文章编号: 1000- 0887(2009)12- 1501- 12

非自治 Klein- Gordon- Schr└dinger 格点动力系统的一致吸引子*

黄锦舞[1], 韩晓莹[2], 周盛凡[1]

(1. 上海师范大学 数理学院, 上海 200234;
2. 奥本大学 数学与统计系, 奥本 36849, 美国)

(陈立群推荐)

摘要: 首先证明了耗散的非自治 Klei - Gordo - Schr└di ger 格点动力系统的解确定的一族过程的紧一致吸引子的存在性• 其次得到了该紧一致吸引子的 Kolmogorov 熵的一个上界• 最后建立了该紧一致吸引子的上半连续性•

关 键 词: 紧一致吸引子; 非自治; Klei - Gordo - Schr└di ger 格点系统; Kolmogorov 熵; 上半连续性

中图分类号: O175.15 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.iss .1000- 0887.2009.12.011

引 言

格点动力系统因其在诸如化学反应理论、生物、激光系统、材料科学、电气工程等领域的广泛应用而吸引了许多研究者的兴趣[1- 13]• 从 Chepyzhov 及 Vishik[14] 可知, 核截面和一致吸引子是描述非自治动力系统的长时间行为的两个重要概念• 很多学者[8- 12] 探讨了非自治格点动力系统的紧核截面及一致吸引子•

Klei - Gordo - Schr└di ger(KGS) 格点系统近来很受一些数学工作者的青睐• 如, Abdallah[15], 尹福其等[16] 与 Zhao 和 Zhou[17] 等研究了自治/非自治 KGS 格点系统的全局吸引子/紧核截面的存在性、上半连续性、Kolmogorov 熵• 本文我们将研究下面的非自治 KGS 格点系统的初值问题的一致吸引子的存在性、Kolmogorov 熵和上半连续性:

$$\xi_j + \alpha\xi_j + (2\xi_j - \xi_{j-1} - \xi_{j+1}) + \beta\xi_j - |\eta_j|^{\lambda} = g_j(t),\quad j \in \mathbf{Z},\ t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$\mathrm{i}\eta_j - (2\eta_j - \eta_{j-1} - \eta_{j+1}) + \mathrm{i}\gamma\eta_j + f_j(\xi_j, \eta_j) = h_j(t),\quad j \in \mathbf{Z},\ t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

---

* 收稿日期: 2009- 03- 13; 修订日期: 2009- 10- 19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771139); 上海市教委创新科研资助项目(08ZZ70)
作者简介: 黄锦舞(1982—), 男, 湖北人, 硕士(Tel: + 86- 21- 64324910; E- mail: eyeso me_ hmily1026@hotmail.com);
周盛凡, 男, 教授(联系人. Tel: + 86- 21- 64323887; E- mail: sfzhou@sh u. edu. c).

$$\xi_j|_{t=\tau}=\xi_{j,\tau},\ \varsigma_j|_{t=\tau}=\varsigma_{j,\tau},\ \eta_j|_{t=\tau}=\eta_{j,\tau},\qquad j\in\mathbf{Z},\ \tau\in\mathbf{R}. \tag{3}$$

1 预备知识

设 E 是一个 Banach 空间,而 $\mathcal{B}(E)$ 是 E 的有界集构成的集合. 下面我们介绍来自于 Chepyzhov 和 Vishik[14] 的一些概念.

定义在空间 E 上的双参数映射族

$$\{U(t,\tau)\}=\{U(t,\tau):t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R}\}$$

即

$$U(t,\tau):E\to E,\qquad t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}$$

被称为是 E 上的一个过程,如果

$$U(\tau,\tau)=I,\ U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau),\qquad\forall t\geqslant s\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}.$$

又如果对于所有的 $t\geqslant\tau$, $\tau\in\mathbf{R}$, $x\in E$, $U(t,\tau)x$ 关于 (t,τ,x) 联合连续,则称 $\{U(t,\tau)\}$ 是一个连续过程. 而且,如果对于符号空间 Ξ 里,每一个符号 σ, $U_\sigma(t,\tau)$ 是 E 上的一个过程,则称 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Xi$ 是 E 上的一族过程.

集合 $\mathcal{B}_0\in E$ 被称为是过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Xi$ 的一个一致(关于 $\sigma\in\Xi$) 吸收集,如果对于任意 $\tau\in\mathbf{R}$ 以及每个 $\mathcal{B}\in\mathcal{B}(E)$, 都存在 $t(\tau,\mathcal{B})\geqslant\tau$, 使得 $\bigcup_{\sigma\in\Xi}U_\sigma(t,\tau)\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}_0$ 对任意的 $t\geqslant t(\tau,\mathcal{B})$ 成立.

曲线 $\varphi(\tau)$, $\tau\in\mathbf{R}$ 被称为是过程 $\{U(t,\tau)\}$ 的一条全轨道,如果

$$U(t,\tau)\varphi(\tau)=\varphi(t),\qquad\forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}.$$

过程 $\{U(t,\tau)\}$ 的核 $\mathcal{K}$ 由 $\{U(t,\tau)\}$ 的所有有界全轨道组成,即

$$\mathcal{K}=\{\varphi(\cdot):U(t,\tau)\varphi(\tau)=\varphi(t),\ t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R};\ \|\varphi(\tau)\|_E\leqslant M_\varphi,\tau\in\mathbf{R}\}.$$

在时刻 $t=\tau$, $\tau\in\mathbf{R}$ 处的核截面是集合

$$\mathcal{K}(\tau)=\{\varphi(s):\varphi(\cdot)\in\mathcal{K}\}\subseteq E.$$

闭集 $\mathcal{A}_\Xi$ 被称为过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Xi$ 的一个一致(关于 $\sigma\in\Xi$) 吸引子,如果(i) 它是一致(关于 $\sigma\in\Xi$) 吸引的(吸引性), 即对任意固定的 $\tau\in\mathbf{R}$ 以及任何的 $\mathcal{B}\in\mathcal{B}(E)$, 当 $t\to+\infty$ 时,成立 $\sup_{\sigma\in\Xi}\mathrm{dist}_E(U_\sigma(t,\tau)\mathcal{B},\mathcal{A}_\Xi)\to0$; (ii) 它包含在过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Xi$ 的任意闭的一致(关于 $\sigma\in\Xi$) 吸引集内(最小性), 即对任意的满足吸引性(i) 的闭集 $\mathcal{A}$, 成立

$$\mathcal{A}_\Xi\subseteq\mathcal{A}.$$

对 $\nu>0$, 设 $N_\nu(\mathcal{A}_\Xi,E)$ 是在 E 内可以覆盖 $\mathcal{A}_\Xi$ 的半径为 ν 的开球的最少个数, 那么 $K_\nu(\mathcal{A}_\Xi,E)=\ln N_\nu(\mathcal{A}_\Xi,E)$ 被称为是 $\mathcal{A}_\Xi$ 在 E 内的 Kolmogorov-ν 熵.

