

等离子声波方程的行波解的动力学行为*

李庶民^{1,2}, 贺天兰¹

(1. 昆明理工大学 非线性科学研究中心,昆明 650093;

2. 昆明理工大学 津桥学院,昆明 650106)

(李继彬推荐)

摘要: 对等离子声波方程,用平面动力系统理论得到了其光滑、非光滑孤立波解和不可数无穷多光滑、非光滑周期波解的存在性.进一步,在给定的参数条件下,得到了保证上述解存在的充分条件.

关键词: 孤立波解; 周期行波解; 波的光滑性; 等离子声波方程

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.012

引 言

考虑等离子声波方程

$$n_t + (nv)_x = 0, v_t + \left(\frac{v^2}{2} + \phi\right)_x = 0, \phi_{xx} - e^\phi + n = 0, \quad (1)$$

其中 ϕ, n, v 分别表示电势、离子密度和离子速度.方程(1)的光滑孤立波解的存在性、线性稳定性与不稳定性已经被 Haragus 和 Scheel^[1], Li 和 Sattinger^[2] 研究过.关于这些方程的物理背景,可以参见文献[1-2]以及其中的参考文献.

我们注意到方程(1)的孤立波解和周期波解的动力学行为,尤其是破缺波解的产生还没被研究过.因而,研究方程(1)所决定的行波解的动力学行为是非常重要的.

我们将求方程(1)的形如 $(n, v, \phi)(x - ct) = (n, v, \phi)(\xi)$ 的行波解,其中 c 是波速, $\xi = x - ct$.把上述行波解代入方程(1)中,并对 ξ 积分,我们得到方程

$$n = \frac{g}{v - c} = \frac{g}{\sqrt{c^2 - 2\phi}}, v = c \pm \sqrt{c^2 - 2\phi} \quad (2a)$$

和

$$\phi_{\xi\xi} = e^\phi \mp \frac{g}{\sqrt{c^2 - 2\phi}}, \quad (2b)$$

其中 g 是积分常数.因为积分常数 g 可以取正数或负数,所以,我们只考虑(2b)的第1种情况.此时,方程(2b)等价于下述二维的 Hamilton 系统:

* 收稿日期: 2009-08-31; 修订日期: 2009-11-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971085)

作者简介: 李庶民(1965—),男,云南禄丰人,副教授(联系人. Tel: +86-871-5175414; E-mail: leesm007@163.com).

$$\frac{d\phi}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = e^\phi - \frac{g}{\sqrt{c^2 - 2\phi}}, \quad (3)$$

其 Hamilton 量为

$$H(\phi, y) = \frac{1}{2}y^2 - e^\phi - g\sqrt{c^2 - 2\phi}. \quad (4)$$

显然,系统(3)是依赖于两个参数 g 和 c 的平面动力系统. 由于系统(3)的相轨道决定了系统(1)的所有行波解,所以我们将研究系统(3)当参数 (g, c) 改变时,其相图在相平面 (ϕ, y) 上的分支. 这里我们指出,在物理模型中,有界行波解才是有意义的. 因此,我们仅考虑系统(3)的有界解. 换言之,我们研究系统(1)的关于 ϕ 的有界行波解.

设 $\phi(x - ct) = \phi(\xi)$ 是方程(3)的连续解, $\xi \in (-\infty, \infty)$ 且

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = \alpha, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi) = \beta,$$

则众所周知, (i) 如果 $\alpha = \beta$, 则称 $\phi(x, t)$ 是方程(1)的孤立波解; (ii) 如果 $\alpha \neq \beta$, 则称 $\phi(x, t)$ 是方程(1)的扭波或反扭波解. 通常,方程(1)的一个孤立波解对应着方程(3)的一条同宿轨道; 方程(1)的一个扭波(反扭波)解对应着方程(3)的一条异宿轨道(又称连接轨道); 类似地,方程(3)的一条周期轨道对应着方程(1)的一个周期解. 因此,要研究方程(1)的孤立波解和周期解的所有分支,就要找到系统(3)的依赖于参数 c, g 的所有同宿轨道与周期环域.

在系统(3)中,注意到当 $\phi = c^2/2$ 时,第二个方程的右端不连续. 在相平面 (ϕ, y) 中的直线 $\phi = c^2/2$ 上, ϕ_ξ'' 没有定义,我们称这样的系统叫奇行波系统. 这导致光滑的系统(1)会有非光滑的行波解. 这种现象已在 Li 和 Liu^[3], Li 和 Dai^[4] 的专著中被完整地讨论了.

