

节点应力连续的四边形单元^{*}

唐旭海¹, 郑超¹, 吴圣川^{2,3}, 张建海¹,

- (1. 四川大学 水力学与山区河流开发保护国家重点实验室, 成都 610065;
2. 合肥工业大学 材料学院 先进材料连接与计算中心, 合肥 230009;
3. 新加坡国立大学 机械工程系 工程科学计算研究中心, 117576, 新加坡)

(郭兴明推荐)

摘要: 节点应力连续的四边形单元 Q4- CNS 是一种基于单位分解理论的混合的有限元无网格法。Q4- CNS 可以视作 FE- LSPIM QUAD4 的发展。Q4- CNS 形函数的导数在节点处是连续的, 因此可以自然的得到节点应力, 而不需要使用节点应力磨平算法。数值实验表明, 与传统四边形单元 (QUAD4) 相比, Q4- CNS 具有更好的计算精度和更高的收敛速度。在扭曲网格下, Q4- CNS 也能取得满意的数值精度。然而, QUAD4 的数值精度则会随着网格的扭曲明显的变差。基于 Kirchhoff- Love 假设的非协调板单元计算中, 不仅要求形函数在单元的交界面上要保持 C^0 连续性, 而且要求形函数在节点处具有 C^1 连续性, 所以在任意的四边形单元上构造满足插值条件的非协调板单元形函数较为困难。Q4- CNS 形函数的导数在节点处是连续的, 所以 Q4- CNS 在求解基于 Kirchhoff- Love 假设的板单元问题中具有潜在的应用价值。

关键词: Q4- CNS; 单位分解法; 连续的节点应力; 数值精度; 网格扭曲

中图分类号: O34 **文献标识码:** A

DOI: 10. 3879/j. issn. 1000- 0887. 2009. 12. 004

引 言

基于节点离散的无网格法在过去 10 年中得到了研究者的广泛重视^[1]。因为无网格法的数值精度不会因为节点的不规则分布而明显地变差, 所以在大变形计算中得到了广泛的应用^[2]。在基于 Kirchhoff- Love 假设的板单元计算中, 由于要求插值函数在单元交界面上保持 C^1 连续性, 所以形函数的构造变得非常困难。无网格法形函数的导数具有全局连续的性质, 所以在基于 Kirchhoff- Love 假设的板单元计算中也得到广泛应用^[3]。

但是, 无网格法仍然存在尚未解决的缺点: 1) 因为没有网格信息的辅助, 无网格法的计算区域不能被很好地被定义, 导致需要使用较多的积分点才能获得足够精确的数值积分结果; 2) 无网格法缺少 Kronecker- δ 性质, 导致边界条件的施加变得困难。

为克服上述缺点, 研究者提出了基于单位分解理论^[4]的混合的有限元无网格法。这些混合的有限元无网格法综合了有限元法和无网格法的优点。其中一些方法继承了无网格法计算精度高、收敛速度快、抗网格扭曲的优点, 例如, 由 Rajendran 等提出的 FE- LSPIM QUAD4^[5- 6];

* 收稿日期: 2009- 03- 13; 修订日期: 2009- 09- 03

作者简介: 唐旭海(1984-), 男, 成都人, 博士生(联系人, E-mail: X.H.Tang84@gmail.com)。

另一方面,一些方法继承了无网格法形函数导数连续的优点,并应用于求解基于 Kirchhoff-Love 假设的板单元问题^[7]。

Q4-CNS 是一种节点应力连续的四边形单元,可以视作 FE-LSPIM QUAD4^[5]的发展。数值实验表明,Q4-CNS 继承了 FE-LSPIM QUAD4 的优点:1) Q4-CNS 具有 Kronecker- δ 性质;2) 与传统的四边形单元(QUAD4)相比,Q4-CNS 计算精度高、收敛速度快;3) 网格扭曲对 Q4-CNS 的计算精度影响较小。与 FE-LSPIM QUAD4 相比,Q4-CNS 不仅在单元边界上具有 C^0 的连续性,而且在节点处具有连续的导数值。因此,Q4-CNS 具有以下特点:1) 在不使用任何节点应力磨平算法的条件下,Q4-CNS 能自然地得到节点应力;2) 在基于 Kirchhoff-Love 假设的非协调板单元计算中,要求形函数在节点处具有 C^1 连续性^[8]。Q4-CNS 的形函数在节点处具有 C^1 连续性,所以 Q4-CNS 在求解板单元的问题中具有潜在的应用价值。

1 Q4-CNS 插值函数的构造

研究一个节点为 $\{P_1 P_2 P_3 P_4\}$ 的四边形单元 Ω 。插入坐标为 $x = (x, y)$ 的计算点 $P(x)$ 。根据单位分解原理^[4],Q4-CNS 的插值函数 $u^h(x)$ 可以表示为

$$u^h(x) = w_1(x)u_1(x) + w_2(x)u_2(x) + w_3(x)u_3(x) + w_4(x)u_4(x), \quad (1)$$

上式中, $w_i(x)$ 和 $u_i(x)$ 分别是节点 i 对应的权函数和节点覆盖函数。首先,定义节点 i 的相邻区域 Ω_i ,如图1所示。这里,节点 i 定义为中心节点,相邻区域 Ω_i 中的其他节点定义为卫星节点。