假设 $\phi(t)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},E)$, 如果成立

$$\|\phi\|^2_{L^2_\mathrm{b}(\mathbf{R},E)}=\|\phi\|^2_{L^2_\mathrm{b}}=\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\|\phi(t)\|^2_E\,\mathrm{d}t<+\infty,$$

则称 $\phi(t)$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},E)$ 内是平移有界的; 如果集合 $\{\phi(\cdot+r):r\in\mathbf{R}\}$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},E)$ 内是列紧的,则称 $\phi(t)$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},E)$ 内是平移紧的.

本文用 $L^2_\mathrm{b}(\mathbf{R},E)$ 和 $L^2_\mathrm{c}(\mathbf{R},E)$ 分别表示 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},E)$ 内平移有界函数的集合和平移紧函数的集合.

2 解的存在唯一性与有界性

把系统(1)~(3)写为下面的向量形式:

$$\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + \boldsymbol{A}\xi + \beta\xi - |\eta|^{\lambda} = \boldsymbol{g}(t), \qquad t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

$$\mathrm{i}\dot{\eta} - \boldsymbol{A}\eta + \mathrm{i}\gamma\eta + \boldsymbol{f}(\xi, \eta) = \boldsymbol{h}(t), \qquad t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

$$\xi|_{t=\tau} = \xi_\tau,\ \dot{\xi}|_{t=\tau} = \dot{\xi}_\tau,\ \eta|_{t=\tau} = \eta_\tau, \qquad \tau \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

其中

$$\xi = (\xi_j)_{j\in\mathbf{Z}}, \qquad \xi_j \in \mathbf{R},$$

$$\eta = (\eta_j)_{j\in\mathbf{Z}}, \qquad \eta_j \in \mathbf{C},$$

$$|\eta|^{\lambda} = (|\eta_j|^{\lambda})_{j\in\mathbf{Z}},$$

$$\boldsymbol{f}(\xi, \eta) = (f_j(\xi_j, \eta_j))_{j\in\mathbf{Z}},$$

$$\boldsymbol{g}(t) = (g_j(t))_{j\in\mathbf{Z}}, \qquad g_j(t) \in \mathbf{R},$$

$$\boldsymbol{h}(t) = (h_j(t))_{j\in\mathbf{Z}}, \qquad h_j(t) \in \mathbf{C},$$

α, β, γ 及 $\lambda > 1$ 是正常数, 而 i 是虚数单位, 线性算子 $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$(\boldsymbol{A}z)_j = 2z_j - z_{j+1} - z_{j-1}, \qquad \forall j \in \mathbf{Z},\ z = (z_j)_{j\in\mathbf{Z}}$$

且 $\boldsymbol{A}z = ((\boldsymbol{A}z)_j)_{j\in\mathbf{Z}}$•

于是式(4)和(5)可看作是下面的定义在 $\mathbf{R}$ 上连续的非自治的 KGS 方程组的离散化方程组:

$$\begin{cases} \xi_{tt} + \alpha\xi_t - \xi_{xx} + \beta\xi - |\eta|^{\lambda} = g(x, t), & t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R}, \\ \mathrm{i}\eta_t + \eta_{xx} + \mathrm{i}\gamma\eta + f(\xi, \eta) = h(x, t), & t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

该方程组描述一个实中性的介子 ξ 与复核子场 η 相互作用的模型, 其中 $\beta\xi$ 和 $\mathrm{i}\gamma\eta$ 引入该模型的耗散机制, $g(x, t) \in \mathbf{R}$ 和 $h(x, t) \in \mathbf{C}$ 表示外源•

首先, 我们引进与本文所研究系统相关的两个空间• 取

$$L^2 = \left\{ z = (z_j)_{j\in\mathbf{Z}}: z_j \in \mathbf{R},\ j \in \mathbf{Z},\ \sum_{j\in\mathbf{Z}} z_j^2 < +\infty \right\},$$

$$l^2 = \left\{ z = (z_j)_{j\in\mathbf{Z}}: z_j \in \mathbf{C},\ j \in \mathbf{Z},\ \sum_{j\in\mathbf{Z}} |z_j|^2 < +\infty \right\},$$

其中, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示整数集、实数集和复数集• 记 X 为 L^2 或 l^2, 并赋予 X 如下的内积和范数:

$$(z, \omega) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} z_j \bar{\omega}_j, \quad \|z\|^2 = (z, z), \qquad \forall z = (z_j)_{j\in\mathbf{Z}},\ \omega = (\omega_j)_{j\in\mathbf{Z}} \in X,$$

其中 $\bar{\omega}_j$ 是 ω_j 的共轭• 则 X 是一个 Hilbert 空间• 设线性算子 $\boldsymbol{B}: X \to X$ 定义为

$$(\boldsymbol{B}z)_j = z_{j+1} - z_j, \qquad \forall j \in \mathbf{Z},\ z = (z_j)_{j\in\mathbf{Z}} \in X•$$

则线性算子 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都有界, 而且

$$(\boldsymbol{A}z, \omega) = (\boldsymbol{B}z, \boldsymbol{B}\omega), \qquad z, \omega \in X•$$

任取两个元素 z, $\omega \in X$, 定义一个双线性形式如下:

$$(z, \omega)_\beta = (\boldsymbol{B}z, \boldsymbol{B}\omega) + \beta(z, \omega),$$

其中 β 如式(1)和(2)里所示• 则该双线性形式 $(\cdot, \cdot)_\beta$ 是 X 的一个内积• 令

$$L_\beta^2 = (L^2, (\cdot, \cdot)_\beta, \|\cdot\|_\beta),$$

$$L^2 = (L^2, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|),$$

$$l^2 = (l^2, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|),$$

$$H = L^2 \times L^2 \times l^2,\ H_\beta = L_\beta^2 \times L^2 \times l^2$$

为 Hilbert 空间. 设

$$\zeta = \dot{\xi} + \mu\xi,\ \mu = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + 4\beta} > 0,$$

