

裂纹间作用机制探讨及微裂纹区对 主裂纹的作用效应研究*

夏晓舟^{1,2,3}, 章青^{1,2}, 乔丕忠^{1,2,4}, 李丽娟³

(1. 河海大学 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,南京 210098;

2. 河海大学 工程力学系,南京 210098;

3. 广东工业大学 建设学院,广州 510006;

4. 华盛顿州立大学 土木与环境工程学院,华盛顿 99164-2910,美国)

(郭兴明推荐)

摘要: 采用迭加原理和 Kachanov 提出的简化方法,研究了裂纹间的相互作用机理,分析了不同裂纹布置形式所产生的增强或屏蔽效应,发现当微裂纹沿着或垂直于最大拉应力方向布置时都不产生最大的作用效应,这有别于 Ortiz [ASME Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(3):54-58] 的结论. 还探讨了混凝土类材料的微裂纹的产生机制及微裂纹区对主裂纹尖端产生的作用效应,得出微裂纹区对主裂纹是起增强的作用,增强程度随微裂纹密度和微裂纹长度的增大而增大的结论.

关键词: 迭加原理; 应力强度因子; 作用效应; 微裂纹区

中图分类号: O346 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.007

引 言

裂纹间由于存在相互作用而使得裂纹尖端的应力强度因子不同于单个裂纹在同样的外载作用下的应力强度因子,自然,应力场和位移场也都由于裂纹间的相互干扰而变得与裂纹单独存在时有所不同. 一般而言,如果裂纹间的这种相互作用使得裂纹尖端的应力强度因子大于裂纹单独存在时的应力强度因子,则认为该裂纹受到另一裂纹的增强作用,称之为增强效应;反之,如果裂纹间的这种相互作用使得裂纹尖端的应力强度因子小于裂纹单独存在时的应力强度因子,则认为该裂纹受到另一裂纹的减弱作用,称之为屏蔽效应. 这和 Ortiz 理解的不太一致,Ortiz^[1]及 Ortiz 和 Giannakopoulos^[2]则是从主裂纹尖端的微裂纹区的有效本构行为(如连续介质理论、引入裂纹密度的统计损伤理论)出发,通过 J 积分的路径无关性来推演出屏蔽比

* 收稿日期: 2009-03-24; 修订日期: 2009-11-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10972072;50679022;10872052);国家重点基础研究发展计划资助项目(2007CB714104);河海大学水文水资源和水利工程国家重点实验室开放基金资助项目(2009585912)

作者简介: 夏晓舟(1976—),男,江西泰和人,讲师,博士(联系人. E-mail: xiaxiaozhou@163.com);
章青(1963—),男,教授(E-mail: Lxzhangqing@hhu.edu.cn);
乔丕忠(1968—),男,教授(E-mail: qiao@wsu.edu);
李丽娟(1966—),女,教授(E-mail: lilj@gdut.edu.cn).

K_{tip}/K_{∞} 的表达式,即用裂纹尖端的应力强度因子与裂纹远场的应力强度因子的比值 K_{tip}/K_{∞} 来衡量裂纹间的屏蔽效应,认为比值越大,屏蔽效应就越强,这种唯象方法很难真正揭示裂纹间屏蔽背后的机制. Kachanov^[3-4] 从理论上导出了裂纹间的相互作用矩阵,并通过平均化处理探讨了裂纹间的相互作用. 高蕴昕等^[5] 把裂纹扩展到任意缺陷间的相互作用,除此之外, Ju 等^[6-7], Chen^[8], Feng 等^[9], Rose^[10], Rubinstein^[11], Yan^[12] 等人也对裂纹甚至缺陷间的相互作用作了探讨. 但均没有具体对裂纹的各种布置形式的相互作用效应进行探讨,并分析裂纹间的布置形态所对应的增强或屏蔽效应. 本文通过叠加原理,运用 Kachanov 提出的简化方法^[3] 研究了裂纹间的相互作用是如何随裂纹布置的不同而发生变化,即考察怎样的裂纹布置会带来屏蔽效应,又怎样的裂纹布置会带来增强效应,这些屏蔽或者增强的程度如何. 有了前面的具体成果,就可以进一步探讨微裂纹区对主裂纹的总体效应.

1 裂纹间的相互作用机制

1.1 迭加原理

为考察裂纹间的相互作用机制,这里以最简单的无限大薄板为例,由迭加原理知,含两个裂纹的无限大薄板在无穷远处受到 σ^{∞} 作用,该问题可分解为不含任何裂纹的无限大薄板于无穷远处承受 σ^{∞} 作用的均匀受力问题和两个子问题,即两个裂纹各自单独存在的无限延伸的薄板裂纹问题. 在这两个子问题中,无穷远处不受力,但在裂纹表面承受未知待求的面力. 见图 1 所示,图中 σ^{2-1} 表示裂纹 2 对裂纹 1 的作用, σ^{1-2} 表示裂纹 1 对裂纹 2 的作用.