1.1 权函数的构造

全局坐标下的权函数 $\{w_1(x) w_2(x) w_3(x) w_4(x)\}$ 可以由局部坐标下的权函数映射得到。Q4-CNS 的坐标变换公式为

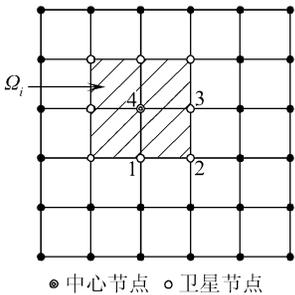


图1 节点4的相邻区域

$$x = N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + N_3(\xi, \eta)x_3 + N_4(\xi, \eta)x_4, \quad (2)$$

$$y = N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + N_3(\xi, \eta)y_3 + N_4(\xi, \eta)y_4, \quad (3)$$

上式中, $\{N_1(\xi, \eta) N_2(\xi, \eta) N_3(\xi, \eta) N_4(\xi, \eta)\}$ 可以表示为

$$\begin{cases} N_i = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)/4 \\ \xi_0 = \xi\xi_0, \eta_0 = \eta\eta_0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

类似于在矩形单元上构造非协调板单元的形函数^[8],局部坐

标系下的权函数表示为

$$w_i(\xi, \eta) = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2)/8 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

显而易见,局部坐标系下的权函数 $w_i(\xi, \eta)$ 具有以下特点:

1) 单位分解性

$$\sum_{i=1}^4 w_i(\xi, \eta) = 1;$$

2) 权函数在节点处的导数值为 0

$$\left\{ \frac{\partial w_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial w_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}^T = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

1.2 节点覆盖函数的构造

最小二乘法在数值计算中被广泛使用^[9]。为了使最小二乘插值函数具有 Kronecker- δ 性质,最近研究者提出了具有约束性质的最小二乘法,例如 LSPIM^[5]和 CO-MLS^[10]。在 Q4-NCS 中,简化的 CO-MLS (CO-LS) 被用来构造具有约束性质的节点覆盖函数。典型的最小二乘法表示为

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{a}, \quad (6)$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n^{[i]}})^T, \quad (7)$$

上式中, $n^{[i]}$ 是相邻区域 Ω 内节点的总数, \mathbf{a} 是节点位移向量。 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是一组由 Pascal 三角形构造的基函数, m 为基函数 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 的阶次。在计算中 m 通过以下准则选择: 如果 $n^{[i]} > 8$, 选用 $m = 8$; 如果 $n^{[i]} \leq 8$, 选用 $m = 4$ 。 矩阵 \mathbf{A} 和矩阵 \mathbf{B} 分别可以表示为

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n^{[i]}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j), \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_{n^{[i]}})]^T. \quad (9)$$

下面介绍一种正交化、约束的最小二乘法 (CO-LS)。节点覆盖函数将被约束在中心节点 i 处。首先定义:

$$(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{n^{[i]}} f(\mathbf{x}_j) g(\mathbf{x}_j), \quad (10)$$

上式中, f 和 g 是任意的变量, \mathbf{x}_j 是节点 j 的坐标。

1.2.1 正交化向量 \mathbf{p} (O-LS)

根据 Smith 正交化公式, 向量 \mathbf{p} 正交化得到

$$\mathbf{s} = \left\{ s_1, s_2, \dots, s_m \right\}^T = \mathbf{V} \mathbf{p}, \quad (11)$$

上式中, \mathbf{V} 是一个 $m \times m$ 的正交化矩阵。假设 V_{jk} 是矩阵 \mathbf{V} 的第 j 列和第 k 行元素, V_{jk} 表示为

$$V_{jk} = \begin{cases} 0 & (j < k) \\ 1 & (j = k) \\ -\sum_{l=k}^{j-1} \frac{(p_l, s_l)}{(s_l, s_l)} V_{lk} & (j > k) \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m), \quad (12)$$

上式的证明可以参考文献[10]。

1.2.2 单位化向量 \mathbf{s}

单位化向量 \mathbf{s} 可得

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \left\{ r_1(\mathbf{x}) \quad r_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad r_m(\mathbf{x}) \right\}^T, \quad (13)$$

$$r_j = \frac{s_j}{\sqrt{(s_j, s_j)}} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (14)$$

将式(14)代入式(11)得到

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \mathbf{p}, \quad (15)$$

上式中, \mathbf{H} 是 $m \times m$ 单位化矩阵。假设 H_{jk} 是矩阵 \mathbf{H} 的第 j 列和第 k 行元素, H_{jk} 表示为

$$H_{jk} = \frac{V_{jk}}{\sqrt{(s_k, s_k)}} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m). \quad (16)$$

1.2.3 约束的最小二乘法 (CO-LS)

用 Lagrange 乘子法对覆盖函数施加约束, 节点覆盖函数 $u_i(\mathbf{x})$ 表示为

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n^{[ij]}} \hat{\phi}_j^{[ij]}(\mathbf{x}) a_j, \tag{17}$$

$$\hat{\Phi} = [\hat{\phi}_1^{[ij]}(\mathbf{x}) \quad \hat{\phi}_2^{[ij]}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \hat{\phi}_{n^{[ij]}}^{[ij]}(\mathbf{x})]^T = \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}^{[ij]}, \tag{18}$$

$$\mathbf{B}^{[ij]} = \left\{ \mathbf{B}_1^{[ij]} \quad \mathbf{B}_2^{[ij]} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n^{[ij]}}^{[ij]} \right\}, \tag{19}$$

$$\mathbf{B}_k^{[ij]} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) - f_k^{[ij]} \mathbf{r}(\mathbf{x}_i) \quad (k = 1, 2, \dots, n^{[ij]}), \tag{20}$$

$$f_k^{[ij]} = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^m (r_{ji} r_{jk})}{\sum_{j=1}^m R_{ji}^2} & (k \neq i) \\ \frac{\sum_{j=1}^m (r_{ji} r_{jk}) - 1}{\sum_{j=1}^m r_{ji}^2} & (k = i) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n^{[ij]}), \tag{21}$$