1 系统(3)的相图的分支

除了奇直线 $\phi = c^2/2$ 上,系统(3)与其伴随正则系统

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = \sqrt{c^2 - 2\phi}y, \quad \frac{dy}{d\zeta} = \sqrt{c^2 - 2\phi}e^\phi - g \quad (5)$$

有相同的不变曲线,其中 $d\zeta = d\xi/\sqrt{c^2 - 2\phi}$, $\phi \neq c^2/2$.

显然,当 $g < 0$ 时,函数

$$Q(\phi) = \sqrt{c^2 - 2\phi}e^\phi - g \quad (6)$$

是正的,系统(5)没有平衡点. 故我们仅考虑 $g > 0$ 的情况.

因为 ϕ 是电势,我们仅考虑 $\phi \geq 0$ 的情况. 因此,要得到 $Q(\phi)$ 的正零根,就要考虑曲线 $C_1: y = c^2 - 2\phi$ 和 $C_2: y = g^2 e^{-2\phi}$ 的交点,并设 $c > 1$. 容易找到,在 (c, g) 参数平面的第一象限内,有一条分支曲线 $L_1: g = \exp((c^2 - 1)/2)$, 使得当 $(c, g) \in L_1$ 时,函数 $Q(\phi)$ 有一个二重根 ϕ_{12} . 当 $g < \exp((c^2 - 1)/2)$ 时,函数 $Q(\phi)$ 有两个正根 $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$ 使 $\phi_1 < \ln(g) < \phi_2$. 这使系统(5)有两个平衡点 $(\phi_1, 0), (\phi_2, 0)$. 当 $g > \exp((c^2 - 1)/2)$ 时,函数 $Q(\phi)$ 没有零点.

显然, $(c^2 - 2\phi - g^2 e^{-2\phi})|_{\phi=c^2/2} = -g^2 e^{-c^2} < 0$. 故而有 $\phi_1 < \phi_2 < c^2/2$.

直线 $\phi = c^2/2$ 是系统(5)的第一个方程的一个解,其上没有系统(5)的平衡点. 用 $\mathbf{M}(\phi_i, 0)$ 表示系统(5)在平衡点 $(\phi_i, 0)$ 处的线性化系统的系数矩阵. 则

$$J(\phi_i, 0) = \det \mathbf{M}(\phi_i, 0) = e^{\phi_i} (1 - (c^2 - 2\phi_i)) = e^{\phi_i} (1 - g^2 e^{(-2\phi_i)}), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

注意到 $\phi_1 = \ln(g) - a_1, \phi_2 = \ln(g) + a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$. 由(7)式有

$$J(\phi_1, 0) = e^{\phi_1}(1 - e^{2a_1}) < 0, J(\phi_2, 0) = e^{\phi_2}\left(1 - \frac{1}{e^{2a_2}}\right) > 0. \quad (8)$$

由平面动力系统理论^[5]知, 对于 Hamilton 系统的一个平衡点, 当 $J < 0$ 时, 该平衡点是鞍点; 当 $J > 0$ 时, 该平衡点是中心; 当 $J = 0$ 且平衡点的 Poincaré 指标为 0 时, 则该平衡点是尖点. 因此, 由方程(8)可知方程(5)的临界点 $(\phi_1, 0)$ 是鞍点, $(\phi_{12}, 0)$ 是尖点, $(\phi_2, 0)$ 是中心.

由方程(4)有

$$\begin{cases} h_1 = H(\phi_1, 0) = -g(e^{-a_1} + \sqrt{1 + 2a_1}) < 0, \\ h_2 = H(\phi_2, 0) = -g(e^{a_2} + \sqrt{1 - 2a_2}) < 0, \\ h_3 = H\left(-\frac{c^2}{2}, 0\right) = -e^{-c^2/2} < 0. \end{cases} \quad (9)$$

若 $h_1 = h_3$, 则在 (c, g) 平面上, 隐函数

$$e^{-c^2/2} = g(e^{-a_1} + \sqrt{1 + 2a_1}) \quad (10)$$

决定了第二条分支曲线 L_2 , 其中函数 $Q(\phi_1) = 0$, 即 $2a_1 + e^{2a_1} = c^2 - 2\ln g$ 定义了 c, g 的一个函数 $a_1 = a_1(c, g)$. 当 $(c, g) \in L_2$ 时, 同宿到鞍点 $(\phi_1, 0)$ 的同宿轨与奇直线 $\phi = c^2/2$ 接触于点 $(c^2/2, 0)$. 对给定的 $c > 1$, 让 $g = g^*$ 使 $(c, g^*) \in L_2$. 当 $g < g^*$ 时, 一些由 $H(\phi, y) = h$ 决定的围绕中心 $(\phi_2, 0)$ 的周期轨与奇直线 $\phi = c^2/2$ 相交 (见图 1(c)).

