bc^3}{2ad},\frac{bc^3}{6a^2d},\frac{bc^3}{2ad^2},\frac{bc^2}{2d},\frac{bc^2}{2d^2},\frac{bc}{6d},-\frac{c^2}{2},\frac{c}{6},-\frac{c^2}{2b},0,-\frac{c^3}{b},-c^3,0,\frac{bc^3}{3a^2},0,0,\frac{bc^3}{d^2},\frac{bc^3}{d},b,\frac{bc}{3},0\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5n}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{15}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,-\frac{bc^2}{4a},\frac{c^2}{4a},-\frac{3bc^2}{4a^2},-\frac{5b^2c^2}{4ad},-\frac{3b^2c^2}{4a^2d},\frac{-3b^2c^2}{4ad^2},-\frac{b^2c}{4d},-\frac{3b^2c}{4d^2},\frac{b^2}{4d},\frac{7bc}{4},\frac{5b}{4},\frac{5c}{4},0,\frac{3c^2}{2},\frac{3bc^2}{2},0,-\frac{3b^2c^2}{2a^2},\frac{-3b^2c^2}{2a},0,-\frac{3b^2c^2}{2d^2},-\frac{3b^2c^2}{2d},0,\frac{3b^2}{2},\frac{3b^2c}{2}\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5o}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{16}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,\frac{b^2c}{2a},\frac{bc}{6a},\frac{b^2c}{2a^2},\frac{b^3c}{2ad},\frac{b^3c}{2a^2d},\frac{b^3c}{6ad^2},\frac{-b^3}{2d},\frac{b^3}{6d^2},-\frac{b^3}{2cd},-\frac{b^2}{2},-\frac{b^2}{2c},\frac{b}{6},c,\frac{bc}{3},0,0,\frac{b^3c}{a^2},\frac{b^3c}{a},0,\frac{b^3c}{3d^2},0,0,-\frac{b^3}{c},-b^3\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5p}$$

$$\boldsymbol{L}_{b_{17}}=\Big\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,\frac{1}{4ab},\frac{1}{12ab^2},\frac{1}{12a^2b},\frac{1}{4ad},\frac{1}{12a^2d},\frac{1}{12ad^2},\frac{1}{4cd},\frac{1}{12cd^2},\frac{1}{12c^2d},\frac{1}{4bc},\frac{1}{12bc^2},\frac{1}{12b^2c},0,\frac{1}{6b^2},\frac{1}{2b},0,\frac{1}{6a^2},\frac{1}{2a},0,\frac{1}{6d^2},\frac{1}{2d},0,\frac{1}{6c^2},\frac{1}{2c}\Big\}^{\mathrm{T}},\tag{5q}$$

其中，a,b,c,d 的定义为如下比值：

$$a=\frac{|\overline{P_4P_0}|}{|\overline{P_4P_2}|},\ b=\frac{|\overline{P_3P_0}|}{|\overline{P_3P_1}|},\ c=1-a,\ d=1-b,\tag{6}$$

容易验证，这 17 个样条基函数满足单位分解性.

每个样条基函数限制在每片三角形上的多项式可以从等式(4)($n=4$)得出. 记每片三角形 $\triangle_k$ 上的面积坐标为$(\lambda_{k,1}\lambda_{k,2}\lambda_{k,3})$, 相应的 4 次 Bernstein 多项式为 $\boldsymbol{B}_k^4(k=1,2,3,4)$. 记 $d_j^{(i)}(i=1,\cdots,17; j=1,\cdots,41)$ 是样条基 L_i 在 41 个域点上的 Bézier 系数, 例如 $\boldsymbol{L}_{b_i}=\{d_i^{(i)},\cdots,d_{41}^{(i)}\}, i=1,\cdots,17$. 则每个基 L_i 限制在 $\triangle_1,\cdots,\triangle_4$ 上的多项式为