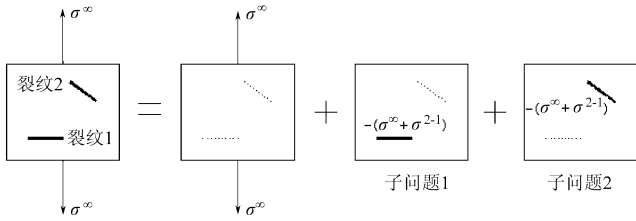


图 1 含两个裂纹的无限大薄板问题分解

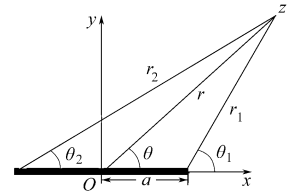


图 2 坐标系

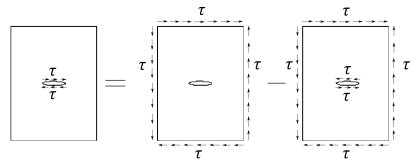
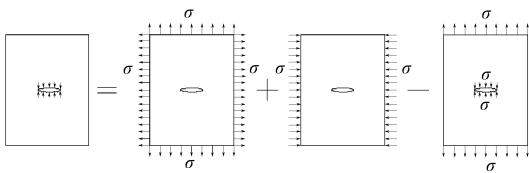


图 3 裂纹表面受法向张力的无限薄板问题分解

图 4 裂纹表面受切向力的无限薄板问题分解

因为均匀受力问题的应力强度因子为 0,因而考察裂纹间的相互作用机制自然就落实到后面的两个子问题. 由断裂力学知识^[13],若取图 2 的坐标系,一无限大薄板,中心含一长为 $2a$ 的穿透裂纹,在裂纹表面处受到单位法向的张力,其产生的应力场可由图 3 的分解子问题的应力场迭加得到,则其任意一点 z 的应力可表示为式(1),同样,按迭加原理(图 4 所示)可得到在裂纹表面承受单位切向的剪切力时的应力场,见式(2). 因而在裂纹表面力 $[p, q]$ 作用时,其产生的应力场为

$$\sigma_x = p \cdot \sigma_{x1} + q \cdot \sigma_{xII}, \quad \sigma_y = p \cdot \sigma_{y1} + q \cdot \sigma_{yII}, \quad \tau_{xy} = p \cdot \tau_{xy1} + q \cdot \tau_{xyII} \cdot$$

$$\begin{cases} \sigma_{xI} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - 1, \\ \sigma_{yI} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - 1, \\ \tau_{xyI} = \frac{ra^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xII} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[2\sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right], \\ \sigma_{yII} = \frac{ra^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2), \\ \tau_{xyII} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - 1. \end{cases} \quad (2)$$

两个裂纹的布置示意图如图5所示,整体坐标和裂纹1的坐标重合,则在子问题1中,因为裂纹2的法线方向 $\alpha = \pi/2 + \phi$,取向 ϕ 对应图5为负值,所以,在裂纹1的表面承受单位法向的张力时,其在裂纹2处产生的法向应力和切向应力分别为式(3)和(4). 同样,裂纹1的表面承受单位切向的剪力时,其在裂纹2处产生的法向应力和切向应力分别为式(5)和(6). 在子问题2中,以裂纹2的局部坐标系 $x'O'y'$ 来描述,此时裂纹1的法线方向 $\alpha = \pi/2 - \phi$, 所以,在裂纹2的面作用单位法向的张力时,其在裂纹1处产生的法向应力和切向应力分别为式(7)和(8); 同样,对于在裂纹2的表面作用单位切向剪力时,其在裂纹1处产生的法向应力和切向应力分别为式(9)和(10).

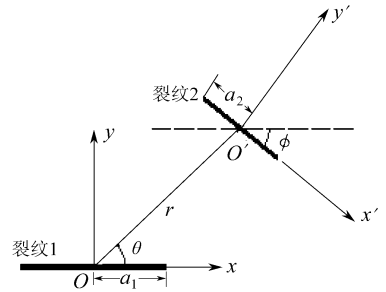


图5 裂纹的布置示意图

这里简单地说明一下公式中符号的上下标代表的意义,上标“1-2”表示裂纹1对裂纹2产生的作用;上标“1”表示裂纹1下的应力场;下标“ αI ”表示I型问题(即法向作用)的斜面应力;上标“2-1”表示裂纹2对裂纹1产生的作用;上标“2”表示裂纹2下的应力场;下标“ αII ”表示II型问题的斜面应力.