其中, $\hat{\phi}_j^{[ij]}(\mathbf{x})$ 是节点覆盖函数 $u_i(\mathbf{x})$ 的对应节点 j 的形函数。

1.3 Q4- CNS 的形函数

Q4- CNS 的插值函数 $u^h(\mathbf{x})$ 表示为更一般的形式:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) a_i, \tag{22}$$

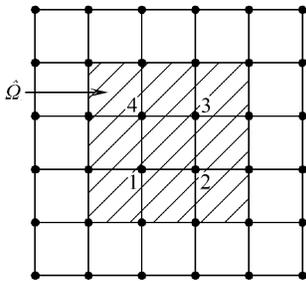


图2 单元的支撑区域

上式中, $\phi_i(\mathbf{x})$ 是节点 i 对应的形函数, 单元支撑域 $\hat{\Omega}$ 是所有节点相邻区域的集合: $\hat{\Omega} = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$, 如图2所示。定义 N 是区域 $\hat{\Omega}$ 内的节点总数。将式(17)代入式(1)。Q4- CNS 的插值函数可以表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 w_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{n^{[ij]}} \hat{\phi}_j^{[ij]}(\mathbf{x}) a_j. \tag{23}$$

变换式(23), 式(22)中 Q4- CNS 的形函数可以表示为

$$\phi_i(\mathbf{x}) = w_1(\mathbf{x}) \hat{\phi}_i^{[1]}(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{x}) \hat{\phi}_i^{[2]}(\mathbf{x}) + w_3(\mathbf{x}) \hat{\phi}_i^{[3]}(\mathbf{x}) + w_4(\mathbf{x}) \hat{\phi}_i^{[4]}(\mathbf{x}), \tag{24}$$

上式中, 如果节点 j 不在相邻区域 Ω_i 内, 令 $\hat{\phi}_j^{[ij]}(\mathbf{x})$ 等于 0: $\hat{\phi}_j^{[ij]}(\mathbf{x}) \equiv 0$ 。

1.4 Q4- CNS 的性质

下面介绍 Q4- CNS 一些有用的性质:

1) Q4- CNS 权函数在节点处导数的值等于 0。

证明 权函数在全局坐标下的导数可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \tag{25}$$

因为在节点处 $\begin{Bmatrix} \partial w_i / \partial \xi & \partial w_i / \partial \eta \end{Bmatrix}^T = 0$, 所以在节点处得到

$$\left\{ \partial w_i / \partial x \quad \partial w_i / \partial y \right\}^T = \mathbf{0} \quad (26)$$

2) Q4- CNS 的插值函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在节点处是 C^1 连续的。

证明 由式(1), 插值函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的导数表示为

$$\begin{cases} u_{,x}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 (w_{i,x}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x}) u_{i,x}(\mathbf{x})), \\ u_{,y}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 (w_{i,y}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x}) u_{i,y}(\mathbf{x})), \end{cases} \quad (27)$$

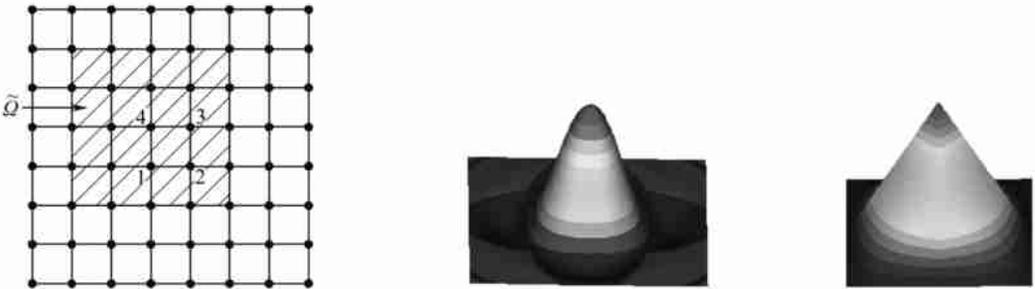
考虑在节点 j 处, 坐标为 $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ 的计算点 $P(\mathbf{x}_j)$, 得到下面的式子:

$$\begin{cases} w_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & (j = i), \\ 0 & (j \neq i), \end{cases} \\ w_{i,x}(\mathbf{x}_j) = 0, \quad w_{i,y}(\mathbf{x}_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \quad (28)$$

将式(28)代入式(27)得到

$$u_{,x}^h(\mathbf{x}_j) = u_{i,x}(\mathbf{x}_i), \quad u_{,y}^h(\mathbf{x}_j) = u_{i,y}(\mathbf{x}_i). \quad (29)$$

所以, Q4- CNS 的插值函数的导数在节点处是 C^1 连续的, 并且导数值等于节点覆盖函数在该节点处的导数值。Q4- CNS 的形函数如图 3(b) 所示。必须注意, 节点 i 的支撑域不是 Ω , 而是更大的区域 Ω_i , 如图 3(a) 所示。可以看出, Q4- CNS 的形函数的导数在节点处是连续的。为了比较, 在节点支撑区域 Ω 内绘制 QUAD4 的形函数, 可以看出, QUAD4 的形函数在节点处是 C^0 连续的。