$$\begin{cases} L_i\mid\triangle_1=\boldsymbol{B}_1^4\{d_{17}^{(i)},d_{32}^{(i)},d_{35}^{(i)},d_{31}^{(i)},d_{18}^{(i)},d_{34}^{(i)},d_{30}^{(i)},d_{19}^{(i)},d_{20}^{(i)},d_{33}^{(i)},\\ \quad d_1^{(i)},d_5^{(i)},d_6^{(i)},d_7^{(i)},d_2^{(i)}\}^{\mathrm{T}},\\ L_i\mid\triangle_2=\boldsymbol{B}_2^4\{d_{17}^{(i)},d_{35}^{(i)},d_{38}^{(i)},d_{34}^{(i)},d_{21}^{(i)},d_{37}^{(i)},d_{33}^{(i)},d_{22}^{(i)},d_{23}^{(i)},d_{36}^{(i)},\\ \quad d_2^{(i)},d_8^{(i)},d_9^{(i)},d_{10}^{(i)},d_3^{(i)}\}^{\mathrm{T}},\\ L_i\mid\triangle_3=\boldsymbol{B}_3^4\{d_{17}^{(i)},d_{38}^{(i)},d_{41}^{(i)},d_{37}^{(i)},d_{24}^{(i)},d_{40}^{(i)},d_{36}^{(i)},d_{25}^{(i)},d_{26}^{(i)},d_{39}^{(i)},\\ \quad d_3^{(i)},d_{11}^{(i)},d_{12}^{(i)},d_{13}^{(i)},d_4^{(i)}\}^{\mathrm{T}},\\ L_i\mid\triangle_4=\boldsymbol{B}_4^4\{d_{17}^{(i)},d_{41}^{(i)},d_{32}^{(i)},d_{40}^{(i)},d_{27}^{(i)},d_{31}^{(i)},d_{39}^{(i)},d_{28}^{(i)},d_{29}^{(i)},d_{30}^{(i)},\\ \quad d_4^{(i)},d_{14}^{(i)},d_{15}^{(i)},d_{16}^{(i)},d_1^{(i)}\}^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{7}$$

实际上,在有限元的计算中分片表达式并不需要给出,因为单元形函数的乘积,求导,积分运算可以简化为它们的 Bézier 系数之间的运算[6]. 容易验证, L17 满足单位分解性.

通过一个简单的线性变换,我们可以得到一组插值于节点 $P_i=(x_i,y_i)$ 的基底.

$$\begin{cases} \boldsymbol{N}_{b_1}=\boldsymbol{L}_{b_1}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_5}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_6}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_7}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_{14}}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_{15}}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_{16}},\\ \boldsymbol{N}_{b_2}=\boldsymbol{L}_{b_2}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_5}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_6}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_7}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_8}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_9}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_{10}},\\ \boldsymbol{N}_{b_3}=\boldsymbol{L}_{b_3}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_8}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_9}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_{10}}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_{11}}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_{12}}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_{13}},\\ \boldsymbol{N}_{b_4}=\boldsymbol{L}_{b_4}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_{11}}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_{12}}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_{13}}-\frac{13}{12}\boldsymbol{L}_{b_{14}}+\frac{13}{18}\boldsymbol{L}_{b_{15}}-\frac{1}{4}\boldsymbol{L}_{b_{16}},\\ \boldsymbol{N}_{b_5}=4\boldsymbol{L}_{b_5}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_6}+\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_7},\ \boldsymbol{N}_{b_6}=-3\boldsymbol{L}_{b_5}+\frac{20}{3}\boldsymbol{L}_{b_6}-3\boldsymbol{L}_{b_7},\\ \boldsymbol{N}_{b_7}=\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_5}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_6}+4\boldsymbol{L}_{b_7},\ \boldsymbol{N}_{b_8}=4\boldsymbol{L}_{b_8}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_9}+\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_{10}},\\ \boldsymbol{N}_{b_9}=-3\boldsymbol{L}_{b_8}+\frac{20}{3}\boldsymbol{L}_{b_9}-3\boldsymbol{L}_{b_{10}},\ \boldsymbol{N}_{b_{10}}=\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_8}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_9}+4\boldsymbol{L}_{b_{10}},\\ \boldsymbol{N}_{b_{11}}=4\boldsymbol{L}_{b_{11}}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_{12}}+\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_{13}},\ \boldsymbol{N}_{b_{12}}=-3\boldsymbol{L}_{b_{11}}+\frac{20}{3}\boldsymbol{L}_{b_{12}}-3\boldsymbol{L}_{b_{13}},\\ \boldsymbol{N}_{b_{13}}=\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_{11}}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_{12}}+4\boldsymbol{L}_{b_{13}},\ \boldsymbol{N}_{b_{14}}=4\boldsymbol{L}_{b_{14}}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_{15}}+\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_{16}},\\ \boldsymbol{N}_{b_{15}}=-3\boldsymbol{L}_{b_{14}}+\frac{20}{3}\boldsymbol{L}_{b_{15}}-3\boldsymbol{L}_{b_{16}},\ \boldsymbol{N}_{b_{16}}=\frac{4}{3}\boldsymbol{L}_{b_{14}}-\frac{32}{9}\boldsymbol{L}_{b_{15}}+4\boldsymbol{L}_{b_{16}},\\ \boldsymbol{N}_{b_{17}}=\boldsymbol{L}_{b_{17}}, \end{cases} \tag{8}$$