通过定性分析, 对给定的 $c > 1$ 及不同的 g , 得到系统(5)的如图 1 所示的分支相图.

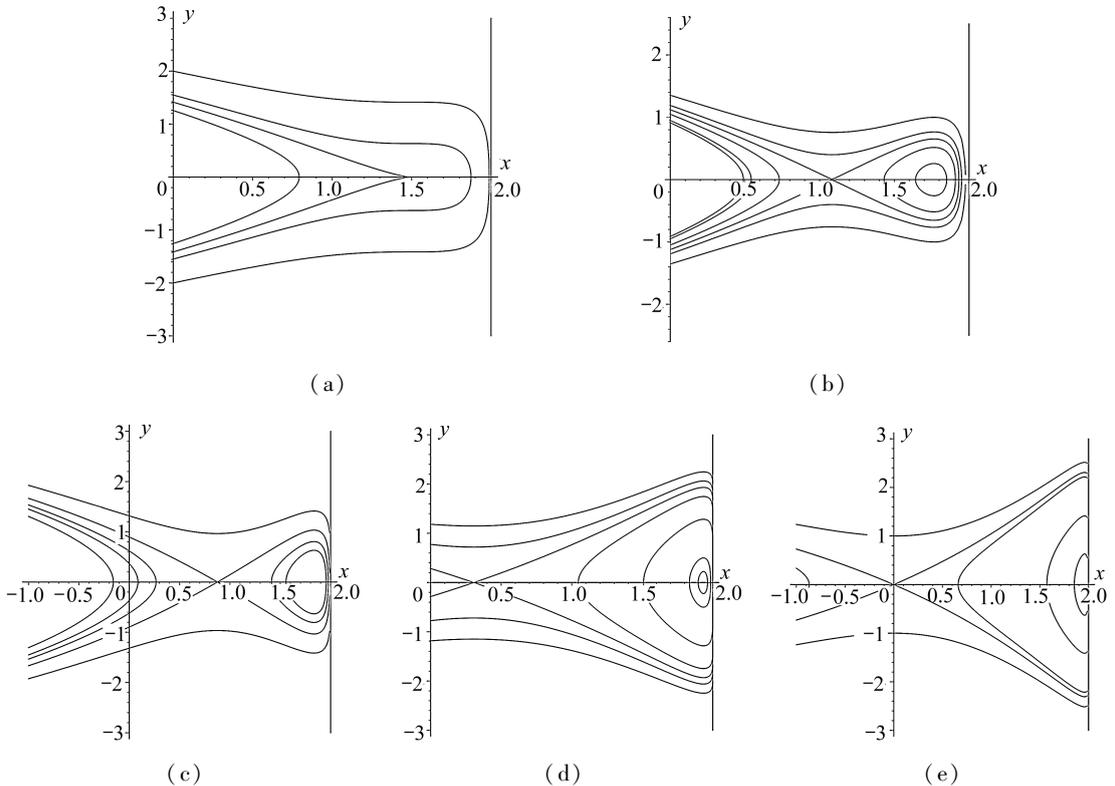


图 1 系统(5)的相图分支

图 1 各相图所对应的参数条件为

$$(a) g = g_m = \exp\left(\frac{c^2 - 1}{2}\right); (b) g^* < g < g_m; (c) g = g^*;$$

$$(d) \frac{c^2}{2} < g < g^*; (e) g = \frac{c^2}{2}.$$

因为系统(3)和(5)除了在 $\phi = c^2/2$ 上外,有相同的不变曲线,故当 $\phi \neq c^2/2$ 时,变量变换 $d\xi = \sqrt{c^2 - 2\phi}d\zeta$ 仅会使系统(3)和(5)的轨道的参数表示不同而已.如果系统(5)的轨道与奇直线 $\phi = c^2/2$ 没有交点,则 y' 也同系统(3)中定义的一样.这样,由这条轨道所定义的图形是光滑的.总之,我们有如下的结论.

定理 1 设 $c > 1$ 给定,则

1) 当 $g^* < g < g_m$ 时,有 $h_2 < h_1 < h_3$.在此参数条件下,水平曲线 $H(\phi, y) = h_1$ 的一支定义了一条同宿到鞍点 $(\phi_1, 0)$ 的同宿轨;对所有的 $h \in (h_2, h_1)$,水平曲线 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, h_1)$ 的一个闭分支则定义了系统(3)的一族光滑周期解.