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha I}^{1-2} &= \frac{\sigma_{xI}^1 + \sigma_{yI}^1}{2} + \frac{\sigma_{xI}^1 - \sigma_{yI}^1}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xyI}^1 \sin 2\alpha = \\ &= \frac{\sigma_{xI}^1 + \sigma_{yI}^1}{2} - \frac{\sigma_{xI}^1 - \sigma_{yI}^1}{2} \cos 2\phi - \tau_{xyI}^1 \sin 2\phi = \\ &= -1 + \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{a_1^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \cos 2\phi - \right. \\ & \quad \left. \frac{a_1^2}{r_1 r_2} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \sin 2\phi \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha I}^{1-2} &= \frac{\sigma_{xI}^1 - \sigma_{yI}^1}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xyI}^1 \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{yI}^1 - \sigma_{xI}^1}{2} \sin 2\phi + \tau_{xyI}^1 \cos 2\phi = \\ &= \frac{ra_1^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[\sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \sin 2\phi + \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \cos 2\phi \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\parallel}^{1-2} = & \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left\{ \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \right. \\ & \left[\frac{a_1^2}{r_1 r_2} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right] \cos 2\phi - \\ & \left. \left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{a_1^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \sin 2\phi \right\} + \sin 2\phi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\parallel}^{1-2} = & \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left\{ \left[\frac{a_1^2}{r_1 r_2} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right] \sin 2\phi + \right. \\ & \left. \left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{a_1^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \cos 2\phi \right\} - \cos 2\phi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\perp}^{2-1} = & \frac{\sigma_{x'1}^2 + \sigma_{y'1}^2}{2} + \frac{\sigma_{x'1}^2 - \sigma_{y'1}^2}{2} \cos 2\alpha + \tau_{x'y'1}^2 \sin 2\alpha = \\ & \frac{\sigma_{x'1}^2 + \sigma_{y'1}^2}{2} - \frac{\sigma_{x'1}^2 - \sigma_{y'1}^2}{2} \cos 2\phi + \tau_{x'y'1}^2 \sin 2\phi = \\ & -1 + \frac{r}{\sqrt{r_1' r_2'}} \left[\cos\left(\theta' - \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) + \frac{a_2^2}{r_1' r_2'} \sin\theta' \sin \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \cos 2\phi + \right. \\ & \left. \frac{a_2^2}{r_1' r_2'} \sin\theta' \cos \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \sin 2\phi \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\perp}^{2-1} = & \frac{\sigma_{x'1}^2 - \sigma_{y'1}^2}{2} \sin 2\alpha - \tau_{x'y'1}^2 \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{x'1}^2 - \sigma_{y'1}^2}{2} \sin 2\phi + \tau_{x'y'1}^2 \cos 2\phi = \\ & - \frac{r a_2^2}{(r_1' r_2')^{3/2}} \left[\sin\theta' \sin \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \sin 2\phi - \sin\theta' \cos \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \cos 2\phi \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\parallel}^{2-1} = & \frac{r}{\sqrt{r_1' r_2'}} \left\{ \sin\left(\theta' - \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) + \right. \\ & \left[\frac{a_2^2}{r_1' r_2'} \sin\theta' \cos \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') - \sin\left(\theta' - \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) \right] \cos 2\phi + \\ & \left. \left[\cos\left(\theta' - \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) - \frac{a_2^2}{r_1' r_2'} \sin\theta' \sin \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \right] \sin 2\phi \right\} - \sin 2\phi, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\parallel}^{2-1} = & - \frac{r}{\sqrt{r_1' r_2'}} \left\{ \left[\frac{a_2^2}{r_1' r_2'} \sin\theta' \cos \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') - \sin\left(\theta' - \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) \right] \sin 2\phi - \right. \\ & \left. \left[\cos\left(\theta' - \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) - \frac{a_2^2}{r_1' r_2'} \sin\theta' \sin \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \right] \cos 2\phi \right\} - \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (10)$$

1.2 裂纹间的相互作用矩阵

裂纹的表面力是非均匀分布的,在计算裂纹的相互作用时比较繁琐,导用 Kachanov 的简化方法^[3],当裂纹不是很近时,应用平均的处理办法,误差不是很大,即如图 6 所示的那样,把非均匀分布的面力分解成均匀部分和平均值为 0 的非均匀部分,在计算裂纹间的相互作用时,忽略均值为 0 的非均匀部分的影响,图中展示的是法向面力的情形,对于切向面力亦然。

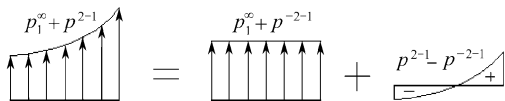


图 6 裂纹面力分解成平均部分和零均值的非均匀部分

在裂纹 1 的表面承受单位张力时,裂纹 2 处产生平均力学响应,为便于积分取裂纹 2 的局部坐标系 $x'O'y'$, 得到裂纹 2 的整体坐标系变换公式:

$$\begin{cases} x = x' \cos\phi + r_0 \cos\theta_0 \\ y = x' \sin\phi + r_0 \sin\theta_0 \end{cases} \quad (-a_2 \leq x' \leq a_2), \quad (11)$$

式中, $r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0$ 分别为裂纹 2 的中点 O' 在 xOy 标架下的横坐标和纵坐标. 由

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad r_1 = \sqrt{(r \cos\theta - a_1)^2 + (r \sin\theta)^2}, \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{r \sin\theta}{r \cos\theta - a_1}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{r \sin\theta}{r \cos\theta + a_1}\right), \\ r_2 &= \sqrt{(r \cos\theta + a_1)^2 + (r \sin\theta)^2}, \end{aligned}$$