则

$$N_i(P_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i,j=1,\cdots,17), \tag{9}$$

由 $N_1,N_2,\cdots,N_{17}$ 构成的 17 节点四边形单元记为 L17. 位移场可表示为

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^{17} u_i N_i , \\ v = \sum_{i=1}^{17} v_i N_i . \end{cases} \tag{10}$$

四边形单元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可由 4 片三角形 $\triangle_k(k = 1,2,3,4)$ 上的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 之和得到. 由等式(9),两相邻单元退化到公共边界上只和该边界的位移有关,所以相邻单元在公共边上是 C^0 连续的,自然满足协调性. 分别验证 4 次多项式 $1,x,y,\cdots,xy^3,\cdots,y^4$, 可知 L17 单元对直角坐标具有 4 次完备阶. 即有

定理 1 设 D 为凸四边形区域 $P_1P_2P_3P_4$,

$$(Nf)(x,y) := \sum_{i=1}^{17} f(x_i,y_i)N_i(x,y), \tag{11}$$

则对所有的 $f \in P_4$,有

$$(Nf)(x,y) \equiv f(x,y), \qquad (x,y) \in D. \tag{12}$$

由于 L17 单元的构造是由四边形单元上的分片多项式在对角线上 C^3 连续得到,所以在单元内的交线上位移是 C^3 的,再由位移和应力的关系可知,应力是 C^2 连续的. 注意到,四边形样条单元不必进行区域变换,从而无需 Jacobi 矩阵的相关计算.

3 数值算例

在这一节中,采用一些平面弹性力学中的算例来测试 L17 单元. 数值结果与标准 17 节点 Serendipity 等参元 Q17 进行了比较.

例 1 分片检验. 一小片被剖分为几片任意的单元,如图 3 所示. 对于任意给定的 4 次位移场

$$\begin{cases} u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 + \\ \qquad a_{10}x^4 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}y^4 , \\ v = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3 + \\ \qquad b_{10}x^4 + b_{11}x^3y + b_{12}x^2y^2 + b_{13}xy^3 + b_{14}y^4 , \end{cases} \tag{13}$$

其中,系数 $a_0,b_0,\cdots,a_{14},b_{14}$ 必须满足应力平衡方程. 特别,我们分别选取如下 1 ~ 4 次位移场

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4} + x + 3y , \\ v = 1 + \frac{1}{2}x + 2y , \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4} + x + 3y - 2x^2 - \\ \qquad 4xy + \frac{5}{2}y^2 , \\ v = 1 + \frac{1}{2}x + 2y - \frac{2}{3}x^2 + \\ \qquad \frac{17}{5}xy + \frac{3}{2}y^2 , \end{cases} \tag{15}$$

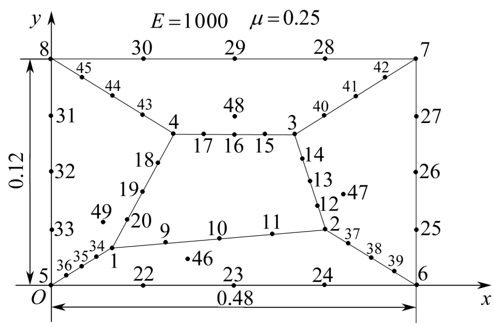


图 3 分片检验

$$
\begin{cases}
u = \dfrac{1}{4} + x + 3y - 2x^2 - 4xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x^3 + x^2y - 4xy^2 - \dfrac{1}{3}y^3, \\
v = 1 + \dfrac{1}{2}x + 2y - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{17}{5}xy + \dfrac{3}{2}y^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + 12x^2y - xy^2 - \dfrac{2}{3}y^3,
\end{cases} \tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
u = \dfrac{1}{4} + x + 3y - 2x^2 - 4xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x^3 + x^2y - 4xy^2 - \\
\qquad \dfrac{1}{3}y^3 - \dfrac{7}{32}x^4 - \dfrac{19}{24}x^3y + x^2y^2 + xy^3 - \dfrac{11}{96}y^4, \\
v = 1 + \dfrac{1}{2}x + 2y - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{17}{5}xy + \dfrac{3}{2}y^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + 12x^2y - xy^2 - \\
\qquad \dfrac{2}{3}y^3 - \dfrac{11}{96}x^4 + x^3y + x^2y^2 - \dfrac{19}{24}xy^3 - \dfrac{7}{32}y^4,
\end{cases} \tag{17}
$$