2) 当 $g = g^*$ 时,有 $h_2 < h_1 = h_3$.在此参数条件下,水平曲线 $H(\phi, y) = h_1 = h_3$ 定义了两条连接鞍点 $(\phi_1, 0)$ 和 $(c^2/2, 0)$ 的连接轨道;而水平曲线 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, h_1 = h_3)$ 的闭分支则定义了系统(3)的 1 族周期解.

3) 当 $c^2/2 < g < g^*$ 时,有 $h_2 < h_3 < h_1 < 0$.此时,当 $h \in (h_2, h_3]$ 时,水平曲线 $H(\phi, y) = h$ 的一个闭分支给出了系统(5)的一族周期解;当 $h \in (h_3, h_1)$ 时,水平曲线 $H(\phi, y) = h$ 的 1 支对应着系统(3)的一族破缺波解;当 $h = h_1$ 时,水平曲线 $H(\phi, y) = h_1$ 的两支对应着系统(3)的两个破缺波解.

作为系统(3)的一种特例,我们假设 $g = c > 1$.此时,方程已被 Li 和 Sattinger^[2], Haragus 和 Scheel^[1] 讨论过.其中原点 $(0, 0)$ 是系统(3)的鞍点,即 $\phi_1 = 0, h_1 = -(c^2 + 1)$.因此,式(10)变成了 $e^{c^2/2} = c^2 + 1$.此时有如下结果.

推论 2 1) 当 $1 < c < c^* = 1.585\ 201\ 065$, $(\phi_1, 0) = (0, 0)$ (其中 c^* 是 $e^{c^2/2} - c^2 - 1 = 0$ 的根)时,满足 $g = c$ 的行波方程(3)有一条由 $H(\phi, y) = h_1 = -(1 + c^2)$ 所定义且同宿到鞍点 $(0, 0)$ 的同宿轨.同时,当 $h \in (h_2, -(c^2 + 1))$ 时,存在一族由 $H(\phi, y) = h$ 所定义的围绕中心 $(\phi_2, 0)$ 的周期轨.

2) 当 $c = c^* = 1.585\ 201\ 065$ 时,满足 $g = c$ 的行波方程(3)有一条由 $H(\phi, y) = h_1 = -(1 + c^2)$ 所定义、同宿到鞍点 $(0, 0)$ 且切于奇直线的同宿轨;同时,当 $h \in (h_2, -(c^2 + 1))$ 时,存在一族由 $H(\phi, y) = h$ 所定义的围绕中心 $(\phi_2, 0)$ 的周期轨.

3) 当 $c > c^*, h \in (h_2, h_3)$ 时,满足 $g = c$ 的行波方程(3)存在一族由 $H(\phi, y) = h$ 所定义的围绕中心 $(\phi_2, 0)$ 的周期轨.

此推论与参考文献[2]中的定理 4.2 一致.

2 系统(1)的孤立波和周期行波解

从式(2a)可得

$$n(\xi) = \frac{g}{\sqrt{c^2 - 2\phi(\xi)}}, v(\xi) = c + \sqrt{c^2 - 2\phi(\xi)}.$$

用定理 1 的结果及文献[3]中给出的奇异非线性行波方程的基本理论,我们得到了系统

(1) 的行波解的动力学行为如下:

定理 3 1) 当 $g^* < g < g_m$ 时, 对应于由 $H(\phi, y) = h_1$ 定义的同宿于鞍点 $(\phi_1, 0)$ 的同宿轨道, 系统(1) 存在一个光滑的孤立波解; 对应于由 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, h_1)$ 所定义的一族周期轨, 系统(1) 存在一族光滑的周期波解(见图 2(a) 和图 2(b)).