(a) 节点 4 的支撑区域

(b) Q4- CNS 的形函数

(c) QUAD4 的形函数

图 3 比较 QUAD4 和 Q4- CNS 的形函数(Q4- CNS 的形函数在节点处具有 C^1 连续性)

3) Kronecker- δ 性质:

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & (j = i), \\ 0 & (j \neq i). \end{cases} \quad (30)$$

2 数值实验

本章通过数值实验讨论 Q4- CNS 求解弹性力学问题的数值精度和收敛性, 并且与 QUAD4 和 FE- LSPIM QUAD4 进行了比较。本章数值实验均采用国际单位。在数值实验中, 定义 n 为计算模型的节点总数。定义相对位移误差和相对能量误差:

$$e_d = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{\text{ex}} - \mathbf{u}^{\text{num}})^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{\text{ex}})^2 d\Omega}}, \quad (31)$$

$$e_e = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ex}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{num}})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ex}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{num}})^T d\Omega}{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ex}})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ex}} d\Omega}}, \quad (32)$$

上式中, 上标“ex”表示理论解, 上标“num”表示数值解。

2.1 线性相关问题

众所周知, 一些基于单位分解理论的方法存在线性相关问题, 导致总体刚度矩阵奇异^[11]。但是, Q4-CNS 似乎不存在线性相关问题。线性相关问题中, 实验材料参数为 $E = 1.0$ 和 Poisson 比 $\nu = 0.25$, 计算几何模型和边界条件如图 4 所示。根据实验结果, 当没有施加边界条件时, 在随机网格条件下, 总体刚度矩阵的零特征值总数为 3 个。在施加了边界条件以后, 总体刚度矩阵不再有零特征值。从数值结果可以看出, Q4-CNS 似乎不存在线性相关问题。

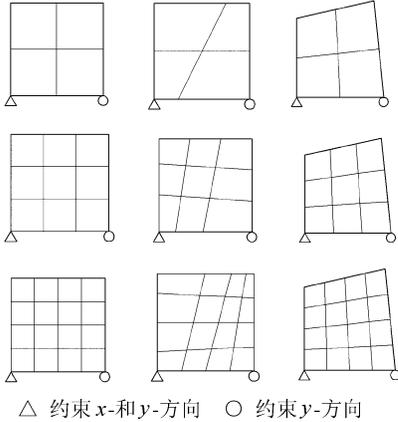
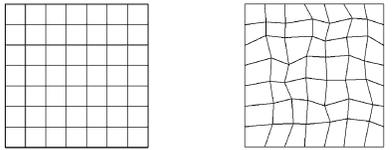


图 4 验证线性相关问题的网格图



(a) 网格 A (b) 网格 B

图 5 标准分片实验的网络图

2.2 标准分片实验

一种有限元方法能否通过分片实验是保证求解弹性力学问题收敛性的充分必要条件。考虑一个 1×1 的正方形区域。边界条件按下面式子施加:

$$u_x = x, \quad u_y = y \quad (33)$$

如图 5 所示, 建立规则和不规则 2 种计算网格, 计算中单元上的积分点数为 25。根据数值实验结果, 在规则网格条件下, Q4-CNS 相对位移误差为 2.42×10^{-12} ; 在不规则网格条件下, Q4-CNS 的相对位移误差为 3.95×10^{-11} 。在规则网格条件下, FE-LSPIM QUAD4 的相对位移误差为 4.04×10^{-13} ; 在不规则网格条件下, FE-LSPIM QUAD4 的相对位移误差为 2.93×10^{-11} 。上述数值实验表明, Q4-CNS 在网格加密时能收敛于精确解。

2.3 弱式分片实验

处于常应变状态和不规则网格条件下的弱式分片实验由 Chen 等提出^[12]。实验几何条件如图 6 所示。弱式分片实验的步骤可参考文献[12]。数值实验表明 Q4-CNS 能精确地通过弱式分片实验。当精确到小数点后 4 位数字时, Q4-CNS 的数值结果与 FE-LSPIM QUAD4^[5]的数值结果完全相同。

2.4 悬臂梁

研究二维的悬臂梁, 悬臂梁长为 L , 高为 D , 厚度为 1, 悬臂梁左端固定, 右端受抛物线荷载, 如图 7 所示。计算参数的选取如下: $L = 8, D = 1, E = 3.0 \times 10^7, \nu = 0.25$, 假设平面应变条件。计算时, 在 $x = 0$ 的边界上按照解析解施加位移条件, 在 $x = L$ 的边界上按照解析解施加分布荷载。此问题的解析解由文献[13]给出。

2.4.1 收敛性实验

首先, 建立 4 个基于规则网格的离散模型, 如图 8 所示。收敛曲线绘制于图 9 中。可以看出, Q4-CNS 和 FE-LSPIM QUAD4 的相对位移误差收敛率分别是 -4.06 和 -3.73, 明显好于 QUAD4 (-2.15)。Q4-CNS 和 FE-LSPIM QUAD4 的相对能量误差收敛率分别是 -2.17 和