$\sigma_{\alpha 1}^{1-2}, \tau_{\alpha 1}^{1-2}, \sigma_{\alpha \parallel}^{1-2}, \tau_{\alpha \parallel}^{1-2}$ 最终可写成只含 x' 的函数. 容易求出它们的平均值如下:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{1-2} &= \frac{1}{2a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \sigma_{\alpha 1}^{1-2}(x') dx', \quad \bar{\tau}_{\alpha 1}^{1-2} = \frac{1}{2a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \tau_{\alpha 1}^{1-2}(x') dx', \\ \bar{\sigma}_{\alpha \parallel}^{1-2} &= \frac{1}{2a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \sigma_{\alpha \parallel}^{1-2}(x') dx', \quad \bar{\tau}_{\alpha \parallel}^{1-2} = \frac{1}{2a_2} \int_{-a_2}^{a_2} \tau_{\alpha \parallel}^{1-2}(x') dx', \end{aligned}$$

同样,可求出平均值 $\bar{\sigma}_{\alpha 1}^{2-1}, \bar{\tau}_{\alpha 1}^{2-1}, \bar{\sigma}_{\alpha \parallel}^{2-1}, \bar{\tau}_{\alpha \parallel}^{2-1}$. 当在无穷远施加外力 $[\sigma_{11}^\infty \quad \sigma_{22}^\infty \quad \tau_{21}^\infty]^\top$ 时, 则其在裂纹 1、2 处产生的法向应力和切向应力为

$$\begin{Bmatrix} p_1^\infty \\ q_1^\infty \\ p_2^\infty \\ q_2^\infty \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \\ -(\sin 2\theta)/2 & (\sin 2\theta)/2 & \cos 2\theta \\ \sin^2(\theta + \phi) & \cos^2(\theta + \phi) & -\sin 2(\theta + \phi) \\ -(\sin 2(\theta + \phi))/2 & \sin 2(\theta + \phi) & \cos 2(\theta + \phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^\infty \\ \sigma_{22}^\infty \\ \tau_{21}^\infty \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

式中, θ 为裂纹 1 与整体坐标 x 轴之间的夹角, ϕ 为局部坐标(建立在裂纹 1 的局部坐标)下裂纹 2 与 x' 轴之间的夹角, 通常主裂纹与整体坐标 x 轴重合, 从而 $\theta = 0$. 于是, 可求出子问题中待求的裂纹平均表面力, 即

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{q}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^\infty \\ q_1^\infty \\ p_2^\infty \\ q_2^\infty \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{2-1} & \bar{\sigma}_{\alpha \parallel}^{2-1} \\ 0 & 0 & \bar{\tau}_{\alpha 1}^{2-1} & \tau_{\alpha \parallel}^{2-1} \\ \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{1-2} & \bar{\sigma}_{\alpha \parallel}^{1-2} & 0 & 0 \\ \bar{\tau}_{\alpha 1}^{1-2} & \bar{\tau}_{\alpha \parallel}^{1-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{q}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

简写为 $\bar{T} = (I - A)^{-1} \cdot T^\infty$, A 就是裂纹间的相互作用矩阵.

1.3 裂纹间的增强和屏蔽效应

运用式(13)就可以研究裂纹间不同布置(包括取向)所产生的作用效应. 由式(13)算出裂纹平均表面力后, 可按下式估算裂纹表面力:

$$\begin{cases} p_1(x) = p_1^\infty + \bar{p}_2 \cdot \sigma_{\alpha 1}^{2-1}(x) + \bar{q}_2 \cdot \sigma_{\alpha \parallel}^{2-1}(x), \\ q_1(x) = q_1^\infty + \bar{p}_2 \cdot \tau_{\alpha 1}^{2-1}(x) + \bar{q}_2 \cdot \tau_{\alpha \parallel}^{2-1}(x), \\ p_2(x') = p_2^\infty + \bar{p}_1 \cdot \sigma_{\alpha 1}^{1-2}(x') + \bar{q}_1 \cdot \sigma_{\alpha \parallel}^{1-2}(x'), \\ q_2(x') = q_2^\infty + \bar{p}_1 \cdot \tau_{\alpha 1}^{1-2}(x') + \bar{q}_1 \cdot \tau_{\alpha \parallel}^{1-2}(x'). \end{cases} \quad (14)$$

这样处理后, 可以部分弥补由于平均处理带来的误差. 将式(14)代入应力强度因子的计算式^[13], 即

$$\begin{cases} K_{\text{I}}(\pm a_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} \int_{-a_1}^{a_1} \sqrt{\frac{a_1 \pm x}{a_1 \mp x}} \cdot p_1(x) dx, \\ K_{\text{II}}(\pm a_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} \int_{-a_1}^{a_1} \sqrt{\frac{a_1 \pm x}{a_1 \mp x}} \cdot q_1(x) dx, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} K_{\text{I}}(\pm a_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_2}} \int_{-a_2}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2 \pm x'}{a_2 \mp x'}} \cdot p_2(x') dx', \\ K_{\text{II}}(\pm a_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_2}} \int_{-a_2}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2 \pm x'}{a_2 \mp x'}} \cdot q_2(x') dx'. \end{cases} \quad (16)$$