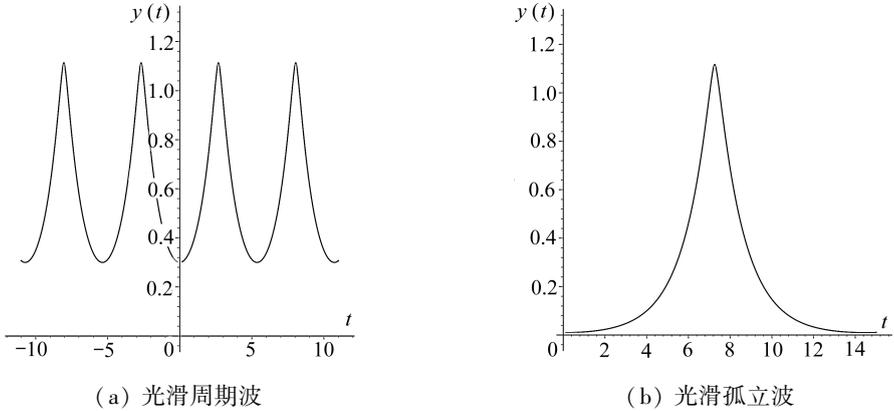


图 2 系统(1) 的关于 ϕ 的光滑孤立波解和光滑周期波解

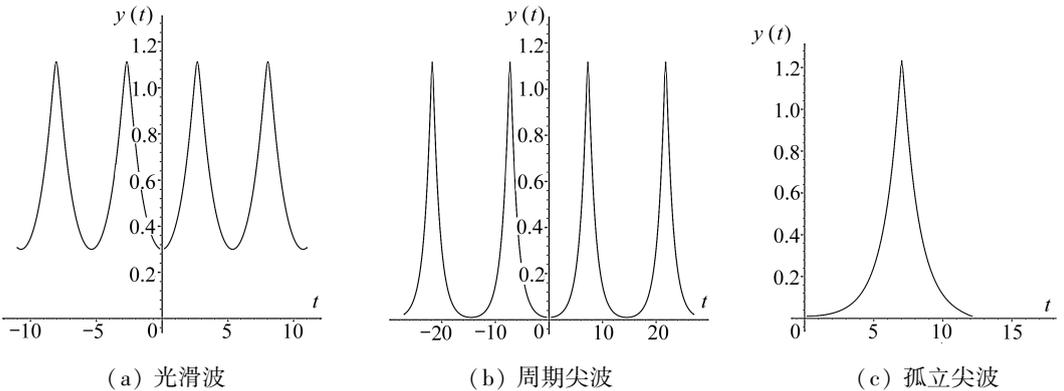


图 3 系统(1) 的关于 ϕ 的孤立尖波和周期波解

2) 当 $g = g^*$ 时, 对应于由 $H(\phi, y) = h_1 = h_3$ 定义的同宿于鞍点 $(\phi_1, 0)$ 的同宿轨, 系统(1) 存在一个孤立尖波解; 对应于由 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, h_3)$ 定义的一族周期轨, 系统(1) 存在一族光滑的周期波解; 当 h 从 h_2 变到 h_3 时, 这些周期波解将逐渐失去光滑性, 由周期波变成周期尖波, 再收敛到孤立尖波(见 图 3(a) ~ 图 3(c)).

3) 当 $g < g^*$ 时, 对应于由 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, h_3)$ 定义的周期轨道族, 系统(1) 存在一族光滑的周期波解; 当 h 从 h_2 变到 h_3 时, 这些周期波解将逐渐失去光滑性, 由光滑的周期波变成周期尖波; 对应于由 $H(\phi, y) = h, h \in (h_3, h_1]$ 定义的周期轨道族, 系统(1) 有一族有界的破缺波解.

参考文献:

[1] Haragus M, Scheel A. Linear stability and instability of ion-acoustic plasmas solitary waves [J]. *Physica D*, 2002, **170**(1): 13-30.
 [2] LI Yi, Sattinger D H. Soliton collisions in the ion acoustic plasmas equations [J]. *Journal of Mathematics and Fluid Mechanics*, 1999, **1**(1): 117-130.

- [3] LI Ji-bin, LIU Zheng-rong. Smooth and non-smooth traveling waves in a nonlinearly dispersive equation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2000, **25**(1):41-56.
- [4] LI Ji-bin, DAI Hui-hui. *On the Study of Singular Nonlinear Travelling Wave Equations: Dynamical Approach*[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [5] Perko L M. *Bifurcation of Limit Cycles*[M]. Lecture Notes in Math. New York: Springer-Verlag, **1455**, 1990: 315-333.

Dynamical Behavior of Traveling Wave Solutions in the Ion Acoustic Plasma Equations

LI Shu-min^{1,2}, HE Tian-lan¹

(1. *Center for Nonlinear Science Studies, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China;*

2. *Oxbridge College, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650106, P. R. China*)

Abstract: By using the theory of planar dynamical systems to the ion acoustic plasma equations, the existence of smooth and non-smooth solitary wave solutions and uncountably infinite smooth and non-smooth periodic wave solutions is obtained. Furthermore, Under given parametric conditions, the sufficient conditions which guarantee the existence of the above solutions are given.

Key words: solitary traveling wave solution; periodic traveling wave solution; smoothness of waves; ion acoustic plasma equations