则式(4)~(6)可以写成下面的一阶微分方程的初值问题:

$$\dot{\phi} + C\phi = F(\phi) + \Sigma(t),\qquad t > \tau,\ \tau \in \mathbf{R},\tag{7}$$

$$\phi(\tau) = \phi_\tau = (\xi_\tau, \zeta_\tau, \eta_\tau)^{\mathrm T} = (\xi_\tau, \dot{\xi}_\tau + \mu\xi_\tau, \eta_\tau)^{\mathrm T},\qquad \tau \in \mathbf{R},\tag{8}$$

其中

$$\phi = (\xi, \zeta, \eta)^{\mathrm T},\ \zeta = \dot{\xi} + \mu\xi,\ F(\phi) = (\mathbf{0}, |\eta|^\lambda, \mathrm{i}f(\xi, \eta))^{\mathrm T},$$

$$C = \begin{bmatrix} \mu I & -I & \mathbf{0} \\ A + \beta I - \mu(\alpha - \mu)I & (\alpha - \mu)I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{i}A + \gamma I \end{bmatrix},\tag{9}$$

而 $\Sigma(t) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{g}(t), -\mathrm{i}\boldsymbol{h}(t))^{\mathrm T}$ 作为系统(7)的符号.

本文对函数 $\boldsymbol{f}$ 及符号 $\Sigma(t)$ 做如下假设:

(H1) $\boldsymbol{f}(\xi, \eta)$ 关于 ξ 和 η 是局部 Lipschitz 连续的, 即对任意的正常数 $\mathscr{M}$, 存在一个依赖于 $\mathscr{M}$ 的正常数 $L_{\mathscr{M}}$ 满足

$$\|\boldsymbol{f}(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}) - \boldsymbol{f}(\xi^{(2)}, \eta^{(2)})\| \leqslant L_{\mathscr{M}}(\|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}\| + \|\eta^{(1)} - \eta^{(2)}\|),\tag{10}$$

其中

$$(\|\xi^{(k)}\|^2 + \|\eta^{(k)}\|^2)^{1/2} \leqslant \mathscr{M},\qquad k = 1, 2;$$

(H2) 对任意的 $\xi \in L_\beta^2$, $\eta \in l^2$, 内积 $(\boldsymbol{f}(\xi, \eta), \eta) \in \mathbf{R}$;

(H3) $\boldsymbol{g}(t) \in C_{\mathrm b}(\mathbf{R}, L^2)$, $\boldsymbol{h}(t) \in C_{\mathrm b}(\mathbf{R}, l^2)$, 这里 $C_{\mathrm b}(\mathbf{R}, X)$ 表示从 $\mathbf{R}$ 到 X ($X = L^2$ 或 l^2) 的有界连续函数所构成的集合. 而且, $\boldsymbol{g}(t)$, $\boldsymbol{h}(t)$ 在任意区间 $[\tau, \tau + T]$ $(T > 0)$ 上对于指数 $\theta \in (0, 1]$ 都是 Hölder 连续的.

引理 1　假定(H1)~(H3)成立. 则对于初值 $\phi_\tau = (\xi_\tau, \zeta_\tau, \eta_\tau)^{\mathrm T} \in H_\beta$, 式(7)和(8)具有唯一的局部解

$$\phi(t) = (\xi(t), \zeta(t), \eta(t))^{\mathrm T} \in H_\beta,$$

使得对于某个 $t_0 > \tau$, 有

$$\phi(\cdot) \in C([\tau, t_0), H_\beta) \cap C^1((\tau, t_0), H_\beta).$$

进一步, $\phi(t)$ 对于 t 和 ϕ_τ 是连续的, 并且如果 $t_0 < +\infty$, 则随着 $t \to t_0^-$, 有 $\|\phi(t)\|_{H_\beta} \to +\infty$.

证明　容易验证算子 $C, F: H_\beta \to H_\beta$ 和算子 $\Sigma: \mathbf{R} \to H_\beta$ 都是连续的. 设

$$\phi^{(k)}(t) = (\xi^{(k)}(t), \zeta^{(k)}(t), \eta^{(k)}(t))^{\mathrm T} \in \hat{\mathscr{B}} \in \mathscr{B}(H_\beta),$$

其中

$$\|\phi^{(k)}(t)\|_{H_\beta} \leqslant \mathscr{M}_{\hat{\mathscr{B}}},\qquad k = 1, 2.$$

那么

$$\|F(\phi^{(1)}) - F(\phi^{(2)})\|_{H_\beta}^2 \leqslant \left(\lambda^2(2\mathscr{M}_{\hat{\mathscr{B}}})^{2\lambda-2} + L_{\mathscr{M}_{\hat{\mathscr{B}}}}^2\left(\frac{2}{\beta} + 2\right)\right)\|\phi^{(1)} - \phi^{(2)}\|_{H_\beta}^2,\tag{11}$$

这里，$L_{\hat{\mathscr{B}}}$，$\mathscr{M}_{\hat{\mathscr{B}}}$ 是依赖于 $\hat{\mathscr{B}}$ 的正常数。式(11)和(H3)蕴含着 $-\boldsymbol{C}\phi+\boldsymbol{F}(\phi)+\Sigma(t):H_\beta\times\mathbf{R}\to H_\beta$ 关于 $\phi\in H_\beta$ 是局部 Lipschitz 连续的，并且在区间 $[\tau,\tau+T]$ $(T>0)$ 上对 t 是 Hölder 连续的。根据文献[18]的第6章里算子半群的经典理论，可知引理1成立。证毕。

引理 2[17] 假定(H1)～(H3)成立，并且 $\phi(t)=(\xi(t),\zeta(t),\eta(t))^{\mathrm{T}}\in H_\beta$ 是初始问题(7)和(8)相应于初始值 $\phi_\tau=(\xi_\tau,\zeta_\tau,\eta_\tau)^{\mathrm{T}}\in H_\beta$ 的解。那么

$$\|\eta(t)\|^2\leqslant\|\eta_\tau\|^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}+\frac{\|h\|^2}{\gamma^2},\qquad\forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R},\tag{12}$$

$$\operatorname{Re}(\boldsymbol{C}\phi,\phi)_{H_\beta}\geqslant\delta\|\xi\|_\beta^2+\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)\|\zeta\|^2+\gamma\|\eta\|^2,\tag{13}$$