最终可求出在外力 $[\sigma_x^\infty \quad \sigma_y^\infty \quad \tau_{xy}^\infty]^T$ 作用下裂纹 1、2 的应力强度因子, 仍采用图 5 的裂纹布置示意图, 相对于裂纹 1 而言, 分别考察 I 型 ($\sigma_y^\infty = 1; \sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$)、II 型 ($\tau_{xy}^\infty = 1; \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 0$) 和复合型 ($\sigma_x^\infty = 0; \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 1$) 的裂纹增强和屏蔽效应, 计算了不同 θ 下 $K_{\text{I}}/K_{\text{I}0}$ 和 $K_{\text{II}}/K_{\text{II}0}$ 随 ϕ 的变化曲线, 如图 7 ~ 10 所示, 这里的 K_{I} 和 K_{II} 表示考虑裂纹间相互作用的裂尖应力强度因子 (分别对应 I 型和 II 型), $K_{\text{I}0}$ 和 $K_{\text{II}0}$ 表示不考虑裂纹间相互作用的裂尖应力强度因子 (对应 I 型和 II 型)。

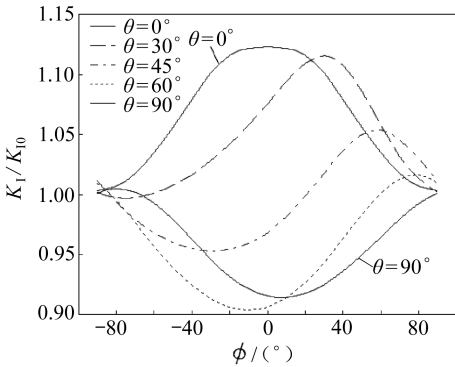


图 7 不同 θ 下 $K_{\text{I}}/K_{\text{I}0}$ 随 ϕ 的变化曲线 (I 型)

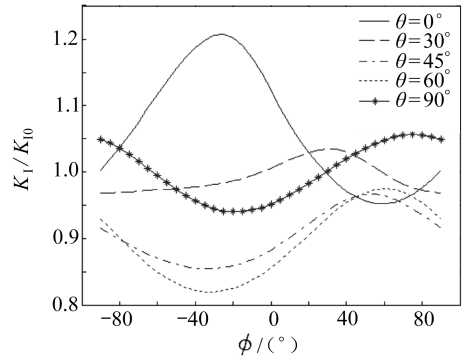


图 8 不同 θ 下 $K_{\text{I}}/K_{\text{I}0}$ 随 ϕ 的变化曲线 (复合型)

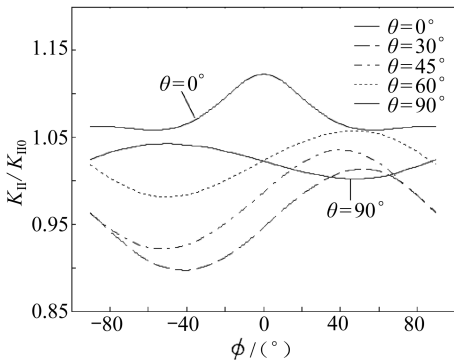


图 9 不同 θ 下 $K_{\text{II}}/K_{\text{II}0}$ 随 ϕ 的变化曲线 (II 型)

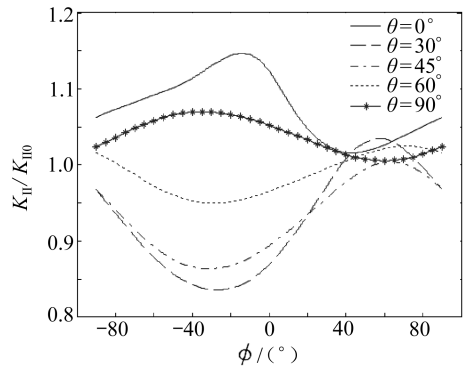


图 10 不同 θ 下 $K_{\text{II}}/K_{\text{II}0}$ 随 ϕ 的变化曲线 (复合型)

图 7 所展示的是不同 θ 下 $K_{\text{I}}/K_{\text{I}0}$ 随 ϕ 的变化曲线 (I 型), 不难看出随 θ 的增大, 裂纹 2 对裂纹 1 的增强效应逐步减弱, 且最大增强效应对应的 ϕ 角逐步推后, 相反, 随 θ 的增大, 裂纹

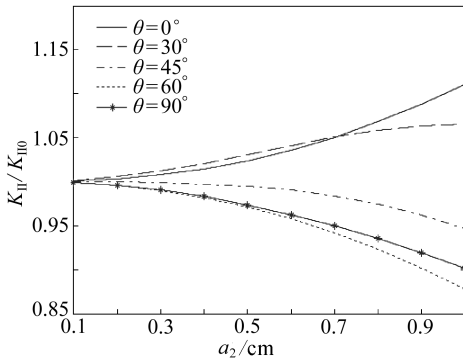


图 11 K_I/K_{I0} 随其半长的变化曲线 (I 型)