表 1　　分片检验结果(图 3)

$(u_1, v_1) \times 10^3$	1 次位移(14)	2 次位移(15)	3 次位移(16)	4 次位移(17)
Q17	(0.35,1.06)Y	(0.344 6,1.062 3)Y	(0.344 3,1.062 6)N	(0.344 3,1.062 5)N
L17	(0.35,1.06)Y	(0.344 6,1.062 3)Y	(0.344 4,1.062 6)Y	(0.344 4,1.062 6)Y
精确值	(0.35,1.06)	(0.344 6,1.062 3)	(0.344 4,1.062 6)	(0.344 4,1.062 6)

表 1 给出了在选定点 $(x_1, y_1) = (0.04, 0.02)$ 处,给定的 4 个位移场,式(14),式(15),式(16)和式(17)的分片检验的数值结果. 其中字母“Y”表示单元通过分片检验,字母“N”表示单元没有通过分片检验. 结果显示,等参元 Q17 在直角坐标系中只有 2 次完备性,而样条单元 L17 具有 4 次完备性.

例 2　线性弯曲问题. 文献[2]中给出了一个测试 3 次单元的算例,我们同时用它来测试网格畸变对 L17 的影响. 如图 4,5 所示,令 $L = 10$, $c = 2$, e 从 0 变化到 4.99. 通过计算,Q17 单元的精度受到网格畸变的影响,如表 2 所示. 而 L17 在直角坐标系中有 4 次完备性,所以数值结果总是精确满足如下的 3 次位移场[2]:

$$
\begin{cases}
u = \left(\dfrac{120}{cL}x^2y - \dfrac{92}{cL}y^3 - \dfrac{60}{L}x^2 - \dfrac{240}{c}xy + \dfrac{138}{L}y^2 + 120x - \dfrac{46c}{L}y\right) \Big/ E, \\
v = \left(-\dfrac{40}{cL}x^3 - \dfrac{36}{cL}xy^2 + \dfrac{120}{c}x^2 + \dfrac{36}{L}xy + \dfrac{36}{c}y^2 + \dfrac{46c}{L}x - 36y\right) \Big/ E.
\end{cases} \tag{18}
$$

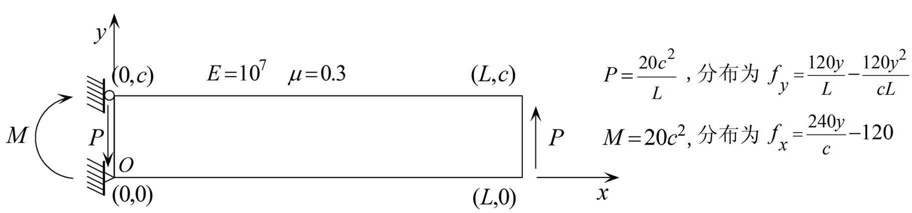


图 4　线性弯曲问题

表 2　　线性弯曲问题中当 e 变化时给定点的挠度(图 5)

	Q17							L17						
	$e=0$	$e=1$	$e=2$	$e=3$	$e=4$	$e=4.99$	精确值	$e=0$	$e=1$	$e=2$	$e=3$	$e=4$	$e=4.99$	精确值
$u(10,0) \times 10^4$	0.600	0.600	0.601	0.602	0.598	0.612	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$v(10,0) \times 10^4$	4.092	4.087	4.063	4.008	3.882	3.651	4.092	4.092	4.092	4.092	4.092	4.092	4.092	4.092

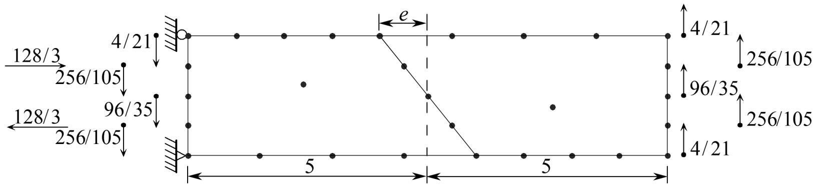


图 5　线性弯曲网格敏度试验

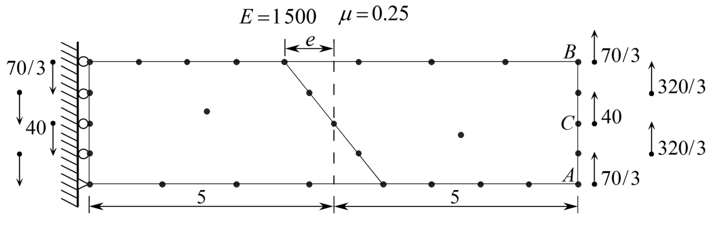


图 6　剪切载荷的敏度试验

表 3　剪切载荷问题中当 e 变化时给定点的挠度(图 6)