这里

$$\|h\|^2=\sup_{t\in\mathbf{R}}\|\boldsymbol{h}(t)\|^2,\quad\delta=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+4\beta}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}\right)},$$

α，β 和 γ 是式(4)与(5)里的常数。

引理 3 假定(H1)～(H3)成立。那么对于初值问题(7)和(8)相应于初始值 $\phi_\tau=(\xi_\tau,\zeta_\tau,\eta_\tau)^{\mathrm{T}}\in H_\beta$ 的任意解 $\phi(t)=(\xi(t),\zeta(t),\eta(t))^{\mathrm{T}}\in H_\beta$，有

$$\|\phi(t)\|_{H_\beta}^2\leqslant\|\phi_\tau\|_{H_\beta}^2\mathrm{e}^{-2\delta_0(t-\tau)}+\frac{R_1^2}{2\delta_0},\qquad\forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R},\tag{14}$$

这里

$$R_1^2=\frac{2\|g\|^2}{\alpha}+\frac{\|h\|^2}{\gamma}+\frac{2}{\alpha}\left(\|\phi_\tau\|_{H_\beta}^2+\frac{\|h\|^2}{\gamma^2}\right)^\lambda,$$

$$\|g\|^2=\sup_{t\in\mathbf{R}}\|\boldsymbol{g}(t)\|^2,$$

$$\delta_0=\min\{\delta,\gamma/2\}.$$

证明 用 $\phi(t)$ 与式(7)做内积 $(\cdot,\cdot)_{H_\beta}$，并取其实部，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(t)\|_{H_\beta}^2+2\delta_0\|\phi(t)\|_{H_\beta}^2\leqslant\frac{2\|g\|^2}{\alpha}+\frac{\|h\|^2}{\gamma}+\frac{2}{\alpha}\|\eta(t)\|^{2\lambda},\qquad\forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R},\tag{15}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(t)\|_{H_\beta}^2+2\delta_0\|\phi(t)\|_{H_\beta}^2\leqslant\frac{2\|g\|^2}{\alpha}+\frac{\|h\|^2}{\gamma}+\frac{2}{\alpha}\left(\|\phi_\tau\|_{H_\beta}^2+\frac{\|h\|^2}{\gamma^2}\right)^\lambda:=R_1^2,\quad\forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}.\tag{16}$$

利用 Gronwall 不等式，便得式(14)。证毕。

不等式(14)说明初值问题(7)和(8)具有初值 $\phi_\tau=(\xi_\tau,\zeta_\tau,\eta_\tau)^{\mathrm{T}}\in H_\beta$ 的解 $\phi(t)=(\xi(t),\zeta(t),\eta(t))^{\mathrm{T}}\in H_\beta$ 在任何有限区间 $[\tau,t_0]$ $(t_0\geqslant\tau)$ 上有界。根据引理1，解 $\phi(t)$ 在 $[\tau,+\infty)$ 上全局存在。于是，$\forall t\geqslant\tau$，解映射

$$U_\Sigma(t,\tau):\phi_\tau=(\xi_\tau,\zeta_\tau,\eta_\tau)^{\mathrm{T}}\in H_\beta\to\phi(t)=(\xi(t),\zeta(t),\eta(t))^{\mathrm{T}}\in H_\beta,$$

在 H_β 上生成一个连续过程 $\{U_\Sigma(t,\tau)\}$，其中 $\zeta=\dot{\xi}+\mu\xi$。

给定一个固定的符号 $\Sigma_0(t)=(\mathbf{0},\boldsymbol{g}_0(t),-\mathrm{i}\boldsymbol{h}_0(t))^{\mathrm{T}}$，其中

$$\boldsymbol{g}_0(t)=(g_{0,j}(t))_{j\in\mathbf{Z}}\in C_{\mathrm{b}}(\mathbf{R},L^2)\cap L^2_{\mathrm{c}}(\mathbf{R},L^2),\tag{17}$$

$$\boldsymbol{h}_0(t)=(h_{0,j}(t))_{j\in\mathbf{Z}}\in C_{\mathrm{b}}(\mathbf{R},l^2)\cap L^2_{\mathrm{c}}(\mathbf{R},l^2)\cdot\tag{18}$$

设$\{T(\epsilon):\epsilon\geqslant 0\}$是 $\Xi=L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},H_\beta)$ 上的一个平移半群, 同时选择集合$\{T(\epsilon)\Sigma_0:\epsilon\geqslant 0\}=\{\Sigma_0(\epsilon+\cdot):\epsilon\geqslant 0\}$的闭包$\mathcal{H}(\Sigma_0)$, 即$\mathcal{H}(\Sigma_0)=[\{\Sigma_0(\epsilon+\cdot):\epsilon\geqslant 0\}]$作为初值问题(7)和(8)的符号空间, 那么$\mathcal{H}(\Sigma_0)$在$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},H_\beta)$内是紧的, 而且解映射族

$$U_\Sigma(t,\tau):\ \phi_\tau\in H_\beta\to\phi(t)\in H_\beta,\qquad\forall t\geqslant\tau,\ \Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0),$$

在H_β上关于$\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)$生成一族连续过程$\{U_\Sigma(t,\tau)\}$• 容易验证

$$T(\epsilon)\mathcal{H}(\Sigma_0)=\mathcal{H}(\Sigma_0),\quad U_\Sigma(t+\epsilon,\tau+\epsilon)=U_{T(\epsilon)\Sigma}(t,\tau),$$
$$\forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R},\ \forall\epsilon\geqslant 0,\ \forall\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)\cdot$$

3　紧一致吸引子的存在性与 Kolmogorov 熵

在本节和下一节里, 我们假定(H1)~(H3)及式(17)和(18)都成立•

定理 1　系统(7)和(8)确定的过程族$\{U_\Sigma(t,\tau)\}$, $\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)$, 拥有一个紧一致(关于 $\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)$)吸引子$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\Sigma_0)}\in H_\beta$• 并且$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\Sigma_0)}$有如下的结构形式:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\Sigma_0)}=\bigcup_{\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)}\mathcal{K}_\Sigma(0)=\omega_{0,\mathcal{H}(\Sigma_0)}(\hat{\mathcal{B}}_0)=\omega_{\tau,\mathcal{H}(\Sigma_0)}(\hat{\mathcal{B}}_0)\subset\hat{\mathcal{B}}_0,\qquad\forall t\in\mathbf{R},$$