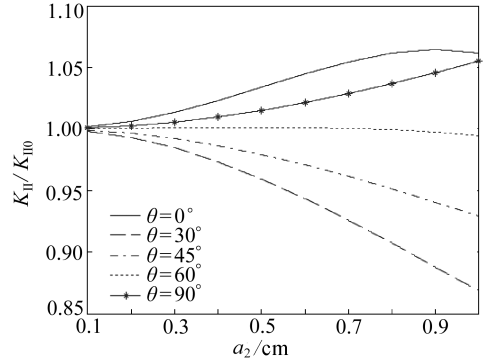


图 12 K_{II}/K_{II0} 随其半长的变化曲线 (II 型)

2 对裂纹 1 的屏蔽效应却逐步加强,且最大屏蔽效应对应的 ϕ 角逐步推后.图 8 所展示的是复合型不同 θ 下 K_I/K_{I0} 随 ϕ 的变化曲线,相对于 I 型,剪切力对 K_I/K_{I0} 影响很大,原先增强的更强了,原先屏蔽的更屏蔽了.

从图 9 可以看出,对于 II 型,当 $\theta < 60^\circ$ 时,裂纹 2 对裂纹 1 的屏蔽效应随着 θ 的增大而逐步减弱.比较图 10 和图 9 的结果,法向力对 K_{II}/K_{II0} 起相同的放大作用.

图 11、12 所展示的是裂纹 2 按垂直于主拉应力方向布置时 K_I/K_{I0} 和 K_{II}/K_{II0} 随其半长 a_2 的变化曲线,对于 I 型和 II 型,从中可看出随着裂纹 2 长度的逐步增大(保证两裂纹不相交或靠得很近),裂纹间的相互作用也逐步增大,即增强的更强了,屏蔽的更屏蔽了.

1.4 有效性检验

为验证成果的有效性,作者采用有限元方法计算了几种裂纹布置工况,所算出的裂纹 1 右尖端点的应力强度因子 K_I/K_{I0} 见表 1.从表 1 的对比不难看出,本文计算的结果与有限元计算的结果相近且随 ϕ 角的趋势亦相同,说明本文计算的结果有效.

表 1 $\theta = 0^\circ$ 及 $\theta = 90^\circ$ 时两种方法所计算的 K_I/K_{I0}

$\theta/(^\circ)$	方法	$\phi/(^\circ)$				
		0	30	45	60	90
$\theta = 0$	有限元	1.106 9	1.090 8	1.060 6	1.031 1	1.003 6
	本文分析	1.123 0	1.101 3	1.068 0	1.034 8	1.003 6
$\theta = 90$	有限元	0.933 5	0.960 3	0.981 1	0.997 1	1.000 9
	本文分析	0.915 5	0.925 4	0.943 0	0.965 0	1.001 4

2 微裂纹区对主裂纹产生的作用效应分析

2.1 微裂纹产生机制

混凝土是准脆性材料,抗拉能力相对其抗剪和抗压能力都很弱,大部分裂纹都是由于拉应力引起的,因而可假设其微裂纹的产生机制是按主拉应力大于材料抗拉强度的准则来实现的.对 I 型裂纹,微裂纹取向为

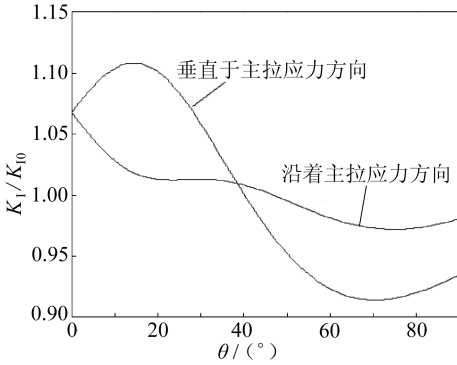
$$\phi = \varphi \pm \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{\cos(3\theta/2)}{1 - \sin(3\theta/2)}\right) \pm \frac{\pi}{2}, \quad (17)$$

式中, φ 为主拉应力方向, $\arctan(\tau_{xy}/(\sigma_1 - \sigma_y)) < 0$ 取加号,反之,取减号.对 II 型裂纹,微

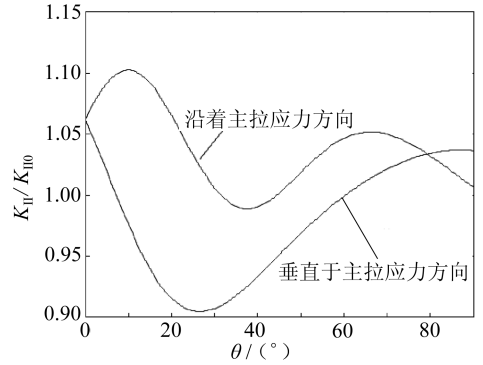
裂纹取向为

$$\phi = \arctan \left(\left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\} / \left\{ -\sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3 \cos^2 \theta}{4}} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \right) \pm \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