v_C	$e=0$	$e=1$	$e=2$	$e=3$	$e=4$	$e=4.99$	精确值[5]
Q17	102.606	102.608	102.291	101.195	97.962	95.460	102.62
L12	102.590	102.588	102.584	102.583	102.582	102.583	102.62
L17	102.619	102.617	102.613	102.612	102.615	102.606	102.62

例 3　剪切载荷敏度试验. 如图 6 所示,其中 e 从 0 变化到 4.5. 一个选定的点的挠度的数值结果如表 3 所示. 注意到虽然精确的位移场不是 4 次多项式,但结果显示了 L17 样条单元有较高的精度,并且对网格的畸变不敏感,确实克服了等参元的网格敏感性. 同时,此例也加入了陈娟①提出的保持 3 次完备阶的 L12 样条单元的结果. 可以看出,L17 的精度比 L12 更高.

4　结　　论

本文基于三角形面积坐标,利用 4 次样条插值基构造了 17 节点四边形单元,具有如下的性质: 1) 单位分解性; 2) 节点插值性; 3) 对直角坐标系具有 4 次完备阶并对网格畸变不敏感; 4) 单元之间的位移是协调的,应力在单元内部 C^2 连续; 5) 不必进行区域变换,从而无 Jacobi 矩阵的相关计算. 数值算例也说明了此单元的高精度和有效性.

致谢　作者感谢大连理工大学理科基金项目(SFDUT07001)的支持及审稿人对本文提出的宝贵意见和建议.

参考文献:

[1]　Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method*[M]. 5th ed. Singapore: Elsevier Pte ltd, 2005.

[2]　Lee N S, Bathe K J. Effects of element distortion on the performance of isoparametric elements[J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 1993, **36**(20): 3553-3576.

[3]　Long Y Q, Li J X, Long Z F, *et al*. Area coordinates used in quadrilateral element[J]. *Commun Numer Methods Engrg*, 1999, **15**(8): 533-545.

[4]　Cen S, Chen X M, Fu X R. Quadrilateral membrane element family formulated by the quadrilateral area coordinate method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2007, **196**(41/44):

4337-4353.

[5] 李勇东,陈万吉. 精化不协调平面八节点元[J]. 计算力学学报,1997,**14**(3):276-285.

[6] Li C J,Wang R H. A new 8-node quadrilateral spline finite element[J]. *J Comput Appl Math*, 2006,**195**(1/2):54-65.

[7] Rathod H T,Kilari S. General complete Lagrange family for the cube in finite element interpolations[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*,2000,**181**(1/3):295-344.

[8] Ho S P,Yeh Y L. The use of 2D enriched elements with bubble functions for finite element analysis[J]. *Computers and Structures*,2006,**84**(29/30):2081-2091.

[9] Wang R H. The structural characterization and interpolation for multivariate splines[J]. *Acta Math Sinica*,1975,**18**(2):91-106.

[10] Wang R H. *Multivariate Spline Functions and Their Applications*[M]. Beijing,New York, Dordrecht,Boston,London:Science Press,Kluwer Academic Publishers,2001.

[11] Farin G. Triangular Bernstein-Bézier patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*,1986,**3**(2):83-127.

A 17-Node Quadrilateral Spline Finite Element Using the Triangular Area Coordinates

CHEN Juan[1], LI Chong-jun[1], CHEN Wan-ji[2,3]

(1. *School of Mathematical Sciences*,*Dalian University of Technology*, *Dalian*,*Liaoning* 116024,*P. R. China*;

2. *State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment*, *Dalian University of Technology*,*Dalian*,*Liaoning* 116024,*P. R. China*;

3. *Institute for Structural Analysis of Aerocraft*,*Shenyang Institute of Aeronautical Engineering*,*Shenyang* 110136,*P. R. China*)

Abstract: A 17-node quadrilateral element had been developed using the bivariate quartic spline interpolation basis and the triangular area coordinates, which could exactly model the quartic field. Some appropriate examples are employed to illustrate that the element possesses high precision and is insensitive to mesh distortions.

Key words: 17-node quadrilateral element; bivariate spline interpolation basis; triangular area coordinates; B-net method; fourth-order completeness