- 2.18, 也明显好于 QUAD4(- 1.67)• 总体来说, Q4- CNS 和 FE- LSPIM 的收敛率在同一数量级上•

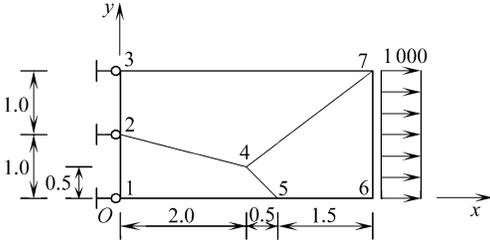


图 6 弱式分片实验的几何条件和边界条件

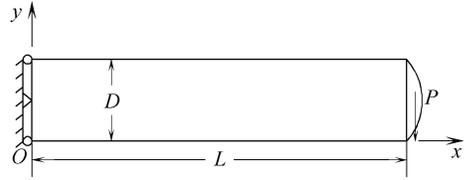


图 7 悬臂梁实验的几何条件和边界条件

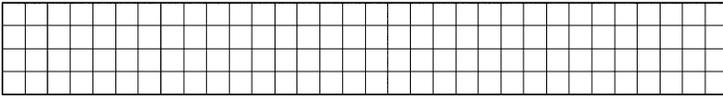
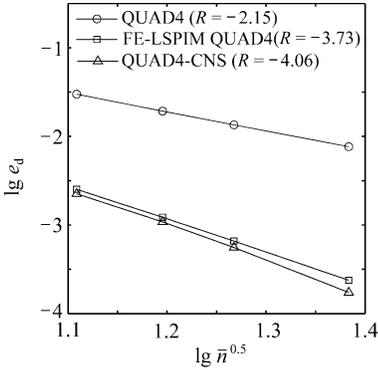
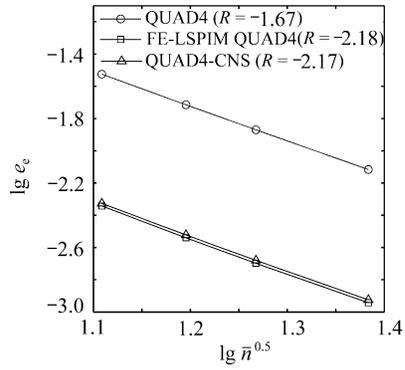


图 8 悬臂梁实验的规则网格图(165 节点)



(a) 相对位移误差

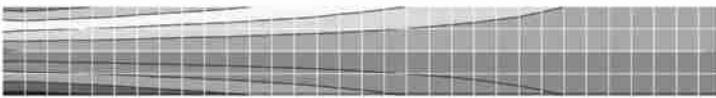


(b) 相对能量误差

图 9 悬臂梁实验的收敛曲线



(a) QUAD4



(b) Q4-CNS

图 10 悬臂梁实验中规则网格下的应力云图(σ_x)

在图 10 中绘制了在规则网格下由 QUAD4 和 Q4- CNS 分别得到的应力云图(σ_x), 可以看出, 用 Q4- CNS 得到的应力场比用 QUAD4 得到的应力场更光滑•

2.4.2 网格质量的影响

为了检验网格质量对数值精度的影响, 建立 2 个不同程度扭曲的网格, 如图 11 所示• 相对位移误差和相对能量误差在表 1 中给出• 可以看出应用 Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 在 2 种不同扭曲度的网格下的数值结果都明显优于 QUAD4, 这说明他们对网格质量是不敏感的•

表 1 比较 Q4- CNS, FE- LSPIM QUAD4 和 QUAD4 在扭曲网格下的数值精度

扭曲网格	相对位移误差 e_d			相对能量误差 e_e		
	QUAD4	FE- LSPIM QUAD4	Q4- CNS	QUAD4	FE- LSPIM QUAD4	Q4- CNS
网格 A	0.020 6	0.001 0	0.000 9	0.045 7	0.007 8	0.015 4
网格 B	0.029 0	0.001 1	0.000 1	0.078 8	0.012 9	0.027 4

在图 12 绘制了在不规则网格下用 QUAD4 和 Q4- CNS 分别得到的应力云图 (σ_x), 可以看出在不规则网格条件下, 用 Q4- CNS 得到的应力场仍然保持光滑, 而用 QUAD4 得到的应力场出现严重的波动。用 QUAD4 和 FE- LSPIM QUAD4^[5] 得到的应力场结果是类似的。

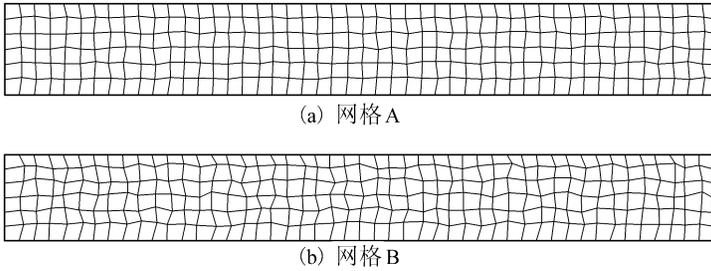


图 11 悬臂梁实验不同程度的扭曲网格图(343 节点)

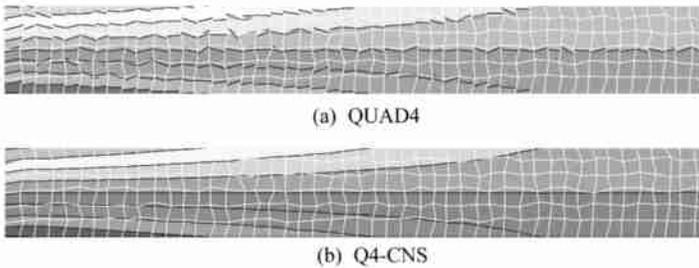
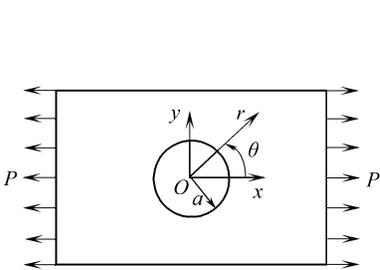
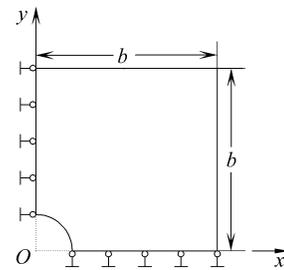