微裂纹长度相对于主裂纹很短, 单个微裂纹对主裂纹的作用效应不是很明显, 为了使所考察的微裂纹对主裂纹的作用效应明显, 特放大微裂纹的长度. 计算参数仍采用 $a_1 = 1 \text{ cm}$, $a_2 = 0.8 \text{ cm}$, $r_0 = 2.5 \text{ cm}$, 但微裂纹沿着或垂直于主拉应力的方向布置, 计算结果如图 13 所示. 注意, 这里的尖端应力场与式(1)不一样, 式(1)反映的只是子问题的应力场, 即在裂纹表面力作用下的应力场, 另外, 极坐标也不一样, 这里的 (r, θ) 是以裂纹尖端点为坐标原点的极坐标, 前面则是以裂纹中心为原点的极坐标. 从图 13 不难发现, 微裂纹沿主拉应力的方向布置时并不产生最大的屏蔽效应, 甚至大部分还产生增强效应; 另外, 微裂纹按垂直于主拉应力方向布置时也不产生最大的增强效应, 甚至有些还产生屏蔽效应, 这与 Ortiz^[1] 给出的结果不同.



(a) $K_I/K_{I0}-\theta$ 关系曲线 (I 型)



(b) $K_{II}/K_{II0}-\theta$ 关系曲线 (II 型)

图 13 微裂纹沿着(垂直于)最大拉应力方向布置时对主裂纹产生的作用效应

2.2 主裂纹及微裂纹群之间的相互作用矩阵

假设主裂纹尖端的微裂纹数目为 n , 仍然采用 Kachanov 的简化方法, 导出 $2(n+1)$ 维方程组(19)计算式, 类似前面的求解过程, 最终可求得每个裂纹尖端的应力强度因子.

$$\begin{cases} \bar{p}_1 = p_1^\infty + \sum_{i=2}^n \bar{p}_i \cdot \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{i-1} + \sum_{i=2}^n \bar{q}_i \cdot \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{i-1}, \\ \bar{q}_1 = q_1^\infty + \sum_{i=2}^n \bar{p}_i \cdot \bar{\tau}_{\alpha 1}^{i-1} + \sum_{i=2}^n \bar{q}_i \cdot \bar{\tau}_{\alpha 1}^{i-1}, \\ \bar{p}_i = p_i^\infty + \bar{p}_1 \cdot \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{1-i} + \bar{q}_1 \cdot \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{1-i} + \sum_{j=2, j \neq i}^n \bar{p}_j \cdot \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{j-i} + \sum_{j=2, j \neq i}^n \bar{q}_j \cdot \bar{\sigma}_{\alpha 1}^{j-i}, \\ \bar{q}_i = q_i^\infty + \bar{p}_1 \cdot \bar{\tau}_{\alpha 1}^{1-i} + \bar{q}_1 \cdot \bar{\tau}_{\alpha 1}^{1-i} + \sum_{j=2, j \neq i}^n \bar{p}_j \cdot \bar{\tau}_{\alpha 1}^{j-i} + \sum_{j=2, j \neq i}^n \bar{q}_j \cdot \bar{\tau}_{\alpha 1}^{j-i}, \end{cases} \quad (19)$$

式中, $i = 2, 3, \dots, n+1$. 上式同样可写成矩阵形式 $T = (I - A)^{-1} \cdot T^\infty$, 其中 A 为相互作用矩阵, 是 $2(n+1) \times 2(n+1)$ 维矩阵.

2.3 微裂纹区对主裂纹尖端的作用效应

混凝土微裂纹区的范围, 由理论强度开裂模型^[13] 所确定的边界线方程来确定, 即

$$r(\theta) = \left\{ (K_{1c}^2 \alpha^2) / \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right)^2 8\pi f_t^2 \right\} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 \pm \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2, \quad (20)$$

式中, $\alpha = b/a$, K_{1c} 为混凝土的宏观断裂韧度, f_t 为混凝土的抗拉强度. 其中, a, b 分别为主裂纹的长半轴和短半轴. 若取 $a = 4 \text{ cm}$, $b = 0.57 \text{ cm}$, $K_{1c} = 60 \text{ MP}\sqrt{\text{m}}$, $f_t = 2 \text{ MPa}$, 则由式(20)容易绘出主裂纹尖端的微裂纹区边界线, 如图 14 所示.

已知微裂纹区所含微裂纹个数为 $n = 50$, 并假定微裂纹随位置均匀分布, 则微裂纹密度为 $\rho = f(r, \theta) = n/A$. 在微裂纹区随机生成微裂纹, 假设微裂纹的统计半长 a_2 为主裂纹半长 a 的 0.1 倍, 要求微裂纹间两两不相交, 取向 ϕ 按主拉应力方向取, 生成的微裂纹如图 14 所示. 由上一节给出的公式, 注意坐标系的不同, 可算出裂纹间相互作用矩阵的系数, 然后根据方程(19) 解出裂纹表面力向量, 将主裂纹的法向表面力代入上一节应力强度因子公式(14), 最终可算出结果为 $K_1/K_{10} = 1.38$, 说明微裂纹区对主裂纹尖端起着很大的增强效应.