这里$\mathcal{K}_\Sigma(0)$是过程$\{U_\Sigma(t,\tau)\}$在 $t=0$ 处的非空核截面, 而

$$\omega_{\tau,\mathcal{H}(\Sigma_0)}(\hat{\mathcal{B}}_0)=\bigcap_{s\geqslant\tau}\overline{\bigcup_{\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)}\bigcup_{t\geqslant s}U_\Sigma(t,s)\hat{\mathcal{B}}_0}$$

是$\hat{\mathcal{B}}_0$在 $t=\tau$ 处的 $\omega-$ 极限集•

证明　证明方法基于文献[11]的定理 3.1•

第 1 步: 吸收集的存在性•　由式(12)和(15)知

$$\|\eta(t)\|^2\leqslant\frac{2\|h\|^2}{\gamma^2},\qquad\forall t\geqslant t_1=\tau+\frac{2}{\gamma}\ln\frac{\gamma\|\phi_\tau\|_{H_\beta}}{\|h\|}\cdot\tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(t)\|^2_{H_\beta}+2\delta_0\|\phi(t)\|^2_{H_\beta}\leqslant$$
$$\frac{2\|g\|^2}{\alpha}+\frac{\|h\|^2}{\gamma}+\frac{2^{\lambda+1}\|h\|^{2\lambda}}{\alpha\gamma^{2\lambda}}:=R_2^2,\qquad\forall t\geqslant t_1\cdot\tag{20}$$

运用 Gronwall 不等式于式(20), 得

$$\|\phi(t)\|^2_{H_\beta}\leqslant\|\phi(t_1)\|^2_{H_\beta}\mathrm{e}^{-2\delta_0(t-t_1)}+\frac{R_2^2}{2\delta_0},\qquad\forall t\geqslant t_1\cdot\tag{21}$$

由式(14)和(21)知

$$\|\phi(t)\|^2_{H_\beta}\leqslant\left(\|\phi_\tau\|^2_{H_\beta}\left(\frac{\gamma\|\phi_\tau\|_{H_\beta}}{\|h\|}\right)^{-4\delta_0/\gamma}+\frac{R_1^2}{2\delta_0}\right)\mathrm{e}^{-2\delta_0(t-t_1)}+\frac{R_2^2}{2\delta_0},$$
$$t\geqslant t_1\cdot\tag{22}$$

注意到, $\forall\Sigma=(\mathbf{0},\boldsymbol{g}(t),-\mathrm{i}\boldsymbol{h}(t))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}(\Sigma_0)$, 有

$$\frac{2\|g\|^2}{\alpha}+\frac{\|h\|^2}{\gamma}+\frac{2^{\lambda+1}\|h\|^{2\lambda}}{\alpha\gamma^{2\lambda}}=R_2^2\leqslant R^2=$$
$$\frac{2\|g_0\|^2}{\alpha}+\frac{\|h_0\|^2}{\gamma}+\frac{2^{\lambda+1}\|h_0\|^{2\lambda}}{\alpha\gamma^{2\lambda}}\cdot\tag{23}$$

所以, 以 0 为球心、$R_0=R/\sqrt{\delta_0}$为半径的开球$\hat{\mathcal{B}}_0=\hat{\mathcal{B}}_0(0,R_0)$就是过程族$\{U_\Sigma(t,\tau)\}$, $\forall\Sigma$

$\in \mathcal{H}(\Sigma_0)$ 在 H_β 内的一个一致(关于 $\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0)$) 有界的吸收集． 于是, 对于吸收集 $\mathcal{B}_0$, 存在 $t_0 = t_0(\tau, \hat{\mathcal{B}}_0)$, 使得

$$U_\Sigma(t,\tau)\hat{\mathcal{B}}_0 \subset \hat{\mathcal{B}}_0, \qquad \forall t \geqslant t_0,\ \Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0).$$

第 2 步: 选取一个光滑的函数 $\chi(\theta)\in C(\mathbf{R}^+,[0,1])\cap C^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$, 使得

$$\begin{cases}\chi(\theta)=0, & 0\leqslant\theta\leqslant 1,\\ 0\leqslant\chi(\theta)\leqslant 1, & 1\leqslant\theta\leqslant 2,\\ \chi(\theta)=1, & \theta\geqslant 2,\end{cases}$$

而且 $|\chi'(\theta)|\leqslant\chi_0$(正常数), $\forall\theta\in\mathbf{R}^+$． 对固定的 $\tau\in\mathbf{R}$ 及任意的 $t\geqslant\tau$, 设

$$\phi(t) = U_\Sigma(t,\tau)\phi_\tau \in H_\beta\ (\Sigma\in\mathcal{H}(\Sigma_0))$$

是初值问题(7)和(8)具有初值 $\phi_\tau\in\hat{\mathcal{B}}_0$ 的解． 对某个正整数 J, 令

$$x_j = \chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\xi_j,\ y_j = \chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\zeta_j,\ z_j = \chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\eta_j, \qquad j\in\mathbf{Z},$$

$$\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbf{Z}} = (x_j, y_j, z_j)^{\mathrm{T}}_{j\in\mathbf{Z}} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}.$$

用 $\psi(t)$ 与式(7)作内积 $(\cdot,\cdot)_{H_\beta}$ 并取其实部, 有

$$\mathrm{Re}(\dot{\phi},\psi)_{H_\beta} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{C}\phi,\psi)_{H_\beta} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\phi),\psi)_{H_\beta} + \mathrm{Re}(\Sigma(t),\psi)_{H_\beta}. \tag{24}$$

下面, 我们逐一计算式(24)里的各项如下:

$$\mathrm{Re}(\dot{\phi},\psi)_{H_\beta} \geqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j\|^2_{H_\beta} - \frac{\chi_0(1+\beta+2\mu)R_0^2}{J\beta}, \qquad \forall t\geqslant t_0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\boldsymbol{C}\phi,\psi)_{H_\beta} \geqslant\ & \delta\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)(|(\boldsymbol{B}\xi)_j|^2 + \beta\xi_j^2) + \left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\zeta_j^2 + \\ & \gamma\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)|\eta_j|^2 - \frac{\chi_0(1+2\beta+2\mu)R_0^2}{J\beta}, \qquad \forall t\geqslant t_0,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\Sigma(t),\psi)_{H_\beta} \leqslant\ & \sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\left(\frac{\alpha}{4}\zeta_j^2 + \frac{\gamma}{2}|\eta_j|^2\right) + \\ & \sum_{|j|>J}\left(\frac{|g_j|^2}{\alpha} + \frac{|h_j|^2}{2\gamma}\right), \qquad \forall t\geqslant t_0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\phi),\psi)_{H_\beta} \leqslant \frac{\alpha}{4}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\zeta_j^2 + \frac{R_0^{2\lambda-2}}{\alpha}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)|\eta_j|^2, \qquad \forall t\geqslant t_0. \tag{28}$$