图 12 悬臂梁实验在扭曲网格下的应力云图 (σ_x)



(a) 带孔无限大板



(b) 1/4 板

图 13 带孔无限大板实验的几何条件和边界条件及 1/4 模型($a = 1, b = 5$)

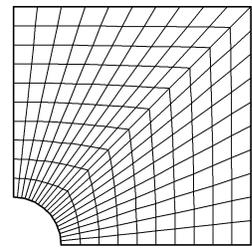


图 14 带孔无限大板实验的网格图(66 节点)

2.5 带孔无限大板

图 13(a) 展示了 1 个无限大的板, 板的中心有 1 个半径为 a 圆孔, 板两端承受均布拉力 P 。由于对称性, 只研究右上部的 1/4 板, 如图 13(b) 所示。解析解可以在极坐标下得到^[13]。参数的选择为: $a = 1, b = 5, P = 1$, 假设平面应变状态。材料参数为: $E = 3.0 \times 10^7, \nu =$

0.3• 板厚为 1• 在边界 $x = 5.0$ 和 $y = 5.0$ 上解析解应力被施加为边界条件•

2.5.1 收敛性实验

建立了 4 个计算模型, 他们的节点数分别为: 66、231、861 和 3 321, 如图 14 所示• 在图 15 中, 对比了 QUAD4, Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 这 3 种方法的收敛曲线• 可以看出 Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 相对能量误差收敛率和相对位移误差的收敛率都在同一数量级上, 明显好于 QUAD4• 在图 16 中, 对比了 QUAD4 和 Q4- CNS 所做的应力云图 (σ_x), 可以看出, 用 QUAD4 得到的应力场在不规则网格下出现波动, 而用 Q4- CNS 得到的应力场仍然光滑, Q4- CNS 继承了 FE- LSPIM QUAD4^[5] 对网格质量不敏感的优点•

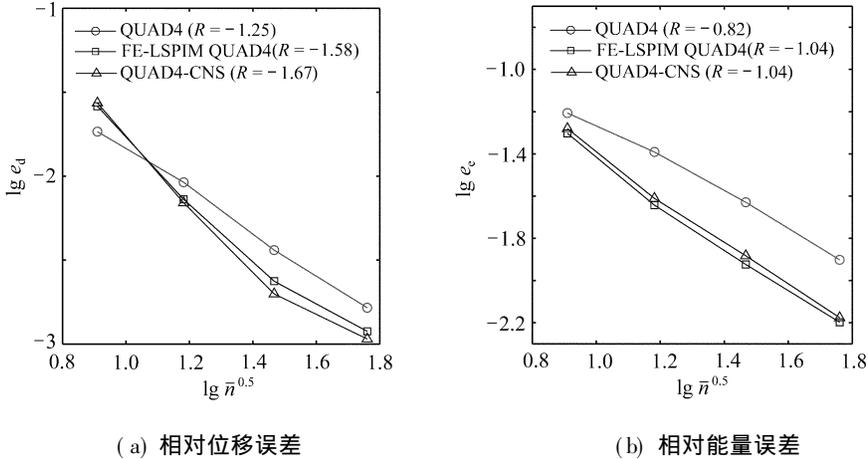


图 15 带孔无限大板实验的收敛曲线

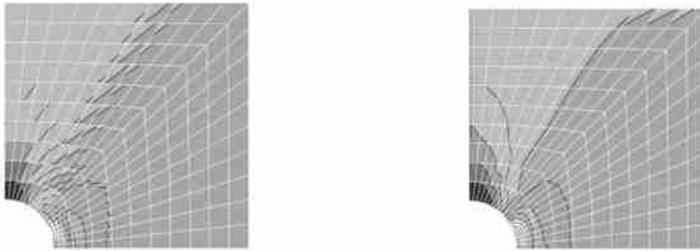


图 16 带孔无限大板实验的应力云图 (σ_x)

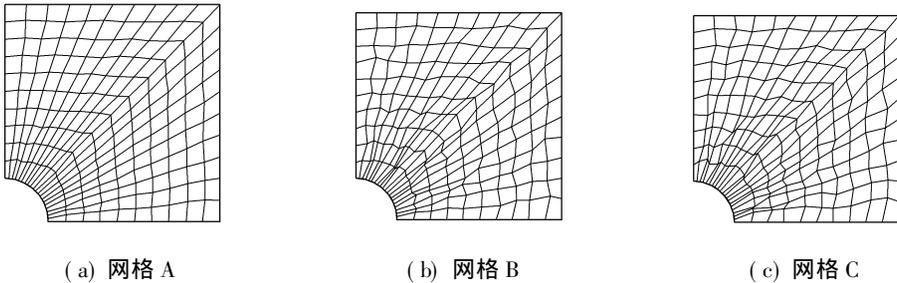


图 17 带孔无限大板实验的不同程度扭曲网格

2.5.2 网格质量的影响

为了测试对 Q4- CNS 网格质量的敏感性, 建立了 3 个不同程度扭曲的网格, 如图 17 所示• 3

种方法在不规则网格下的相对位移误差和相对能量误差在表 2 中给出。可以看出, Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 的数值结果相似, 网格质量对 Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 的影响都非常小。