由于微裂纹的取向是随其产生的位置而确定的, 因而随机变量只剩下微裂纹的长度、密度和位置, 这几个随机变量只影响对主裂纹作用效应的强弱, 但不改变作用效应的性质(增强或屏蔽), 即决定裂纹间的相互作用是增强还是减弱的关键性因素是裂纹的取向. 因而, 假设微裂纹是沿着主裂纹的主拉应力场的垂直方向场产生, 则微裂纹区对主裂纹尖端必然起着增强的效应, 效应的强弱视微裂纹密度和统计长度而定. 假设微裂纹长度保持不变, 则微裂纹区对主裂纹尖端的增强效应随微裂纹密度增大而增大. 这些均与实际情况吻合.

3 结 语

采用迭加原理和 Kachanov 提出的平均化处理方法研究了裂纹间的相互作用机制, 得出不同裂纹布置形式所产生的作用效应, 具体为微裂纹沿主拉应力的方向布置时并不产生最大的屏蔽效应, 甚至大部分还产生增强效应; 另外, 微裂纹按垂直于主拉应力方向布置时也不产生最大的增强效应, 甚至有些还产生屏蔽效应. 总之, 当微裂纹沿着或者垂直于最大拉应力方向布置时都不产生最大的作用效应.

文章最后探讨了混凝土微裂纹区对主裂纹尖端产生的作用效应, 得出微裂纹区对主裂纹是起增强的作用, 增强程度随微裂纹密度和微裂纹长度的增大而增大的结论, 符合实际情况.

参考文献:

- [1] Ortiz M. A continuum theory of crack shielding in ceramics[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1987, **54**(3): 54-58.
- [2] Ortiz M, Giannakopoulos A E. Maximal crack tip shielding by microcracking[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1989, **56**(6): 279-283.
- [3] Kachanov M. Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1987, **23**(1): 23-43.
- [4] Kachanov M. A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks[J]. *International Journal of Fracture*, 1985, **28**(1): r11-r19.

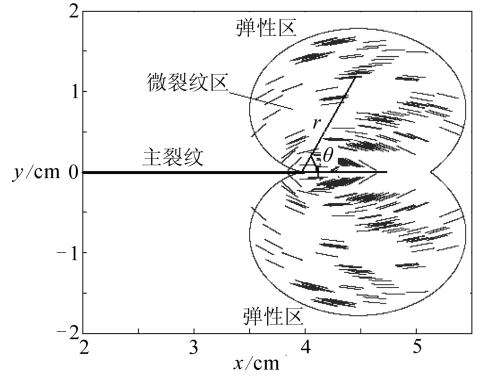


图 14 混凝土主裂纹尖端的微裂纹区边界线

- [5] 高蕴昕,郑泉水,余寿文. 损伤体有效弹性性质的细观分析和不变性描述——一个考虑微缺陷相互作用的一般理论模式[J]. *力学学报*,1998,**30**(5):552-563.
- [6] Ju J W,Chen T M. Effective elastic module of two-dimensional brittle solids with interacting microcracks—part I :basic formulations[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*,1994,**61**(6):349-357.
- [7] Ju J W,Chen T M. Effective elastic module of two-dimensional brittle solids with interacting microcracks—part II : evolutionary damage models[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1994,**61**(6):358-368.
- [8] Chen Y Z. General case of multiple crack problems in an infinite plate[J]. *Engineering Fracture Mechanics*,1984,**20**(4):591-597.
- [9] Feng X Q,Li J Y,Yu S W. A simple method for calculating interaction of numerous microcracks and its applications[J]. *International Journal of Solid and Structures*,2003,**40**(2):447-464.
- [10] Rose L R F. Microcrack interaction with a main crack[J]. *International Journal of Fracture*,1986,**31**(3):233-242.
- [11] Rubinstein A A. Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array[J]. *International Journal of Fracture*,1985,**27**(2):113-119.
- [12] Yan X Q. An effective numerical approach for multiple void-crack interaction[J]. *Journal of Applied Mechanics*,2006,**73**(4):525-535.
- [13] 伊双增. 断裂. 损伤理论及应用[M]. 北京:清华大学出版社,1992.

Interaction Between Cracks and Effect of Micro-Crack Zone on Main Crack Tip

XIA Xiao-zhou^{1,2,3}, ZHANG Qing^{1,2}, QIAO Pi-zhong^{1,2,4}, LI Li-juan³

(1. *State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;*

2. *Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;*

3. *The Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, P. R. China;*

4. *Department of Civil and Environmental Engineering, Washington State University, Washington 99164-2910, USA)*

Abstract: The mechanism interaction between cracks with different orientations was analyzed based on the principle of superposition and a flattening method. It is found that the maximum interaction effect will not occur when the micro crack is along the direction parallel or perpendicular to the principal tensile stress, which is different from the conclusion drawn by Ortiz [ASME Journal of Applied Mechanics, 1987, **54**(3):54-58]. The production mechanism of microcrack and the effect of microcrack zone on main crack tip were also studied. As a result, the microcrack zone has magnifying effect on main crack tip, and such a magnifying effect increases with the increase of micro crack density and length.

Key words: principle of superposition; stress intensity factor; interaction effect; microcrack zone