现用 $\boldsymbol{z}(t)$ 与式(5)作内积 $(\cdot,\cdot)_{l^2}$ 并取其虚部, 应用 Gronwall 不等式, 则有

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)|\eta_j|^2 \leqslant R_0^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} + \frac{2\chi_0R_0^2}{J\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(s)|^2\mathrm{d}s. \tag{29}$$

结合式(28)和(29)知, 对任意的 $t\geqslant t_0$, 有

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\phi),\psi)_{H_\beta} - \frac{\alpha}{4}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\zeta_j^2 \leqslant$$

$$\frac{R_0^{2\lambda-2}}{\alpha}\left(R_0^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}+\frac{2\chi_0R_0^2}{J\gamma}+\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(s)|^2\mathrm{d}s\right). \tag{30}$$

至此，$\forall t\geqslant t_0$，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j(t)\|_{H_\beta}^2+2\delta_0\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j(t)\|_{H_\beta}^2\leqslant\\&\quad\frac{2R_0^{2\lambda-2}}{\alpha}\left(R_0^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}+\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(t)|^2\right)+\\&\quad\frac{C}{J}+\sum_{|j|\geqslant J}\left(\frac{2|g_j(t)|^2}{\alpha}+\frac{|h_j(t)|^2}{\gamma}\right),\end{aligned}\tag{31}$$

$$C=\frac{\chi_0(4+6\beta+8\mu)R_0^2}{\beta}+\frac{4\chi_0R_0^{2\lambda}}{\alpha\gamma}.$$

显然，$\forall \nu>0$，存在 $t_3=t_3(\tau,\nu,\hat{\mathcal{B}}_0)\in\mathbf{R}$ 和 $J_1=J_1(\nu)\in\mathbf{N}$，使得

$$\begin{cases}\dfrac{2R_0^{2\lambda}}{\alpha}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\leqslant\dfrac{\nu^2\delta_0}{5}, & \forall t\geqslant t_3;\\[2ex]\dfrac{C}{J}\leqslant\dfrac{\nu^2\delta_0}{5}, & \forall J\geqslant J_1.\end{cases}\tag{32}$$

由式(17)和(18)可知

$$\|\boldsymbol{g}(t)\|_{L_b^2}\leqslant\|\boldsymbol{g}_0(t)\|_{L_b^2},\qquad\forall\boldsymbol{g}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{g}_0);$$
$$\|\boldsymbol{h}(t)\|_{L_b^2}\leqslant\|\boldsymbol{h}_0(t)\|_{L_b^2},\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{h}_0).$$

故有

$$\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|g_j(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|g_{0,j}(s)|^2\mathrm{d}s,\qquad\forall\boldsymbol{g}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{g}_0),$$
$$\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(t)|^2\mathrm{d}s\leqslant\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_{0,j}(t)|^2\mathrm{d}s,\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{h}_0).$$

又由式(18)可知，存在 $J_2=J_2(\nu,\hat{\mathcal{B}}_0)\in\mathbf{N}$，使得

$$\frac{2R_0^{2\lambda-2}}{\alpha\gamma}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(t)|^2\leqslant\frac{\nu^2\delta_0}{5},\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{h}_0),\ J\geqslant J_2.\tag{33}$$

从而，$\forall t\geqslant t_0+t_3$ 和 $J\geqslant\max\{J_1,J_2\}$，由式(31)～(33)，并运用Gronwall不等式，得

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j(t)\|_{H_\beta}^2\leqslant\\&\quad\mathrm{e}^{-2\delta_0(t-\tau)}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j(\tau)\|_{H_\beta}^2+\frac{3\nu^2}{10}+\\&\quad\frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{1}{2\delta_0}\right)\sup_{t_2\in\mathbf{R}}\int_\tau^t\sum_{|j|\geqslant J}|g_j(s)|^2\mathrm{d}s+\\&\quad\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{2\delta_0}\right)\sup_{t_2\in\mathbf{R}}\int_\tau^t\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(s)|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{34}$$

类似于式(33)，分别存在 $J_3=J_3(\nu)\in\mathbf{N}$ 和 $J_4=J_4(\nu)\in\mathbf{N}$，使得

$$\frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{1}{2\delta_0}\right)\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|g_j(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{\nu^2}{10},\qquad\forall\boldsymbol{g}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{g}_0),\ J\geqslant J_3,\tag{35}$$

$$\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{2\delta_0}\right)\sup_{r\in\mathbf{R}}\int_r^{r+1}\sum_{|j|\geqslant J}|h_j(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{\nu^2}{10},\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}(\boldsymbol{h}_0),\ J\geqslant J_4.\tag{36}$$

因此，$\forall J\geqslant J(\nu,\hat{\mathcal{B}}_0)=\max\{J_1,J_2,J_3,J_4\}$ 和 $\forall t\geqslant t_0+t_3$，由式(34)～(36)，有

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j(t)\|^2_{H_\beta}\leqslant R_0^2\mathrm{e}^{-2\delta_0(t-\tau)}+\frac{\nu^2}{2},$$
$$\forall J\geqslant J(\nu,\hat{\mathcal{B}}_0),\ t\geqslant t_0+t_3\text{.}\tag{37}$$

令

$$t_4=t_4(\tau,\nu,\hat{\mathcal{B}}_0)=\max\left\{t_0+t_3,\ \frac{1}{\delta_0}\ln\left(\frac{\sqrt{2}R_0}{\nu}\right)+\tau\right\}\text{.}$$

则由式(37),可得

$$\sum_{|j|\geqslant J}\|\phi_j(t)\|^2_{H_\beta}\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\phi_j(t)\|^2_{H_\beta}\leqslant\nu^2,$$
$$\forall J\geqslant J(\nu,\hat{\mathcal{B}}_0),\ t\geqslant t_4\text{.}\tag{38}$$

由文献[11]的定理3.1得一致吸引子的存在性.

$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\Sigma_0)}$ 的结构形式可由 Chepyzhou 与 Vishik[14] 直接得到. 证毕.