表 2 比较 Q4- CNS, FE- LSPIM QUAD4 和 QUAD4 在扭曲网格下的数值精度

扭曲网格	相对位移误差 e_d			相对能量误差 e_e		
	QUAD4	FE- LSPIM QUAD4	Q4- CNS	QUAD4	FE- LSPIM QUAD4	Q4- CNS
网格 A	0.010 0	0.007 0	0.005 5	0.042 6	0.023 3	0.031 0
网格 B	0.011 6	0.008 1	0.006 8	0.046 7	0.028 8	0.044 2
网格 C	0.012 5	0.008 2	0.006 8	0.048 8	0.028 7	0.047 0

2.6 受内压的圆筒

研究 1 个受内压的圆筒, 内径为 a , 外径为 b , 厚度为 1, 如图 18 所示。单位压力 $p = 1$ 施加在内径边界上 ($r = a$), 其外径边界上 ($r = b$) 没有荷载。鉴于对称性, 只需要建立 1/4 个圆环即可。解析解在文献 [14] 中给出。在数值计算中, 参数选择如下: $a = 1, b = 5, p = 1$, 计算按平面应力问题考虑。材料选择为弹性材料: $E = 1 \times 10^3, \nu = 0.25$ 。

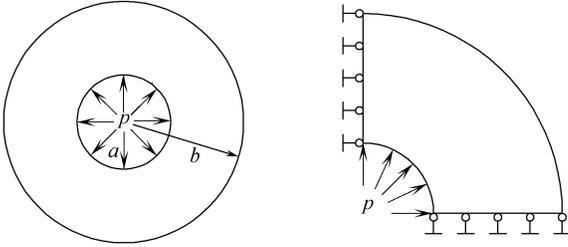


图 18 受内压圆筒实验的几何条件和边界条件及 1/4 模型 ($a = 1, b = 5$)

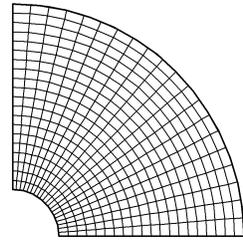
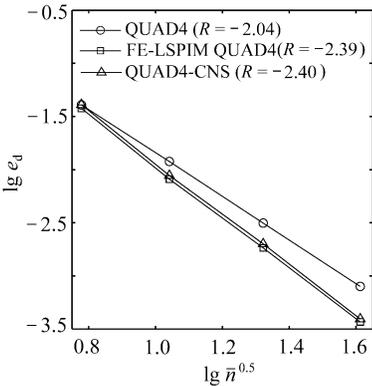
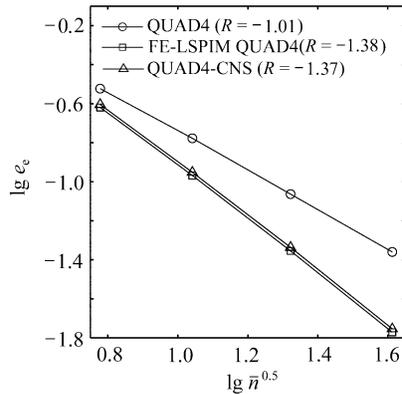


图 19 受内压圆筒实验的网格图



(a) 相对位移误差



(b) 相对能量误差

图 20 受内压圆筒实验的收敛曲线

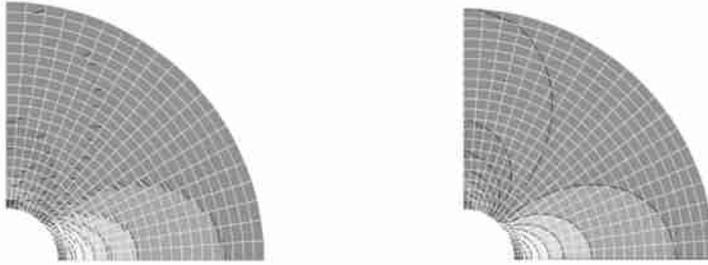
2.6.1 收敛性实验

建立了 3 个不同密度网格, 他们的节点数分别为: 36, 121, 441 和 1 681, 如图 19 所示。相对位移误差和相对能量误差的收敛曲线都绘制在图 20 中。与 QUAD4 相比较, Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 不仅有更高的收敛率, 而且有更好的精度。将用 QUAD4 和 Q4- CNS 分别得

到的应力图绘制于图 21 中。数值实验结果表明,在扭曲网格下,用 Q4- CNS 得到的应力场比用 QUAD4 得到的应力场更光滑。

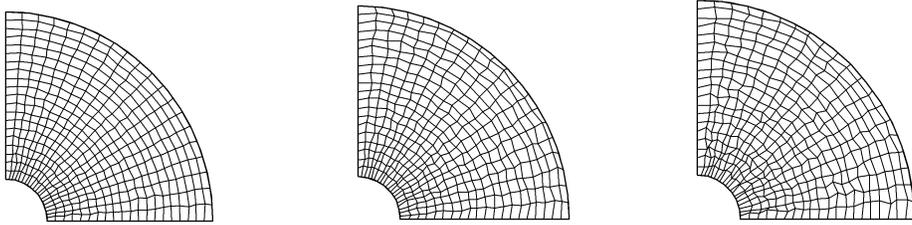
2.6.2 网格质量的影响

为了测试对网格质量的敏感性,建立了 3 个不同程度的网格扭曲,如图 22 所示。QUAD4, Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 在不规则网格下的位移误差和能量误差在表 3 中给出。可以看出, Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 的数值结果相似,明显优于 QUAD4 的数值结果。网格质量对 Q4- CNS 和 FE- LSPIM QUAD4 的影响都非常小。