定理2 对于任意的 $\nu>0$, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\Sigma_0)}$ 的 Kolmogorov - ν 熵满足

$$K_\nu(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\Sigma_0)})\leqslant(2J(\nu)+1)\ln\left(\left[\frac{R_0}{\sqrt{\beta}}\frac{12+3\beta}{\nu}\sqrt{2J(\nu)+1}\right]+1\right)+$$
$$3(2J(\nu)+1)\ln\left(\left[R_0\frac{12+3\beta}{\nu}\sqrt{2J(\nu)+1}\right]+1\right),$$

其中

$$J(\nu)=J\left(\frac{12+3\beta-\sqrt{12+3\beta}}{12+3\beta}\nu,\hat{\mathcal{B}}_0\right)$$

是使得

$$\sup_{(\phi_j)_{j\in\mathbf{Z}}=\phi\in\mathcal{B}_0}\left(\sum_{|j|>J(\nu)}\|\phi_j\|^2_{H_\beta}\right)^{1/2}\leqslant\frac{12+3\beta-\sqrt{12+3\beta}}{12+3\beta}\nu$$

成立的最小正整数.

证明 证明方法类似于文献[17]的定理4.2, 这里略掉证明过程.

4 紧一致吸引子的上半连续性

对于任意的正整数 $n\in\mathbf{N}$, 我们考虑下面的有限维截尾的常微分方程组:

$$\begin{cases}\ddot{\xi}_{-n}+\alpha\dot{\xi}_{-n}+(2\xi_{-n}-\xi_{-n+1}-\xi_n)+\beta\xi_{-n}-|\eta_{-n}|^\lambda=g_{-n}(t),\\ \mathrm{i}\dot{\eta}_{-n}-(2\eta_{-n}-\eta_{-n+1}-\eta_n)+\mathrm{i}\gamma\eta_{-n}+f_{-n}(\xi_{-n},\eta_{-n})=h_{-n}(t),\\ \vdots\\ \ddot{\xi}_n+\alpha\dot{\xi}_n+(2\xi_n-\xi_{n-1}-\xi_{-n})+\beta\xi_n-|\eta_n|^\lambda=g_n(t),\\ \mathrm{i}\dot{\eta}_n-(2\eta_n-\eta_{n-1}-\eta_{-n})+\mathrm{i}\gamma\eta_n+f_n(\xi_n,\eta_n)=h_n(t),\end{cases}\tag{39}$$

初始条件为

$$\xi_j|_{t=\tau}=\xi_{j,\tau},\ \dot{\xi}_j|_{t=\tau}=\dot{\xi}_{j,\tau},\ \eta_j|_{t=\tau}=\eta_{j,\tau},\qquad\tau\in\mathbf{R},\ j=-n,\cdots,n,\tag{40}$$

这里, $g_j(t)$ 和 $h_j(t)$, $|j|\leqslant n, j\in\mathbf{N}$, 如式(1)和(2)所述. 令

$$\zeta_j=\dot{\xi}_j+\mu\xi_j,\ \mu=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+4\beta},\qquad j=-n,\cdots,n,\ n\in\mathbf{N}\text{.}$$

则与式(7)和(8)类似, 我们能把式(39)和(40)改写为

$$\dot{\phi}^{(n)}+C_n\phi^{(n)}=F_n(\phi^{(n)})+\Sigma_n(t),\qquad t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R},\tag{41}$$

$$\phi^{(n)}(\tau)=(\xi^{(n)}(\tau),\zeta^{(n)}(\tau),\eta^{(n)}(\tau))^{\mathrm{T}},\qquad \tau\in\mathbf{R},\tag{42}$$

这里

$$\phi^{(n)}=(\xi^{(n)},\zeta^{(n)},\eta^{(n)})^{\mathrm{T}},$$

$$\xi^{(n)}=(\xi_j)_{|j|\leqslant n},$$

$$\zeta^{(n)}=\dot{\xi}^{(n)}+\mu\xi^{(n)},\quad \eta^{(n)}=(\eta_j)_{|j|\leqslant n},$$

$$C_n=\begin{bmatrix}\mu I_n & I_n & \mathbf{0}\\ A_n+\beta I_n-\mu(\mu-\alpha)I_n & (\alpha-\mu)I_n & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{i}A_n+\gamma I_n\end{bmatrix},$$

$$F_n=(\mathbf{0},|\eta^{(n)}|^{\lambda},\mathrm{i}f^{(n)}(\xi^{(n)},\eta^{(n)}))^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_n=(\mathbf{0},g^{(n)}(t),-\mathrm{i}h^{(n)}(t))^{\mathrm{T}},$$

$$A_n=\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0&\cdots&0&0&-1\\-1&2&-1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&-1&2&-1&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&\cdots&-1&2&-1\\-1&0&0&0&0&\cdots&0&-1&2\end{bmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)},$$

I_n 和 $\mathbf{0}$ 分别为 $(2n+1)$ 阶的单位矩阵和零矩阵. 此外,

$$|\eta^{(n)}|^{\lambda}=(|\eta_j|^{\lambda})_{|j|\leqslant n},\ f^{(n)}(\xi^{(n)},\eta^{(n)})=(f_j(\xi_j,\eta_j))_{|j|\leqslant n},\qquad n\in\mathbf{N},$$

$$g^{(n)}(t)=(g_j(t))_{|j|\leqslant n},\ h^{(n)}(t)=(h_j(t))_{|j|\leqslant n},\qquad n\in\mathbf{N}.$$

$\forall z^{(n)}=(z_j)_{|j|\leqslant n},\ \omega^{(n)}=(\omega_j)_{|j|\leqslant n}\in R^{2n+1}$ 或 C^{2n+1}, 定义

$$(z^{(n)},\omega^{(n)})=\sum_{|j|\leqslant n}z_j\omega_j,\quad \|z^{(n)}\|^2=(z^{(n)},z^{(n)}),$$

$$(z^{(n)},\omega^{(n)})_{\beta}=(B_nz^{(n)},B_n\omega^{(n)})+\beta(z^{(n)},\omega^{(n)}),$$

$$\|z^{(n)}\|_{\beta}^2=(z^{(n)},z^{(n)})_{\beta},$$

其中

$$B_n=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\0&-1&1&0&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&\cdots&0&-1&1\\1&0&0&0&0&\cdots&0&0&-1\end{bmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}.$$

记

$$R^{2n+1}=(R^{2n+1},(\cdot,\cdot),\|\cdot\|),$$

$$R_{\beta}^{2n+1}=(R^{2n+1},(\cdot,\cdot)_{\beta},\|\cdot\|_{\beta}),$$

$$C^{2n+1}=(C^{2n+1},(\cdot,\cdot),\|\cdot\|),$$

$$H_{\beta}^{(n)}=R_{\beta}^{2n+1}\times R^{2n+1}\times C^{2n+1}.$$

由(H3)、式(41)和(42)在 $H_{\beta}^{(n)}$ 内是适定的, $\phi^{(n)}(t)$ 在 $[\tau,+\infty)$ 上全局存在. 因而, $\forall t\geqslant\tau$, $\Sigma\in\mathscr{H}(\Sigma_0)$, 解映射

$$U_{\Sigma}^{(n)}(t,\tau): \phi^{(n)}(\tau) \in H_{\beta}^{(n)} \to \phi^{(n)}(t) = U_{\Sigma}^{(n)}(t,\tau)\phi^{(n)}(\tau) \in H_{\beta}^{(n)},$$

在 $H_{\beta}^{(n)}$ 上生成了一个连续过程 $\left\{U_{\Sigma}^{(n)}(t,\tau)\right\}(\Sigma \in \mathscr{H}(\Sigma_0))$•

类似于文献[8], 我们得下面的定理•

利用反证法, 我们可以得到紧一致(关于 $\Sigma \in \mathscr{H}(\Sigma_0)$) 吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(\Sigma_0)}$ 的上半连续性•

定理 3　系统(41) 和(42) 确定的过程族 $\left\{U_{\Sigma}^{(n)}(t,\tau)\right\}$, $\Sigma \in \mathscr{H}(\Sigma_0)$ 拥有一个紧一致(关于 $\Sigma \in \mathscr{H}(\Sigma_0)$) 吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(\Sigma_0)}^{(n)} \subset H_{\beta}^{(n)}$; 当 n 趋向于 $+\infty$ 时, $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(\Sigma_0)}^{(n)}$ 在 H_β 里收敛于紧一致(关于 $\Sigma \in \mathscr{H}(\Sigma_0)$) 吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(\Sigma_0)}$•

附注　本论文的论证方法同样适用于研究定义在 $\mathbf{Z}^n$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$ 的耗散的非自治 Klei - Gordo - Schrödi ger 格点系统, 这时, 算子 $\boldsymbol{A}$ 的定义如文献[19] 里所示•

致谢　作者真城地感谢审稿专家提出的有益建议和评论, 这些建议极大地改进了本文的工作•　同时也非常感谢编辑们的热心帮助•

[参　考　文　献]

[1] Bate P W, Lisei H, Lu K. Attractors for stochastic lattice dynamical systems[J]. Stochastic a d Dy-amics, 2006, **6**(1): 1- 21.

[2] Beyn W J, Pilyugin S Y. Attractors of reaction- diffusion systems on infinite lattices[J]. J Dy a Diff Equa, 2003, **15**(2/ 3): 485- 515.

[3] Lv Y, Sun J. Dynamical behaviour for stochastic lattice systems[J]. Chaos, Silito s a d Fractals, 2006, **27**(4): 1080- 1090.

[4] Li X, Wang D. Attractors for partly dissipative lattice dynamical systems in weighted spaces[J]. J Math A al Appl, 2007, **325**(26): 141- 156.

[5] Li X J, Zhong C K. Attractors for partly diassipative lattice dynamical systems in $L^2 \times L^2$[J]. J Comp Appl Math, 2005, **177**(1): 159- 174.

[6] Vleck E V, Wang B. Attractors for lattice Fitz Hugh- Nagumo systems[J]. Physica D, 2005, **212**(3/ 4): 317- 336.

[7] Wang B. Dynamics of systems on infinite lattices[J]. J Diff Equa, 2006, **221**(1): 224- 245.

[8] Wang B. Asymptotic behaviour of non- autonomous lattice systems[J]. J Math A al Appl, 2007, **331**(1): 121- 136.

[9] Zhao C, Zhou S. Compact uniform attractors for dissipative lattice dynamical systems with delays[J]. Disc Co t Dy a Systems, 2008, **21**(2): 643- 663.

[10] Zhao X, Zhou S. Kernel sections for process and non- autonomous lattice systems[J]. Disc Co t Dy a Systems, Series B, 2008, **9**(3/ 4): 763- 785.

[11] Zhou S, Zhao C, Liao X. Compact uniform attractors for dissipative non- autonomous lattice dynamical systems[J]. Comm Pure Appl A al, 2007, **6**(4): 1087- 1111.

[12] Zhou S, Zhou C, Wang Y. Finite dimensionality and upper semicontinuity of compact kernel section of non- autonomous lattice systems[J]. Disc Co t Dy a Systems, 2008, **21**(4): 1259- 1277.

[13] Zhou S, Shi W. Attractors and dimension of dissipative lattice systems[J]. J Diff Equa, 2006, **224**(1): 172- 204.

[14] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attrators for Equatio s of Mathematical Physics[M]. America: American Mathematical Society, Colloquium Publications, 2002.

[15] Abdallah A Y. Asymptotic bahaviour of the Klein- Gordon- Schrödinger lattice dynamical systems [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2006, **5**(1): 55- 69.

[16] 尹福其, 周盛凡, 殷苌茗, 等. KGS格点系统的全局吸引子[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(5): 619- 630.

[17] Zhao C, Zhou S. Compact kernel sections for non- autonomous Klein- Gordon- Schrödinger equation on infinite lattices[J]. J Math Anal Appl, 2007, **332**(1): 32- 56.

[18] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer- Verlag, 2007.

[19] Zhou S. Attractors for first order dissipative lattice dynamical systems[J]. Phys D, 2003, **178**(1): 51 - 61.

Uniform Attractor for Non- Autonomous Klein- Gordon- Schrödinger Lattice System

HUANG Jin- wu[1], HAN Xiao- ying[2], ZHOU Sheng- fan[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P.R.China;

2. Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn, AL 36849, USA)

Abstract: Firstly the existence of a compact uniform attractor for a family of processes corresponding to the dissipative non- autonomous Klein- Gordon- Schrödinger lattice dynamical system was proved. Then an upper bound of the Kolmogorov entropy of the compact uniform attractor was obtained. Finally an upper semicontinuity of the compact uniform attractor was established.

Key words: compact uniform attractor; non- autonomous; Klein- Gordon- Schrödinger lattice system; Kolmogorov entropy; upper semicontinuity