(a) QUAD4

(b) Q4- CNS

图 21 受内压圆筒实验的应力云图 (σ_x)

(a) 网格 A

(b) 网格 B

(c) 网格 C

图 22 受内压圆筒实验的不同程度扭曲网格

表 3 比较 Q4- CNS, FE- LSPIM QUAD4 和 QUAD4 在扭曲网格下的数值精度

扭曲网格	相对位移误差 e_d			相对能量误差 e_e		
	QUAD4	FE- LSPIM QUAD4	Q4- CNS	QUAD4	FE- LSPIM QUAD4	Q4- CNS
网格 A	0.003 8	0.001 9	0.003 0	0.095 9	0.042 3	0.052 9
网格 B	0.004 2	0.002 1	0.003 4	0.099 6	0.045 3	0.059 6
网格 C	0.005 0	0.002 4	0.004 0	0.109 9	0.048 5	0.070 2

3 结论与讨论

对节点应力连续的四边形单元 Q4- CNS 的原理进行了详细的阐述,设计了典型的算例来检验 Q4- CNS 在弹性力学数值计算中的有效性。数值实验表明, Q4- CNS 有以下优点:

1) 在不规则的网格下, Q4- CNS 仍然能够得到稳定的光滑的应力场。而用传统的四边形单元 QUAD4 得到的应力场在扭曲网格条件下出现严重的波动。

2) Q4- CNS 继承了 FE- LSPIM QUAD4 和无网格法计算精度高、收敛速率快的优点。在收敛实验中, Q4- CNS 能得到比 QUAD4 更精确的数值结果和更快的收敛速率。

3) Q4- CNS 继承了 FE- LSPIM 对网格质量不敏感的优点。在扭曲网格条件下, Q4- CNS

的节点应力会出现明显的不稳定,而使全局误差增大。所以在扭曲网格条件下 Q4- CNS 的相对位移误差和相对能量误差明显比 QUAD4 小。

4) 与 FE- LSPIM QUAD4 相比较,由于 Q4- CNS 形函数的导数在节点处是光滑的。Q4- CNS 的节点应力能自然的得到,而不需要使用任何的节点应力磨平算法。

5) Q4- CNS 的形函数在节点处具有 C^1 的连续性。这一重要的性质在板单元计算中具有潜在的应力价值。

最后, Q4- CNS 能容易的扩展到三维计算, 8 节点六面体单元。

[参 考 文 献]

- [1] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, **37**(2): 229- 256.
- [2] Calvo B, Martinez M A, Doblare M. On solving large strain hyperelastic problems with the natural element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **62**(2): 159- 185.
- [3] Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin plates by the element- free Galerkin method[J]. Computational Mechanics, 1996, **17**(1/2): 26- 35.
- [4] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **139**(1/4): 289- 314.
- [5] Rajendran S, Zhang B R. A “FE- meshfree” QUAD4 element based on partition of unity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, **197**(1/4): 128- 147.
- [6] Zhang B R, Rajendran S. “FE- Meshfree” QUAD4 element for free- vibration analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, **197**(45/48): 3595- 3604.
- [7] Duarte C A, Kim D J, Quaresma D M. Arbitrarily smooth generalized finite element approximation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, **196** (1/3): 33- 56.
- [8] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method [M]. Vol 2, 5th Ed. Oxford, UK: Butterworth Heinemann, 2000, 124- 126.
- [9] Lancaster P, Salkauskas K. Surface generated by moving least squares methods[J]. Mathematics of Computation, 1981, **37**(155): 141- 158.
- [10] Zheng C, Tang X H, Zhang J H, et al. A novel mesh- free poly- cell Galerkin method[J]. Acta Mechanica Sinica, 2009, **25**(4): 517- 527.
- [11] Tian R, Yagawa G, Terasaka H. Linear dependence problems of partition of unity- based generalized FEMs[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, **195**(37/40): 4786- 4782.
- [12] Chen X M, Cen S, Long Y Q, et al. Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method[J]. Computers and Structures, 2004, **82**(1): 35- 54.
- [13] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. 3rd Ed. New York: McGraw, 1970.
- [14] Roark R J, Young W C. Formulas for Stress and Strain [M]. New York: McGraw, 1975.

A Novel Four- Node Quadrilateral Element With Continuous Nodal Stress

TANG Xu- hai¹, ZHENG Chao¹, WU Sheng- chuan^{2,3}, ZHANG Jian- hai¹

(1. State Key Lab of Hydraulics and Mountain River Engineering,
Sichuan University, Chengdu 610065, P. R. China;

2. Centre for Advanced Materials Joining and Computations (AMJC), School of Materials
Science and Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China;

3. Centre for Advanced Computations in Engineering Science (ACES),
Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, 117576, Singapore)

Abstract: Formulation and numerical evaluation of a novel QUAD4 with continuous nodal stress (Q4- CNS) were presented. And Q4- CNS can be regarded as an improved FE- LSPIM QUAD4, which is a hybrid FE- Meshless method. The derivatives of Q4- CNS are continuous at nodes, so continuous nodal stress can be obtained without any smoothing operation. It is found that, compared with standard 4- node quadrilateral element (QUAD4), Q4- CNS can achieve significantly better accuracy and higher convergence rate. It is also found that Q4- CNS exhibits high tolerance to mesh distortion. Moreover, since the derivatives of Q4- CNS shape functions are continuous at nodes, Q4- CNS is potentially useful for the problem of bending plate and shell models.

Key words: Q4- CNS; partition of unity; continuous nodal stress; accuracy; mesh distortion